

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Невенка Б. Коларевић

**ВИБРАЦИЈЕ И ИЗБОЧАВАЊЕ ПЛОЧА И  
ЉУСКИ ПРИМЕНОМ МЕТОДЕ ДИНАМИЧКЕ  
КРУТОСТИ**

докторска дисертација

Београд, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Nevenka B. Kolarević

**VIBRATION AND BUCKLING OF  
PLATES AND SHELLS USING  
DYNAMIC STIFFNESS METHOD**

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, 2016.

---

Невенка Б. Коларевић

**ВИБРАЦИЈЕ И ИЗБОЧАВАЊЕ ПЛОЧА И ЉУСКИ ПРИМЕНОМ  
МЕТОДЕ ДИНАМИЧКЕ КРУТОСТИ**

Ментор:

доцент Др Марија Нефовска-Даниловић,  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

Проф. др Бранислав Пујевић,  
Универзитет у Београду - Грађевински факултет

Проф. др Мира Петронијевић,  
Универзитет у Београду - Грађевински факултет

Проф. др Ђорђе Лађиновић,  
Универзитет у Новом Саду - Факултет техничких наука

доцент. Др Ненад Марковић,  
Универзитет у Београду - Грађевински факултет

Датум одбране:

---

## ЗАХВАЛНОСТ

Желим да се захвалим ментору доценту др Марији Нефовској-Даниловић на драгоцену помоћу приликом израде докторске дисертације. Такође, велику захвалност дугујем проф. др Браниславу Пујевићу на указаном поверењу и подршци, као и проф. др Мири Петронијевић на рецензији дисертације и корисним сугестијама.

Колегама из кабинета 333 хвала на разумевању и преузимању дела мојих обавеза у раду са студентима током завршне фазе израде дисертације.

Захваљујем се и својој породици на безрезервној подршци.

---

## ВИБРАЦИЈЕ И ИЗБОЧАВАЊЕ ПЛОЧА И ЉУСКИ ПРИМЕНОМ МЕТОДЕ ДИНАМИЧКЕ КРУТОСТИ

### Резиме

Метод динамичке крутости (МДК) представља алтернативу методу коначних елемената (МКЕ) у анализи вибрација и избочавања конструкција. Основни елемент у МДК је континуални елемент, односно његова матрица крутости, која је формулисана на основу тачног решења диференцијалне једначине проблема, па је самим тим избегнута потреба за дискретизацијом домена. Да би МДК могао да нађе ширу примену, потребна је одговарајућа база континуалних елемената. У оквиру дисертације су по први пут формулисани континуални елементи за анализу вибрација Mindlin-ове правоугаоне плоче и сегмента кружне цилиндричне љуске по Donnell-Mushtari-евој и Flügge-овој теорији. За решење проблема слободних вибрација коришћен је Gorman-ов метод суперпозиције, док је динамика матрица крутости формулисана помоћу метода пројекције. Такође, на основу решења у затвореном облику формулисани су следећи континуални елементи, односно одговарајуће матрице крутости, за анализу вибрација и избочавања: Maurice Lévy-еве плоче по Mindlin-овој теорији, кружне цилиндричне љуске и сегмента кружне цилиндричне љуске са специјалним граничним условима по Donnell-Mushtari-евој и Flügge-овој теорији. Изведене матрице крутости су имплементирани у за ту сврху написани Matlab програм за анализу вибрација и избочавања система плоча и љуски. Резултати многобројних нумеричких примера су упоређени са доступним резултатима из литературе, као и резултатима МКЕ, чиме је извршена верификација у раду формулисаних континуалних елемената.

Кључне речи: метод динамичке крутости, метод суперпозиције, метод пројекције, континуални елемент, динамичка матрица крутости, динамика конструкција, стабилност конструкција

Научна област: Грађевинарство

Ужа научна област: Техничка механика и Теорија конструкција

УДК број: 624.04:531.2(043.3)

---

# VIBRATIONS AND BUCKLING OF PLATES AND SHELLS USING DYNAMIC STIFFNESS METHOD

## Abstract

*Dynamic stiffness method (DSM)* is an alternative to the *Finite element method (FEM)* in the vibration and buckling analysis. The essential element in the *DSM* is a continuous element and the corresponding stiffness matrix. The stiffness matrix is formulated based on the exact solution of the governing equations. Consequently, the discretization of the domain is minimized. For a wider application of the *DSM*, a suitable base of the continuous elements is necessary. Within this thesis, the continuous elements and the corresponding dynamic stiffness matrices for vibration analysis of the *Mindlin* plate and segment of circular cylindrical shells based on the *Donnell-Mushtari* and *Flügge* theory are formulated for the first time. *Gorman's method of superposition* has been used for solution of the free vibrations problem, while the *dynamic stiffness matrix* is formulated by using the *Projection method*. In addition, based on the closed-form solutions of the of free vibration and buckling problem, the following continuous elements are formulated: *Maurice Lévy* plate element based on the *Mindlin* theory, circular cylindrical shell and segmented circular cylindrical shell with special boundary conditions element based on the *Donnell-Mushtari* and *Flügge* theory. The developed stiffness matrices are implemented in the *Matlab* program for the vibration and buckling analysis of plates and shells assemblies. The results of numerous numerical examples are compared with the available results in the literature, as well as with the results obtained using the *FEM*, and, in such way, the formulated continuous elements are verified.

Key words: dynamic stiffness method, superposition method, projection method, continuous element, dynamic stiffness matrix, dynamic of structures, stability of structures

Scientific field: Civil Engineering

Specific scientific field: Engineering Mechanics and Theory of Structures

UDK: 624.04:531.2(043.3)

---

## САДРЖАЈ

1	УВОД.....	1
1.1	Циљ истраживања.....	3
1.2	Преглед литературе.....	4
1.3	Садржај дисертације.....	7
2	MINDLIN-ОВА ТЕОРИЈА ПЛОЧА .....	9
2.1	Једначине кретања.....	11
2.2	Једначине еластичне стабилности.....	12
2.3	Једначине кретања плоче оптерећене аксијалним силама.....	13
3	КОНТИНУАЛНИ ЕЛЕМЕНТ ПРАВОУГАОНЕ MINDLIN-ОВЕ ПЛОЧЕ ЗА АНАЛИЗУ ВИБРАЦИЈА И ИЗБОЧАВАЊА.....	15
3.1	Опште решење проблема слободних вибрација.....	15
3.1.1	Двострука симетрија SS .....	17
3.1.1.1	Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS}$ .....	23
3.1.2	Симетрија-антисиметрија SA .....	28
3.1.2.1	Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SA}$ .....	31
3.1.3	Дупла антисиметрија AA.....	32
3.1.3.1	Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{AA}$ .....	35
3.1.4	Динамичка матрица крутости правоугаоне плоче $\tilde{\mathbf{K}}_D$ .....	35
3.1.5	Динамичка матрица крутости Maurice Lévy-еве плоче $\mathbf{K}_{Dm}$ .....	40
3.1.6	Формирање глобалне динамичке матрице крутости, гранични услови, сопствене фреквенције и облици осциловања .....	43
3.1.7	Нумерички примери.....	48
3.2	Опште решење проблема избочавања .....	65
3.2.1	Maurice Lévy-ева плоча .....	66
3.2.1.1	Матрица крутости за избочавање $\mathbf{K}_{Im}$ .....	67
3.2.2	Нумерички примери.....	68

---

3.3	Опште решење проблема слободних вибрација плоче оптерећене константним силама у равни.....	77
3.3.1	Maurice Lévy-ева плоча .....	77
3.3.2	Нумерички примери.....	79
4	ТЕОРИЈА ТАНКИХ ЉУСКИ.....	82
4.1	Основни појмови .....	82
4.2	Love-ова прва апроксимација (теорија танких љуски) .....	83
4.3	Кружна цилиндрична љуска.....	94
4.3.1	Donnell-Mushtari-ева теорија .....	95
4.3.2	Flügge-ова теорија.....	97
5	КОНТИНУАЛНИ ЕЛЕМЕНТ ЗАТВОРЕНЕ КРУЖНЕ ЦИЛИНДРИЧНЕ ЉУСКЕ ЗА АНАЛИЗУ ВИБРАЦИЈА И ИЗБОЧАВАЊА .....	99
5.1	Опште решење проблема слободних вибрација затворене кружне цилиндричне љуске.....	99
5.1.1	Donnell-Mushtari-ева теорија .....	99
5.1.2	Flügge-ова теорија.....	104
5.1.3	Динамичка матрица крутости кружне цилиндричне љуске $\mathbf{K}_{Dm}$ .....	107
5.1.3.1	Асиметричне вибрације $m \geq 1$ .....	107
5.1.3.2	Ротационо-симетричне вибрације $m = 0$ .....	111
5.1.4	Формирање глобалне динамичке матрице крутости, гранични услови, сопствене фреквенције и облици осциловања .....	113
5.1.5	Нумерички примери.....	115
5.2	Опште решење проблема избочавања затворене кружне цилиндричне љуски услед константне аксијалне силе притиска.....	127
5.2.1	Матрица крутости за избочавање затворене кружне цилиндричне љуске $\mathbf{K}_{Im}$ .....	128
5.2.2	Нумерички примери.....	129
6	КОНТИНУАЛНИ ЕЛЕМЕНТ СЕГМЕНТА КРУЖНЕ ЦИЛИНДРИЧНЕ ЉУСКЕ ЗА АНАЛИЗУ ВИБРАЦИЈА.....	134

---



---

6.1	Опште решење проблема слободних вибрација.....	134
6.1.1	Двострука симетрија SS .....	135
6.1.1.1	Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS}$ .....	149
6.1.2	Симетрија-антисиметрија SA .....	151
6.1.2.1	Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SA}$ .....	155
6.1.3	Двострука антисиметрија AA .....	156
6.1.3.1	Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{AA}$ .....	159
6.1.4	Динамичка матрица крутости сегмента кружне цилиндричне љуске $\tilde{\mathbf{K}}_D$ .....	160
6.1.5	Динамичка матрица крутости сегмента кружне цилиндричне љуске са специјалним граничним условима $\mathbf{K}_{Dm}$ .....	162
6.1.6	Формирање глобалне динамичке матрице крутости, гранични услови, сопствене фреквенције и облици осциловања .....	168
6.1.7	Нумерички резултати .....	169
7	ЗАКЉУЧЦИ И ПРЕПОРУКЕ.....	190
8	ЛИТЕРАТУРА.....	193
9	ПРИЛОЗИ.....	198
9.1	Mindlin-ова плоча вибрације .....	198
9.1.1	SS део .....	198
9.1.2	SA део.....	200
9.1.3	AA део.....	201
9.1.4	Матрица трансформације T.....	202
9.1.5	Maurice Lévy.....	203
9.2	Mindlin-ова плоча избочавање .....	204
9.2.1	Maurice Lévy.....	204
9.3	Вибрације сегмента кружне цилиндричне љуске .....	204
9.3.1	SS део .....	204
9.3.2	SA део.....	207
9.3.3	AA део .....	209
9.3.4	Матрица трансформације T.....	210

---

---

## СПИСАК СЛИКА

Слика 2.1 - Поље померања и пресечне силе.....	9
Слика 2.2 – Силе које делују на диференцијално мали елемент.....	11
Слика 2.3 – Константне аксијалне силе у равни плоче .....	12
Слика 3.1 - SS деформација плоче.....	16
Слика 3.2 - Померања и ротације контура плоче $x = a$ и $y = b$ .....	23
Слика 3.3 - Пресечне силе на контури плоче $x = a$ и $y = b$ .....	26
Слика 3.4 - SA деформација плоче .....	28
Слика 3.5 - AA деформација плоче .....	32
Слика 3.6 – Нумерација контура плоче .....	36
Слика 3.7 – Maurice Lévy-јева плоча.....	40
Слика 3.8 – Компоненте вектора $\hat{\mathbf{q}}_m$ и $\hat{\mathbf{Q}}_m$ за Maurice Lévy-јеву плочу.....	43
Слика 3.9 - Нумерација плоча и контура и компоненте вектора померања за $M = 1$ .....	44
Слика 3.10 – Формирање глобалне динамичке матрице крутости система који се састоји од две слободне Mindlin-ове плоче за $M = 1$ .....	45
Слика 3.11 - Нумерација плоча и контура и компоненте вектора померања.....	46
Слика 3.12 – Формирање глобалне динамичке матрице крутости система који се састоји од две Maurice Lévy-еве плоче .....	47
Слика 3.13 – Глобална динамичка матрица крутости система који се састоји од две Maurice Lévy-еве плоче за прва три хармоника .....	47
Слика 3.14 – Прва четири облика осциловања за CSSF правоугаону плочу ( $a/b = 0.4$ ).....	54
Слика 3.15 – Прва четири облика осциловања за CFCF правоугаону плочу ( $a/b = 0.4$ ).....	54
Слика 3.16 – Прва четири облика осциловања за CSFF правоугаону плочу ( $a/b = 0.4$ ).....	55
Слика 3.17 – Плоча са скоковитом променом дебљине .....	64

---

Слика 3.18 – Maurice Lévy-јева плоча оптерећена константним аксијалним оптерећењем.....	66
Слика 3.19 – Maurice Lévy-јева плоча са <i>СС</i> граничним условима.....	68
Слика 3.20 – Утицај једноаксијаног оптерећења у равни на сопствене фреквенције .....	80
Слика 3.21 – Утицај двоаксијалног притиска на сопствене фреквенције.....	81
Слика 4.1 - Криволинијске координате.....	82
Слика 4.2 - Конвенција о позитивним напонима .....	88
Слика 4.3 - Конвенција о позитивним пресечним силама .....	89
Слика 4.4 - Кружна цилиндрична љуска .....	94
Слика 5.1 - Компоненте вектора померања $\hat{q}$ .....	107
Слика 5.2 - Компоненте вектора сила $\hat{Q}$ .....	109
Слика 5.3 - Формирање глобалне динамичке матрице крутости матрице $K_{Dm}$ .....	114
Слика 5.4 - Аплицирање граничних услова.....	114
Слика 5.5 – Првих дванаест облика осциловања за кружну цилиндричну љуску са <i>SD-F</i> граничним условима: $L/a = 10$ , $h/a = 0.01$ .....	119
Слика 5.6 – Кружна цилиндрична љуска оптерећена константном силом $N_x^0$ .....	127
Слика 6.1 – Сегмент кружне цилиндричне љуске .....	134
Слика 6.2 – <i>SS</i> деформација сегмента кружне цилиндричне љуске .....	135
Слика 6.3 - Померања, ротације и силе на контури сегмента кружне цилиндричне љуске .....	150
Слика 6.4 – <i>SA</i> деформација сегмента кружне цилиндричне љуске .....	151
Слика 6.5 – <i>AA</i> деформација сегмента кружне цилиндричне љуске.....	156
Слика 6.6 – Координатни систем за сегмент кружне цилиндричне љуске са специјалним граничним условима $p1$ и $p2$ .....	162
Слика 6.7 – Шест могућих комбинација $p1$ и $p2$ граничних услова сегмента кружне цилиндричне љуске за које постоји решење у затвореном облику.....	163
Слика 6.8 – Сегменти кружне цилиндричне љуске променљиве дебљине и бачvasti кров .....	168

---

---

Слика 6.9 – Нумерација контура сегмента кружне цилиндричне љуске ..	169
Слика 6.10 – Прва четири облика осциловања слободног сегмента кружне цилиндричне љуске .....	171
Слика 6.11 – Прва четири облика осциловања сегмента кружне цилиндричне љуске са $SD$ граничним условима на две паралелне контуре: $h/a = 0.01$ , $L/a = 2$ , $2\theta = 60^\circ$ .....	174
Слика 6.12 – Прва четири облика осциловања сегмента кружне цилиндричне љуске са $SD-F-SD-F$ граничним условима: $h/a = 0.01$ , $L/a = 2$ .....	177
Слика 6.13 – Прва четири облика осциловања сегмента кружне цилиндричне љуске са $F-S-S-S$ граничним условима: $h/a = 0.01$ , $L/a = 1.5$ , $2\theta = 90^\circ$ .....	183
Слика 6.14 – Диспозиција бачвастог крова .....	188
Слика 6.15 – Компоненте вектора померања у локалном и глобалном координатном систему .....	189

---

## СПИСАК ТАБЕЛА

- Табела 3.1 - Првих осам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за правоугаону плочу ( $a/b=0.4$ ) са различитим комбинацијама граничних услова:  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ ,  $h/2b=0.2$ . ..... 50
- Табела 3.2 - Првих осам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за правоугаону плочу ( $a/b=0.4$ ) са различитим комбинацијама граничних услова:  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ ,  $h/2b=0.2$ . ..... 52
- Табела 3.3 - Првих десет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за квадратну плочу:  $a/b=1$ ,  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ . ..... 56
- Табела 3.4 - Првих десет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за квадратну плочу:  $a/b=1$ ,  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ ,  $h/2b=0.2$ . ..... 59
- Табела 3.5 - Првих десет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за квадратну плочу:  $a/b=1$ ,  $\nu=0.15$ ,  $k=5/6$ . ..... 61
- Табела 3.6 - Првих шест сопствених фреквенција у (Hz) за правоугаону плочу са једноступеном променом дебљине:  $E=30 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=2500 \text{ kg/m}^3$ ,  $2a=4 \text{ m}$ ,  $b_1=b_2=b=4 \text{ m}$ ,  $t_1=0.4 \text{ m}$  и  $t_2=0.8 \text{ m}$ . ..... 65
- Табела 3.7 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D$  за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) за случај двоаксијалне компресије ( $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ):  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ . ..... 70
- Табела 3.8 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D$  за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) за случај једноаксијалне компресије у правцу  $x$ -осе ( $\xi_1 = 1$  и  $\xi_2 = 0$ ):  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ . ..... 71
- Табела 3.9 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D$  за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) за случај једноаксијалне компресије у правцу  $y$ -осе ( $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 1$ ):  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ . ..... 72

Табела 3.10 - Критични фактор избочавања $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D$ за правоугаону плочу за случај двоаксијалне и једноаксијалне компресије: $h/2a = 0.1, \nu = 0.3, k = 0.86667$ .....	73
Табела 3.11 - Критични фактор избочавања $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D$ за квадратну плочу ( $a/b = 1$ ) за различите односе интензитета оптерећења у равни у правцу $x$ и $y$ -осе ( $\xi_2 = 1$ ): $\nu = 0.3, k = 5/6$ .....	74
Табела 3.12 - Критични фактор избочавања $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D_1$ за квадратну плочу ( $a/b = 1$ ) са једностепеном променом дебљине за случај двоаксијалне и једноаксијалне компресије: $\nu = 0.3, k = 5/6, t_1 / t_2 = 2, b_1 / 2b = 0.3$ .....	76
Табела 3.13 - Првих шест сопствених фреквенција у (Hz) за квадратну плочу ( $a/b = 1$ ) која је оптерећена константним оптерећењем у равни у правцу $y$ -осе ( $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 1$ ): $E = 30 \text{ GPa}, \rho = 2500 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.3, k = 0.86667, 2a = 4 \text{ m}, h = 0.4 \text{ m}$ .....	80
Табела 3.14 - Првих шест сопствених фреквенција у (Hz) за квадратну плочу ( $a/b = 1$ ) са једностепеном променом дебљине која је оптерећена константним двоаксијалним притиском ( $\xi_1 = 1$ и $\xi_2 = 1$ ): $E = 30 \text{ GPa}, \rho = 2500 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.3, k = 5/6, 2a = 4 \text{ m}, b_1 = 1.2 \text{ m}, b_2 = 2.8 \text{ m}, t_1 = 0.4 \text{ m}, t_2 = 0.8 \text{ m}$ .....	81
Табела 5.1 - Бездимензионалне сопствене фреквенције $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)} / E$ за кружну цилиндричну љуску са $SD$ - $SD$ граничним условима: $\nu = 0.3$ .....	117
Табела 5.2 – Прве четири бездимензионалне сопствене фреквенције $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)} / E$ кружне цилиндричне љуске за усвојено $m$ као и првих дванаест бездимензионалних сопствених фреквенција $\bar{\omega}$ за које је приказано одговарајуће $m$ и $n$ : $L/a = 10, h/a = 0.01, \nu = 0.3$ .....	118
Табела 5.3 - Првих девет сопствених фреквенција у (Hz) за кружну цилиндричну љуску са $C$ - $C$ граничним условима: $E = 210 \text{ GPa}, \rho = 7850 \text{ kg/m}^3, \nu = 0.3, L = 20 \text{ m}, a = 1 \text{ m}, h = 0.01 \text{ m}$ .....	120
Табела 5.4 - Најнижа бездимензионална сопствена фреквенција $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)} / E$ за усвојено $m$ слободне кружне цилиндричне љуске им условима: $L/a = 20, h/a = 0.05, \nu = 0.3$ .....	121

Табела 5.5 - Прве четири бездимензионалне сопствене фреквенције $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$ за усвојено $m$ за кружну цилиндричну љуску са једно-степеном променом дебљине: $h_1/a = 0.01$ , $h_2/h_1 = 0.5$ , $L_1/L = 1/2$ , $\nu = 0.3$ .....	122
Табела 5.6 - Прве четири бездимензионалне сопствене фреквенције $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$ за усвојено за $m$ кружне цилиндричне љуске са $SD$ - $SD$ граничним условима и скоковитом променом дебљине: $\nu = 0.3$ .....	124
Табела 5.7 - Најниже бездимензионалне сопствене фреквенције $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$ за кружну цилиндричну љуску са два, односно три, прстенаста међуослонца ( $w=0$ ) на једнаким међусобним растојањима: $\nu = 0.3$ . ....	126
Табела 5.8 – Критични фактор избочавања $\lambda = N_x^0 a \sqrt{3(1-\nu^2)}/(Eh^2)$ за кружну цилиндричну љуску са $SD$ - $SD$ граничним условима: $\nu = 0.3$ .....	130
Табела 5.9 – Критични фактор избочавања $\lambda = N_x^0 a \sqrt{3(1-\nu^2)}/(Eh^2)$ за кружну цилиндричну љуску са $C$ - $F$ граничним условима: $h/a = 1/100$ , $\nu = 0.3$ .....	130
Табела 5.10 - Критични фактор избочавања $\lambda = N_x^0 a \sqrt{3(1-\nu^2)}/(Eh^2)$ за кружну цилиндричну љуску са једним прстенастим међуослонцем: $\nu = 0.3$ .....	132
Табела 5.11 - Критични фактор избочавања $\lambda = N_x^0 a \sqrt{3(1-\nu^2)}/(Eh^2)$ за кружну цилиндричну љуску са прстенастим ослонцима на једнаким међусобним растојањима: $L/a = 5$ , $h/a = 1/100$ , $\nu = 0.3$ . ....	133
Табела 6.1 - Првих девет бездимензионалних сопствених фреквенција $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$ слободног сегмента кружне цилиндричне љуске: $\nu = 0.3$ , $h/a = 0.005$ , $L/a = 1.5$ , $2\theta = 45^\circ$ .....	171
Табела 6.2 - Првих седам бездимензионалних сопствених фреквенција $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$ за сегмент кружне цилиндричне љуске са $SD$ граничним условима на две паралелне контуре: $\nu = 0.3$ , $h/a = 0.01$ , $L/a = 2$ , $2\theta = 60^\circ$ . ....	173

- Табела 6.3 - Првих шест бездимензионалних сопствених фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са *SD-F-SD-F* комбинацијом граничних услова и различитом вредношћу угла  $2\theta$ :  $\nu=0.3$ ,  $h/a=0.01$ ,  $L/a=2$ . .... 176
- Табела 6.4 - Првих седам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са различитим комбинацијама граничних услова:  $\nu=0.3$ ,  $h/a=0.01$ ,  $L/a=2$ ,  $2\theta=60^\circ$ . ..... 180
- Табела 6.5-(а)- Првих шест бездимензионалних сопствених фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са три слободне контуре:  $\nu=0.3$ ,  $h/a=0.01$ ,  $L/a=1.5$ ,  $2\theta=90^\circ$ . ..... 181
- Табела 6.5-(б)- Првих шест бездимензионалних сопствених фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са две, једном и без слободних контура:  $\nu=0.3$ ,  $h/a=0.01$ ,  $L/a=1.5$ ,  $2\theta=90^\circ$ . .....181
- Табела 6.6 – Првих шест бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са једностепеном променом дебљине у правцу *x*-осе и са *SD-SD* граничним условима на контурама  $\varphi=0$  и  $\varphi=2\theta$ :  $\nu=0.3$ ,  $L/a=5$ ,  $L_1/L=1/2$ ,  $2\theta=180^\circ$ ,  $h_1/a=0.01$  и  $h_2/h_1=2$ . ..... 184
- Табела 6.7 - Прве три бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за усвојено *m* сегмента кружне цилиндричне љуске са *SD-SD* граничним условима на контурама  $\varphi=0$  и  $\varphi=2\theta$  и са једним прстенастим међуослонцем ( $w=0$ ) на половини дужине:  $L_1/L=1/2$ ,  $h/a=0.01$ ,  $\nu=0.3$ . ..... 186
- Табела 6.8 – Првих пет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за бачvasti кров састављен од два сегмента кружне цилиндричне љуске:  $\nu=0.3$ ,  $L/a=5$ ,  $2\theta=180^\circ$  и  $h/a=0.05$ . ..... 189



# 1 УВОД

*Метод коначних елемената (МКЕ)* је најчешће коришћен и широко прихваћен метод који пружа могућност за моделирање сложених конструкција. У *МКЕ*, решење парцијалних диференцијалних једначина (*ПДЈ*) којима је дефинисан физички проблем је приближно и заснива се на апроксимацији поља померања (напона) помоћу интерполационих функција које су најчешће усвојене у облику полинома. Тачност апроксимације зависи од избора интерполационих функција, као и од густине усвојене мреже коначних елемената. За разлику од статичке анализе, величина мреже у динамичкој анализи, која је потребна да би се добили резултати задовољавајуће тачности, зависи и од највише фреквенције од интереса. Према *Alford-у* (*Alford, 1974*), максимална величина коначног елемента треба да буде 10-20 пута мања од таласне дужине која одговара највишој фреквенцији у анализи. Повећање броја коначних елемената, како би се постигла одговарајућа тачност, захтева више времена, напора и ресурса да се одређени проблем реши.

Увек ће постојати потреба за аналитичким решењима проблема заснованим на класичним теоријама, која представљају репер за проверу тачности приближних метода и дају бољи увид у напонско-деформацијско стање. Као алтернатива *МКЕ* у динамичкој анализи све се више користи тзв. *метод динамичке крутости* чија је главна идеја да споји флексибилност *МКЕ* и тачност и поузданост аналитичких метода. Основна замисао је да се матрице крутости континуалних елемената, које повезују силе и померања на крајевима елемента, одреде на основу тачног решења *ПДЈ* којима је дефинисан проблем.

*Метод динамичке крутости* се користи под различитим именима у литератури: *метод континуалних елемената* (*Kevorkian and Pascal, 2001*), *коначни елементи високе прецизности* (*Kulla, 1997*) или *спектрални елементи* (*Doyle, 1997*), (*Lee, 2009*). *Метод динамичке крутости* је задобио пажњу многих истраживача у Европи почевши од 1975. године, нарочито у области аеронаутичког и бродарског инжењеринга где се за конструкције подморница користио у области акустичних фреквенција. У почетку, *метод динамичке крутости* је био ограничен на примену код

једнодимензионалних елемената. тј греда (преглед се може наћи у књизи *Lee-a* (U. Lee, 2009)). Решење *ПДЈ* којима је дефинисан проблем мора да буде неодређено што се тиче граничних услова, јер на нивоу елемента они још нису задати. За једнодимензионалне континууме гранични услови могу увек да буду задовољени на тачан начин. Сем пар изузетака, *метод динамичке крутости* није био аутоматизован и убачен у модуле програма. Неколико институција у Шведској, Француској, Великој Британији и Немачкој је развило програме које су користили у практичној примени. Сви ти програмски пакети дају тачне резултате у оквирима усвојене теорије. Њихова главна мана је био недостатак дводимензионалних елемената. Овај недостатак је био главна препрека за шире прихватање овог иначе моћног метода.

За разлику од једнодимензионалних елемената који имају коначан број дискретних граничних услова, дводимензионални елементи имају континуалне граничне услове. Испуњавање континуалних граничних услова је еквивалентно испуњавању дискретних граничних услова у бесконачном броју тачака. То је главна препрека аналитичком решењу проблема. Само за специфичне проблеме (нпр. правоугаона плоча са две паралелне слободно ослоњене контуре, кружне цилиндрична љуска,...) може да се добије тачно решење. У општем случају, континуални гранични услови морају да се апроксимирају низом дискретних граничних услова. Дискретизација увек уноси грешку. Континуалне функције, које представљају померања и силе дуж контуре, се апроксимирају *Fourier*-овим редом. У практичним прорачунима, узимање коначног броја чланова ових бесконачних редова уноси грешку. Са друге стране, број чланова реда може једноставно да се контролише од стране корисника и да буде изабран тако да је при додавању још једног члана промена резултата мања од унапред усвојене тачности. Овај метод може да се класификује као приближан метод са високом и лако подесивом тачношћу.

Када се одреди аналитичко решење *ПДЈ* може да се успостави веза између сила и померања на крајевима елемента. Та веза је успостављена преко *динамичке матрице крутости (ДМК)*, ако је *ПДЈ* био дефинисан проблем слободних вибрација у фреквентном домену, односно преко *матрице крутости за извијање/избочавање (МКИ)* ако је *ПДЈ* био дефинисан проблем

еластичне стабилности. ДМК у себи садржи масу, крутост и пригушење, за разлику од МКЕ у коме су раздвојене, фреквентно независне, матрица крутости и матрица масе. Елементи ДМК и МКИ су трансцедентне функције фреквенције, односно фактора оптерећења. Пошто се не користи дискретизација континуума, ове матрице су тачне и садрже бесконачно сопствених вредности. Као последица, произвољни и теоријски чак и бесконачно велики елементи могу да се користе без губитка тачности. Ипак, у конкретним прорачунима, због нумеричке нестабилности неопходна је подела елемената великих димензија на више мањих елемената (Casimir, Nguyen and Tawfiq, 2007).

Када су одређене матрице крутости елемената, поступак формирања матрице крутости система је сличан као у МКЕ. Разлика је у томе што се дводимензионални континуални елементи спајају дуж контура, а не у чворовима, што је био случај у МКЕ. Сопствене вредности, за које матрица система постаје сингуларна, су сопствене фреквенције, односно фактори критичног оптерећења, при чему је најчешће само најмањи критични фактор оптерећења онај који је од интереса. За одређивање нула детерминанте динамичке матрице крутости, односно матрице крутости за избочавање, могу да се користе неке од техника претраживања. Применом *Wittrick-Williams*–овог алгоритма (Wittrick and Williams, 1970) се одређује број сопствених вредности мањих од неке унапред изабране и на тај начин елиминише могућност грешке. Потешкоће при одређивању нула детерминанте трансцедентних матрица је био још један од разлога који је ометао ширу прихваћеност *метода динамичке крутости*. Са друге стране, недостатак грешака дискретизације не даје само тачније резултате, већ такође доводи до ширег разумевања теорије (структура) динамичких система.

## **1.1 Циљ истраживања**

Циљ истраживања је да се одреде матрице крутости за дводимензионалне континуалне елементе и на тај начин прошири постојећа база ДМК, односно МКИ. Самим тим се повећава и број проблема у анализи конструкција који могу да се реше применом *метода динамичке крутости*. На основу досадашњег искуства истраживача у овој области, програми

који се заснивају на примени динамичких матрица крутости показују предности у односу на комерцијалне програме засноване на *МКЕ* при решавању динамичких проблема у зони високих фреквенција у погледу тачности и времена прорачуна.

У оквиру дисертације тежиште ће бити на одређивању *ДМК*, односно *МКИ*, за:

- правоугаону плочу по *Mindlin*-овој теорији,
- затворену кружну цилиндричну љуску по *Donnel-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији,
- сегмент кружне цилиндричне љуске по *Donnel-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији.

Такође, у циљу решавања проблема вибрација и избочавања система плоча и љуски развијени су алгоритми за формирање глобалне динамичке матрице система плоча, односно љуски, који су имплементирани у рачунарски програм написан у *Matlab*-у (*Matlab*, 2011).

## 1.2 Преглед литературе

*Динамичка матрица крутости* је прво била изведена за линијске елементе. За ове елементе је могуће решење парцијалне диференцијалне једначине кретања у затвореном облику. Одређивање матрице крутости за површинске елементе (плоче и љуске) је сложенији проблем. Решење у затвореном облику постоји само за плоче које су на две паралелне контуре слободно ослоњене (*SS*). *Wittrick* и *Williams* ((*W. H. Wittrick*, 1968), (*W. H. Wittrick*, 1968), (*Wittrick and Williams*, 1969) и (*Wittrick and Williams*, 1974)) су први извели тачну матрицу крутости за анализу вибрација и избочавања *SS* плоче користећи *Kirchhoff*-ову теорију. Ова теорија је неодговарајућа код умерено дебелих и дебелих плоча зато што прецењује сопствене фреквенције и фактор критичног оптерећења. То је последица занемаривања смичуће деформације, као и ротационе инерције у анализи вибрација. *Anderson* и *Kennedy* ((*Anderson and Kennedy*, 1993), (*Anderson and Kennedy*, 1993)) су при извођењу матрице крутости за *SS* плочу узели у обзир смичуће деформације, док су *Leung* и *Zou* (*Leung and Zou*, 1996) извели матрицу крутости за композитну *SS* плочу применом теорије смицања вишег реда. Матрица крутости је одређена нумерички. *Boscolo* и

*Banerjee* (Boscolo and Banerjee, 2011) су први извели динамичку матрицу крутости  $SS$  плоче са експлицитним изразима за њене чланове користећи *Mindlin*-ову теорију. У обзир су узели и ротациону инерцију. Касније су користили *Mindlin*-ову теорију за извођење ДМК за композитну плочу. *Fazzolari* је у свом раду (Fazzolari, Boscolo and Banerjee, 2013) за извођење ДМК за композитну плочу применио теорију смицања вишег реда, у којој није потребно коришћење коефицијента за корекцију смичућих напона (*shear corection factor*).

Проблем слободних вибрација правоугаоне плоче за произвољне граничне услове применом *Kirchhoff*-ове теорије прво су решили *Kevorkian* и *Pascal* (Kevorkian and Pascal, 2001). За опште решење ПДЈ користили су *Gorman*-ов метод суперпозиције (Gorman, 1978). Силе и померања на крајевима контуре, које су функција просторне координате, представљени су бесконачним *Fourier*-овом редом (*Метод пројекције*, (Kevorkian and Pascal, 2001)) и на тај начин је омогућено извођење ДМК. Апроксимативност овог решења огледа се у томе што се у практичним прорачунима узима коначан број чланова реда  $M$ . Применом *Gorman*-овог метода суперпозиције као и *метода пројекције*, за правоугаону плочу са произвољним граничним условима изведене су још и следеће ДМК:

- за вибрације у равни (Nefovska-Danilovic and Petronijevic, 2015),
- за попречне вибрације по *Mindlin*-овој теорији (Kolarevic, Nefovska-Danilovic and Petronijevic, 2015),
- за попречне вибрације по теорији смицања вишег реда (Kolarevic, et al., 2016).

Систем ПДЈ којима је дефинисан проблем слободних вибрација љуски је сложенији него код плоча. Од свих ротационо симетричних љуски, највећи број теоријских и експерименталних истраживања је посвећен кружној цилиндричној. Разлог лежи у њеној доста једноставној геометрији, која доводи до лако решивог система ПДЈ са константним коефицијентима, као и њеној доста честој примени у реалним конструкцијама (димњаци, проточне цеви, трупови авиона, ...).

*Leung* и *Zou* (Leung and Zou, 1993) су извели ДМК за танку кружну цилиндричну љуску коришћењем једначина *Donnell-Mushtari*-а и *Flügge*-а. Поред директног решавања система ПДЈ које су користили *Leung* и *Zou*,

или у случају да оно није могуће, може да се користи алтернативни метод- *Метод једначина вектора стања* (*State vector equation method*) (U. Lee, 2009). ДМК се изводи помоћу *трансфер матрице* која је формулисана директно из једначина кретања вектора стања (*State vector equation of motion*). Променљиве у вектору стања представљају изводе померања и пресечних сила по просторним координатама. *Трансфер матрица*, која је фреквентно зависна, повезује компоненте вектора стања на границама елемента. Код линијских елемената то су његови крајеви, док код површинских елемената границе су његове контуре. Код једноставнијих проблема трансфер матрице могу да се изведу у аналитичком облику, док код сложенијих проблема (површински елементи, елементи променљиве дебљине, ...) *трансфер матрица*, па самим тим и ДМК, се одређују нумерички за сваку кружну фреквенцију. Применом овог метода *Le Sourne* (Le Sourne, 1998) је у својој докторској дисертацији одредио ДМК танке ротационо симетричне љуске, коју је користио у анализи вибрација цилиндричне и конусне љуске, као и ДМК закривљене цеви. *Casimir* (Casimir, Nguyen and Tawfiq, 2007) је применом *метода једначина вектора стања* одредио ДМК за ротационо симетричну љуску по *Reissner*-овој теорији, при чему је узео у обзир смичуће деформације и ротациону инерцију. *Khadimallah* (Khadimallah, et al., 2011) је *Casimir*-ов рад проширио тако што је приказао процедуру за прорачун утицаја од хармонијског површинског и линијског оптерећења у анализи вибрација. Ова оптерећења је заменио еквивалентним силама које делују на границама елемента. Применом *метода једначина вектора стања* и *трансфер матрица* *Nguyen* (Nguyen and Tran, 2011) је одредио ДМК дебеле зарубљене конусне љуске, односно *Tounsi* (Tounsi, et al., 2014) је одредио ДМК ојачане дебеле цилиндричне љуске.

Када је диференцијална једначина којом је дефинисан проблем слободних вибрација са променљивим коефицијентима, решење у затвореном облику не постоји. У овом случају, осим већ поменутог *метода једначина вектора стања*, може да се користи и *Frobenius*-ов метод. *Frobenius*-ов метод се примењује у случају да променљиви коефицијенти могу да се представе у облику полинома. Тада се решење усваја у облику степених редова, чији су коефицијенти изражени преко рекурентних формула. Применом овог метода *Efraim* је одредио ДМК за танку цилиндричну и конусну љуску

(Efraim and Eisenberger, 2006), као и ДМК за сегмент сферне љуске константне и линеарно променљиве дебљине (Efraim and Eisenberger, 2010). Код извођења ДМК сегмента сферне љуске Efraim је узео у обзир смичуће деформације и ротациону инерцију.

### 1.3 Садржај дисертације

Дисертација садржи укупно 7 Поглавља.

После првог уводног Поглавља, у оквиру кога је дефинисан циљ рада и дат преглед претходних истраживања из области *метода динамичке крутости*, следи Поглавље 2 где су дате основне једначине Mindlin–ове теорије плоча у Descartes-овим координатама.

У Поглављу 3 је приказано опште решење проблема слободних вибрација правоугаоне Mindlin-ове плоче, које је добијено применом Gorman-овог *метода суперпозиције*. На основу овог решења и уз коришћење *метода пројекције* изведена је ДМК правоугаоне Mindlin-ове плоче за произвољне граничне услове. За Maurice Lévy-еву плочу постоји добро познато аналитичко решење ПДЈ у облику Fourier-овог реда. Ово решење је коришћено за одређивање тачних ДМК, МКИ као и ДМК за дејство константних аксијалних сила правоугаоне Mindlin-ове плоче са две паралелне слободно ослоњене контуре. Тачност резултата добијених применом изведених матрица крутости, на бази којих је написан програм у програмском језику Matlab, је верификована кроз многобројне примере.

У Поглављу 4 су дате основне једначине теорије танких љуски по Donnell-Mushtari-евој и Flügge-овој теорији.

У оквиру 5. Поглавља су основне једначине теорије танких љуски по Donnell-Mushtari-евој и Flügge-овој теорији из претходног поглавља сведене на једначине које важе за кружну цилиндричну љуску. За затворену кружну цилиндричну љуску постоји аналитичко решење проблема слободних вибрација, на основу кога су изведене тачне ДМК за сваку од ове две теорије. За Flügge-ову теорију решен је и проблем еластичне стабилности услед дејства константне аксијалне силе притиска и на основу тога је изведена тачна МКИ. На крају поглавља су дати нумерички примери.

У Поглављу 6 је дато опште решење проблема слободних вибрација сегмента кружне цилиндричне љуске по *Donnell-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији, које је одређено применом *Gorman*-овог метода суперпозиције. Коришћењем *Gorman*-овог решења и метода пројекције изведена је ДМК сегмента кружне цилиндричне љуске за произвољне граничне услове. Осим овог општег решења, приказано је и решење проблема слободних вибрација сегмента кружне цилиндричне љуске са специјалним граничним условима. Тада, као и у случају *Maurice Lévy*-еве плоче и затворене кружне цилиндричне љуске, постоји тачно аналитичко решење ПДЈ. На основу овог тачног решења су изведене и одговарајуће тачне ДМК сегмента кружне цилиндричне љуске за специјалне граничне услове. Кроз броје примере су верификовани резултати добијени применом изведених ДМК.

У оквиру 7. Поглавља су изнети закључци и дате препоруке за даља истраживања.



## 2 MINDLIN-ОВА ТЕОРИЈА ПЛОЧА

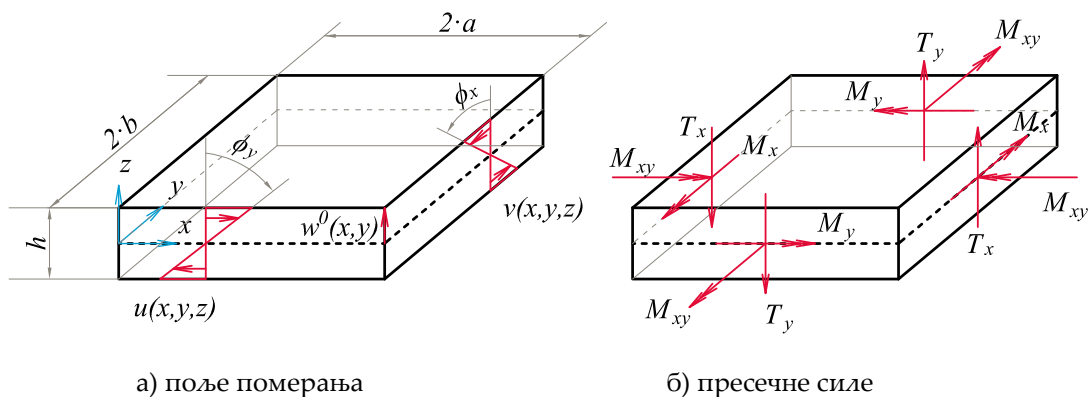
*Mindlin*-ова теорија савијања плоча (Mindlin, 1951), која узима у обзир деформације смицања, заснива се на следећим претпоставкама:

- линијски елемент нормалан на средњу раван пре деформације остаје прав и непромењене дужине после деформације, али не и (обавезно) управан на деформисану површ,
- нема деформација у средњој равни плоче,
- напон  $\sigma_z$  може да се занемари у поређењу са напонима  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ .

Применом *Mindlin*-ове теорије добијају се смичући напони који су константни по висини попречног пресека. На основу става о коњугованости смичућих напона они би морали да буду једнаки нули за  $z = \pm h/2$ ,  $h$  је дебљина плоче. Да би се поправио овај недостатак уводи се коефицијент корекције смичућих напона  $k$ . *Mindlin*-ова теорија даје добре резултате за плоче умерене дебљине, док за веће односе дебљине и распона треба да се примени тачнија теорија која у обзир узима и кривљење пресека. На основу прве две претпоставке поље померања, Слика 2.1-(а), је усвојено у следећем облику:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\phi_y(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\phi_x(x, y) \\ w(x, y, z) &= w^o(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где је  $w^o(x, y)$  угиб у средњој равни, док су  $\phi_x(x, y)$  и  $\phi_y(x, y)$  ротације око  $x$ , односно око  $y$ -осе.



Слика 2.1 - Поље померања и пресечне силе

Кинематичке релације дефинисане су следећим изразима:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \phi_y(x, y)}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \phi_y(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial \phi_x(x, y)}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \phi_x(x, y)}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_x(x, y) + \frac{\partial w^0(x, y)}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \phi_y(x, y) + \frac{\partial w^0(x, y)}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Конститутивне једначине за хомоген, линеарно еластичан материјал су:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где је  $E$  Young-ов модул еластичности,  $G$  модул смицања и  $\nu$  Poisson-ов коефицијент. Напони изражени у функцији деформација на основу једначине (2.3) су:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из претпоставке да елемент управан на средњу раван током деформације не мења дужину ( $\varepsilon_z = 0$ ), добија се да је напон  $\sigma_z \neq 0$  ако је  $\nu \neq 0$ , што следи из једначина (2.3). То је у супротности са претпоставком да  $\sigma_z$  напони могу да се занемаре. Услов да симултано и деформација  $\varepsilon_z$  и напон  $\sigma_z$  буду једнаки нули је једна несагласност која постоји у Mindlin-овој теорији плоча.

Редукцијом напона на средњу раван добијају се изрази за пресечне силе:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz & \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Заменом израза (2.4) у (2.5) добија се:

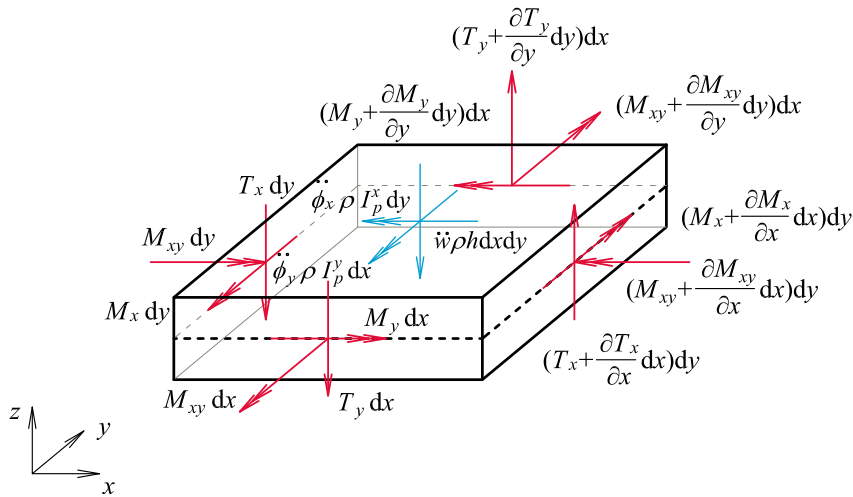
$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \end{Bmatrix} z dz & \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} &= G \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \\ M_{xy} &= G \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xy} z dz \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ако се у једначинама (2.6) деформације изразе на основу једначине (2.2), добијају се изрази за пресечне силе у функцији угиба и ротација:

$$\begin{aligned} M_x &= D \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) & T_x &= kGh \left( \frac{\partial w^o}{\partial x} + \phi_y \right) \\ M_y &= D \left( -\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) & T_y &= kGh \left( \frac{\partial w^o}{\partial y} - \phi_x \right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = D \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где је  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  крутост плоче на савијање.

## 2.1 Једначине кретања



Слика 2.2 – Силе које делују на диференцијално мали елемент

Једначине кретања, на основу Сlike 2.2, су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dx dy - \rho h \ddot{w} dx dy &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dx dy - T_x dx dy - \ddot{\phi}_y \rho I_p^y dy &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - T_y dx dy + \ddot{\phi}_x \rho I_p^x dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

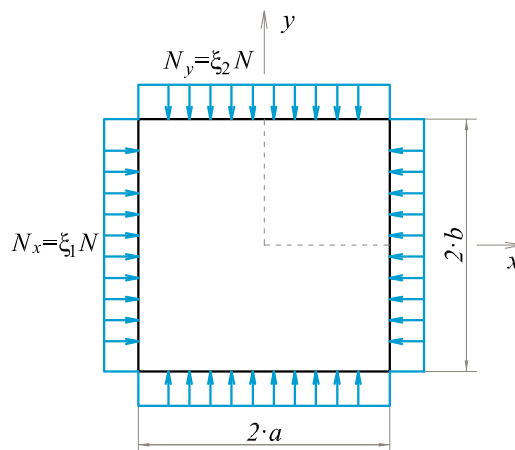
где је  $\rho$  густина материјала,  $I_p^x$  поларни момент инерције пресека око  $x$ -осе, односно  $I_p^y$  поларни момент инерције пресека око  $y$ -осе. Символ  $\ddot{\phantom{x}}$  означава други извод функције по времену.

Ако се пресечне силе у једначини (2.8) изразе преко померања, једначине (2.7), добија се следећи систем парцијалних диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} kGh \left( \frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w^o}{\partial t^2} &= 0 \\ D \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) - kGh \left( \frac{\partial w^o}{\partial x} + \phi_y \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} &= 0 \\ D \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + kGh \left( \frac{\partial w^o}{\partial y} - \phi_x \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Једначинама (2.9) је дефинисан проблем слободних вибрација Mindlin-ове плоче, при чему је ротациона инерција је узета у обзир.

## 2.2 Једначине еластичне стабилности



Слика 2.3 – Константне аксијалне силе у равни плоче

На Слици 2.3 је приказана правоугаона плоча у чијој средњој равни делују константне аксијалне силе. Услови равнотеже у том случају су (Ziegler, 1983):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} - N \left( \xi_1 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - T_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

У једначинама (2.10), за разлику од услова равнотеже за случај слободних вибрација, једначина (2.8), нема чланова који потичу од инерцијалних сила, али постоји додатни члан који потиче од аксијалне силе. Систем парцијалних диференцијалних једначина којима је дефинисан проблем еластичне стабилности Mindlin-ове плоче за константно аксијално оптерећење је:

$$\begin{aligned} kGh \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right) - N \left( \xi_1 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} \right) &= 0 \\ D \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) - kGh \left( \frac{\partial w^0}{\partial x} + \phi_y \right) &= 0 \\ D \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + kGh \left( \frac{\partial w^0}{\partial y} - \phi_x \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Једначинама (2.11) је обухваћен случај једноаксијалног,  $\xi_1 = 0$  или  $\xi_2 = 0$ , као и двоаксијалног,  $\xi_1 \neq 0$  и  $\xi_2 \neq 0$ , напрезања у равни.

### 2.3 Једначине кретања плоче оптерећене аксијалним силама

У пракси, статичко оптерећење доводи до појаве унутрашњих сила (напона) у конструкцији, које значајно утичу на њене динамичке карактеристике. Број напонских стања услед статичког оптерећења је неограничен. Применом *метода динамичке крутости* је могућа анализа вибрација за константно и скоковито променљиво иницијално поље напона.

Систем парцијалних диференцијалних једначина којима је дефинисан проблем слободних вибрација Mindlin-ове плоче која је оптерећена константним аксијалним силама је:

$$\begin{aligned}
 & kGh \left( \frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w^o}{\partial t^2} - N \left( \xi_1 \frac{\partial^2 w^o}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 w^o}{\partial y^2} \right) = 0 \\
 & D \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} \right) - kGh \left( \frac{\partial w^o}{\partial x} + \phi_y \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} = 0 \\
 & D \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) + kGh \left( \frac{\partial w^o}{\partial y} - \phi_x \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Овај систем ПДЈ има чланове који потичу и од инерцијалних и од аксијалних сила. Усвојено је да интензитет сила  $N_x$  и  $N_y$ , Слика 2.3, не зависи од времена  $t$ , нити од угиба  $w$ . Ове претпоставке су усвојене да би се посматрале слободне, а не принудне вибрације, као и да би једначине кретања остале линеарне. Претпоставка да силе у равни не зависе од угиба може да се усвоји ако су (Leissa, 1969):

- гранични услови такви да не спречавају померања у равни,
- угиби довољно мали тако да су силе у равни услед деформације занемарљиве у поређењу са почетним силама затезања, односно притиска.

### 3 КОНТИНУАЛНИ ЕЛЕМЕНТ ПРАВОУГАОНЕ MINDLIN-ОВЕ ПЛОЧЕ ЗА АНАЛИЗУ ВИБРАЦИЈА И ИЗБОЧАВАЊА

#### 3.1 Опште решење проблема слободних вибрација

Решење система парцијалних диференцијалних једначина (2.9) је претпостављено у хармонијском облику:

$$w^0(x, y, t) = \hat{w}(x, y)e^{i\omega t} \quad \phi_y(x, y, t) = \hat{\phi}_y(x, y)e^{i\omega t} \quad \phi_x(x, y, t) = \hat{\phi}_x(x, y)e^{i\omega t} \quad (3.1)$$

где  $\omega$  означава кружна фреквенцију. Заменом (3.1) у (2.9) и елиминисањем времена добија се:

$$\begin{aligned} kGh \left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial \hat{\phi}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) + \rho h \omega^2 \hat{w} &= 0 \\ D \left( \frac{\partial^2 \hat{\phi}_y}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_y}{\partial y^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_x}{\partial x \partial y} \right) - kGh \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \hat{\phi}_y \right) + \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \hat{\phi}_y &= 0 \quad (3.2) \\ D \left( \frac{\partial^2 \hat{\phi}_x}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_x}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_y}{\partial x \partial y} \right) + kGh \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} - \hat{\phi}_x \right) + \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \hat{\phi}_x &= 0 \end{aligned}$$

Да би се решио систем једначина (3.2) уводи се *напонска функција*  $\hat{\psi}$  (*boundary-layer function*) (Nosier and Reddy 1991):

$$\hat{\psi} = \frac{\partial \hat{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_y}{\partial y} \quad (3.3)$$

Када се друга једначина (3.2) диференцира по  $y$ , односно трећа једначина (3.2) диференцира по  $x$ , и саберу се, добија се:

$$D \frac{1-\nu}{2} \nabla \hat{\psi} - kGh \hat{\psi} + \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \hat{\psi} = 0 \quad (3.4)$$

где је  $\nabla = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  Лапласов оператор. Диференцирањем друге једначине (3.2) по  $x$ , односно трећа по  $y$ , и њиховим одузимањем, добија се:

$$-D \nabla \Gamma + kGh \nabla \hat{w} + \left( kGh - \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \right) \Gamma = 0 \quad (3.5)$$

где је  $\Gamma = \partial \hat{\phi}_y / \partial x - \partial \hat{\phi}_x / \partial y$ . Увођењем помоћне функције  $\Gamma$ , прва једначина (3.2) може да се запише на следећи начин:

$$kGh \nabla \hat{w} + kGh \Gamma + \rho h \omega^2 \hat{w} = 0 \quad (3.6)$$

Једначина (3.6), после диференцирања Лапласовим оператором постаје:

$$kGh\nabla\nabla\hat{w} + kGh\nabla\Gamma + \rho h\omega^2\nabla\hat{w} = 0 \quad (3.7)$$

Ако се из једначина (3.6) и (3.7)  $\Gamma$  и  $\nabla\Gamma$  изразе у функцији угиба  $\hat{w}$  и замене у једначину (3.5), добија се следећа једначина:

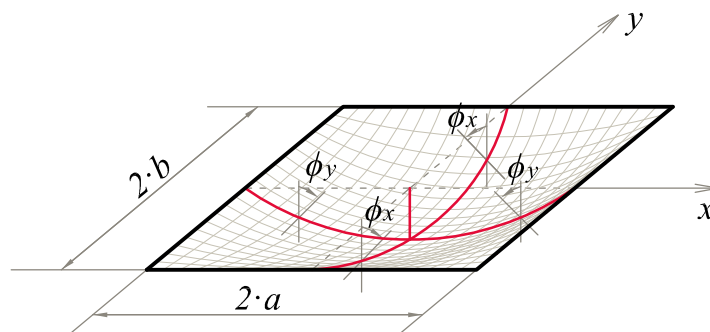
$$\nabla\nabla\hat{w} + \left(\frac{\rho}{kG} + \frac{1}{D} \frac{\rho h^3}{12}\right)\omega^2\nabla\hat{w} + \frac{\rho h\omega^2}{D} \left(\frac{\rho h^3}{12} \frac{\omega^2}{kGh} - 1\right)\hat{w} = 0 \quad (3.8)$$

На овај начин је проблем слободних вибрација Mindlin-ове плоче дефинисан, уместо системом три спрегнуте ПДЈ (3.2), са две међусобно независне ПДЈ (3.4) и (3.8). Када су одређене функција угиба  $\hat{w}$  и напонска функција  $\hat{\psi}$ , ротације  $\hat{\phi}_y$  и  $\hat{\phi}_x$  могу да се одреде из друге, односно из треће једначине (3.2):

$$\begin{aligned} \left(kGh - \frac{\rho h^3}{12}\omega^2\right)\hat{\phi}_y &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(D\nabla\hat{w} + D\frac{\rho\omega^2}{kG}\hat{w} + kGh\hat{w}\right) + D\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y} \\ \left(kGh - \frac{\rho h^3}{12}\omega^2\right)\hat{\phi}_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left(D\nabla\hat{w} + D\frac{\rho\omega^2}{kG}\hat{w} + kGh\hat{w}\right) + D\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Опште решење проблема слободних вибрација може да се добије применом метода суперпозиције (Gorman and Wei, 1996). Његова елеганција и логика су га учиниле веома атрактивним методом за добијање тачних аналитичких решења вибрација плоче. Произвољна деформација плоче може да се представи као збир четири деформације које су:

- симетрична око  $x$ -осе и око  $y$ -осе -  $SS$ ,
- антисиметрична око  $x$ -осе, а симетрична око  $y$ -осе -  $SA$ ,
- симетрична око  $x$ -осе, а антисиметрична око  $y$ -осе -  $AS$ ,
- антисиметрична и око  $x$ -осе и око  $y$ -осе -  $AA$ .



Слика 3.1 -  $SS$  деформација плоче



На Слици 3.1 је приказан  $SS$  деформисани облик плоче. Координатни систем је постављен у средини плоче.

Метод суперпозиције омогућава да се решења за угиб и ротације усвоје у следећем облику:

$$\begin{aligned}\hat{w}(x, y) &= \hat{w}^{SS}(x, y) + \hat{w}^{SA}(x, y) + \hat{w}^{AS}(x, y) + \hat{w}^{AA}(x, y) \\ \hat{\phi}_y(x, y) &= \hat{\phi}_y^{SS}(x, y) + \hat{\phi}_y^{SA}(x, y) + \hat{\phi}_y^{AS}(x, y) + \hat{\phi}_y^{AA}(x, y) \\ \hat{\phi}_x(x, y) &= \hat{\phi}_x^{SS}(x, y) + \hat{\phi}_x^{SA}(x, y) + \hat{\phi}_x^{AS}(x, y) + \hat{\phi}_x^{AA}(x, y)\end{aligned}\quad (3.10)$$

Овим је омогућена анализа само четвртине посматране правоугаоне плоче. Непознате функције су одређене за сваки од четири случаја симетрије, при чему је решење за случај  $AS$  исто као за случај  $SA$  када ротације  $\hat{\phi}_y$  и  $\hat{\phi}_x$ , као и координате  $x$  и  $y$ , замене место.

### 3.1.1 Двострука симетрија $SS$

Да би се задовољио услов двоструке симетрије, као и једначине (3.9), функције угиба  $\hat{w}^{SS}$ , ротација  $\hat{\phi}_y^{SS}$  и  $\hat{\phi}_x^{SS}$  и напонска функција  $\hat{\psi}^{SS}$  су усвојене у следећем облику:

$$\begin{aligned}\hat{w}^{SS}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \overset{SS1}{^1W_m^{SS}(y) \cos(\alpha_m x)} + \sum_{m=0}^M \overset{SS2}{^2W_m^{SS}(x) \cos(\beta_m y)} \dots\dots(1) \\ \hat{\phi}_y^{SS}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \overset{SS1}{^1\Phi_{ym}^{SS}(y) \sin(\alpha_m x)} + \sum_{m=0}^M \overset{SS2}{^2\Phi_{ym}^{SS}(x) \cos(\beta_m y)} \dots\dots(2) \\ \hat{\phi}_x^{SS}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \overset{SS1}{^1\Phi_{xm}^{SS}(y) \cos(\alpha_m x)} + \sum_{m=1}^M \overset{SS2}{^2\Phi_{xm}^{SS}(x) \sin(\beta_m y)} \dots\dots(3) \\ \hat{\psi}^{SS}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \overset{SS1}{^1\Psi_m^{SS}(y) \sin(\alpha_m x)} + \sum_{m=1}^M \overset{SS2}{^2\Psi_m^{SS}(x) \sin(\beta_m y)} \dots\dots(4)\end{aligned}\quad (3.11)$$

где је  $\alpha_m = m\pi / a$  и  $\beta_m = m\pi / b$ . На основу деформисаног облика (Слика 3.1), као и једначине (3.9), може да се закључи да су функције  $^1W_m^{SS}(y)$ ,  $^2W_m^{SS}(x)$ ,  $^1\Phi_{ym}^{SS}(y)$  и  $^2\Phi_{xm}^{SS}(x)$  парне, односно  $^2\Phi_{ym}^{SS}(x)$ ,  $^1\Phi_{xm}^{SS}(y)$ ,  $^1\Psi_m^{SS}(y)$  и  $^2\Psi_m^{SS}(x)$  непарне. Уношењем  $SS1$  дела једначине (3.11)-(1) у једначину (3.8) добија се:

$$\frac{d^4 {}^1W_m^{SS}(y)}{dy^4} + (c_1 - 2\alpha_m^2) \frac{d^2 {}^1W_m^{SS}(y)}{dy^2} + (\alpha_m^4 - c_1\alpha_m^2 + c_2) {}^1W_m^{SS}(y) = 0 \quad (3.12)$$

где су:

$$c_1 = \left( \frac{\rho}{kG} + \frac{\rho h^3}{12D} \right) \omega^2 \quad c_2 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \left( \frac{\rho h^3 \omega^2}{12kGh} - 1 \right) \quad (3.13)$$

Решење једначине (3.12) је усвојено у облику  ${}^1W_m^{SS}(y) = e^{r_m^{SS}y}$  и добијена је карактеристична једначина:

$$\left({}^1r_m^{SS}\right)^4 + {}^1a_{1,m}^{SS}\left({}^1r_m^{SS}\right)^2 + {}^1a_{2,m}^{SS} = 0 \quad (3.14)$$

чији су коефицијенти једнаки:  ${}^1a_{1,m}^{SS} = c_1 - 2\alpha_m^2$  и  ${}^1a_{2,m}^{SS} = \alpha_m^4 - c_1\alpha_m^2 + c_2$ . Корени једначине (3.14) су означени са:  ${}^1r_{1,m}^{SS}$ ,  $-{}^1r_{1,m}^{SS}$ ,  ${}^1r_{2,m}^{SS}$  и  $-{}^1r_{2,m}^{SS}$ , док је решење за непознату функцију:

$${}^1W_m^{SS}(y) = \boxed{{}^1\bar{A}_{1,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{1,m}^{SS}y\right)} + {}^1\bar{A}_{2,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{1,m}^{SS}y\right) + \boxed{{}^1\bar{A}_{3,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{2,m}^{SS}y\right)} + {}^1\bar{A}_{4,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{2,m}^{SS}y\right) \quad (3.15)$$

Заменом SS1 дела једначине (3.11)-(4) у (3.4) добија се обична диференцијална једначина:

$$\frac{d^2 {}^1\Psi_m^{SS}(y)}{dy^2} + {}^1a_{3,m}^{SS} {}^1\Psi_m^{SS}(y) = 0 \quad (3.16)$$

чија је одговарајућа карактеристична једначина:

$$\left({}^1r_m^{SS}\right)^2 + {}^1a_{3,m}^{SS} = 0 \quad (3.17)$$

где су:  ${}^1a_{3,m}^{SS} = c_3 - \alpha_m^2$  и  $c_3 = \frac{\rho h^3 \omega^2 - 12kGh}{6D(1-\nu)}$ . Корени једначине (3.17) су

означени са:  ${}^1r_{3,m}^{SS}$  и  $-{}^1r_{3,m}^{SS}$ , а решење за напонску функцију је:

$${}^1\Psi_m^{SS}(y) = {}^1\bar{A}_{5,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{3,m}^{SS}y\right) + {}^1\bar{A}_{6,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{3,m}^{SS}y\right) \quad (3.18)$$

Када се изрази (3.15) и (3.18) замене у једначину (3.9) добијају се изрази за ротације:

$$\begin{aligned} {}^1\Phi_{ym}^{SS}(y) &= \boxed{{}^1\bar{\delta}_{1,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{1,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{1,m}^{SS}y\right)} + {}^1\bar{\delta}_{2,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{2,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{1,m}^{SS}y\right) \\ &+ \boxed{{}^1\bar{\delta}_{3,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{3,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{2,m}^{SS}y\right)} + {}^1\bar{\delta}_{4,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{4,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{2,m}^{SS}y\right) \\ &+ \boxed{{}^1\bar{\delta}_{5,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{5,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{3,m}^{SS}y\right)} + {}^1\bar{\delta}_{6,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{6,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{3,m}^{SS}y\right) \\ {}^1\Phi_{xm}^{SS}(y) &= \boxed{{}^1\bar{\gamma}_{1,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{1,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{1,m}^{SS}y\right)} + {}^1\bar{\gamma}_{2,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{2,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{1,m}^{SS}y\right) \\ &+ \boxed{{}^1\bar{\gamma}_{3,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{3,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{2,m}^{SS}y\right)} + {}^1\bar{\gamma}_{4,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{4,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{2,m}^{SS}y\right) \\ &+ \boxed{{}^1\bar{\gamma}_{5,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{5,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{3,m}^{SS}y\right)} + {}^1\bar{\gamma}_{6,m}^{SS} {}^1\bar{A}_{6,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{3,m}^{SS}y\right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

На основу закључка да су функције  ${}^1W_m^{SS}(y)$  и  ${}^1\Phi_{ym}^{SS}(y)$  парне, односно  ${}^1\Phi_{xm}^{SS}(y)$  непарна, задржава се само означени део решења из једначина (3.15) и (3.19). Уз преименовање константи:

$$\begin{aligned} {}^1\bar{A}_{1,m}^{SS} &= {}^1A_{1,m}^{SS} & {}^1\bar{\delta}_{1,m}^{SS} &= {}^1\delta_{1,m}^{SS} & {}^1\bar{\gamma}_{1,m}^{SS} &= {}^1\gamma_{1,m}^{SS} \\ {}^1\bar{A}_{3,m}^{SS} &= {}^1A_{2,m}^{SS} & {}^1\bar{\delta}_{3,m}^{SS} &= {}^1\delta_{2,m}^{SS} & {}^1\bar{\gamma}_{3,m}^{SS} &= {}^1\gamma_{2,m}^{SS} \\ {}^1\bar{A}_{5,m}^{SS} &= {}^1A_{3,m}^{SS} & {}^1\bar{\delta}_{5,m}^{SS} &= {}^1\delta_{3,m}^{SS} & {}^1\bar{\gamma}_{5,m}^{SS} &= {}^1\gamma_{3,m}^{SS} \end{aligned} \quad (3.20)$$

решење за SS1 део може да се запише на следећи начин:

$$\begin{aligned} {}^1\hat{w}^{SS}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left[ \sum_{i=1}^2 {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS}y) \right] \cos(\alpha_m x) \\ {}^1\hat{\phi}_y^{SS}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\delta_{i,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS}y) \right] \sin(\alpha_m x) \\ {}^1\hat{\phi}_x^{SS}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\gamma_{i,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS}y) \right] \cos(\alpha_m x) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Изрази за коефицијенте  ${}^1\delta_{i,m}^{SS}$  и  ${}^1\gamma_{i,m}^{SS}$  су:

$$\begin{aligned} {}^1\delta_{i,m}^{SS} &= \frac{12\alpha_m \left\{ kG \left[ kGh + D \left( ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 - \alpha_m^2 \right) \right] + D\rho\omega^2 \right\}}{kGh(12kG - \rho h^2 \omega^2)} \\ {}^1\gamma_{i,m}^{SS} &= \frac{12{}^1r_{i,m}^{SS} \left\{ kG \left[ kGh + D \left( ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 - \alpha_m^2 \right) \right] + D\rho\omega^2 \right\}}{kGh(12kG - \rho h^2 \omega^2)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$i = 1, 2$

$${}^1\delta_{3,m}^{SS} = \frac{6D{}^1r_{3,m}^{SS}(1-\nu)}{12kGh - \rho h^3 \omega^2} \quad {}^1\gamma_{3,m}^{SS} = \frac{6D\alpha_m(1-\nu)}{12kGh - \rho h^3 \omega^2}$$

Када је  $m = 0$ , једначина (3.16) је идентички задовољена, пошто је *напонска функција*  $\hat{\psi}^{SS}$  усвојена у облику синусног реда који нема нулти члан, док једначина (3.12) постаје:

$$\frac{d^4 {}^1W_0^{SS}(y)}{dy^4} + c_1 \frac{d^2 {}^1W_0^{SS}(y)}{dy^2} + c_2 = 0 \quad (3.23)$$

Карактеристична једначина једначине (3.23) је:

$$\left( {}^1r_0^{SS} \right)^4 + c_1 \left( {}^1r_0^{SS} \right)^2 + c_2 = 0 \quad (3.24)$$

Корени једначине (3.24) су означени са:  ${}^1r_{1,0}^{SS}$ ,  $-{}^1r_{1,0}^{SS}$ ,  ${}^1r_{2,0}^{SS}$  и  $-{}^1r_{2,0}^{SS}$ , док је решење за нулти члан функције угиба за SS1 део једнако:

$${}^1W_0^{SS}(y) = \boxed{{}^1\bar{A}_{1,0}^{SS} \cosh({}^1r_{1,0}^{SS} y)} + {}^1\bar{A}_{2,0}^{SS} \sinh({}^1r_{1,0}^{SS} y) + {}^1\bar{A}_{3,0}^{SS} \cosh({}^1r_{2,0}^{SS} y) + {}^1\bar{A}_{4,0}^{SS} \sinh({}^1r_{2,0}^{SS} y) \quad (3.25)$$

Задржава се само означени, парни део решење, а константе се преименују на следећи начин:  ${}^1\bar{A}_{1,0}^{SS} = {}^1A_{1,0}^{SS}$  и  ${}^1\bar{A}_{3,0}^{SS} = {}^1A_{2,0}^{SS}$ . Да би се одредила непозната функција обртања  ${}^1\Phi_{x0}^{SS}(y)$ , посматра се систем једначина (3.2) који за  $m = 0$  постаје:

$$kGh \left( -\frac{d\hat{\phi}_x}{dy} + \frac{d^2\hat{w}}{dy^2} \right) + \rho h \omega^2 \hat{w} = 0 \quad (3.26)$$

$$D \frac{d^2\hat{\phi}_x}{dy^2} + kGh \left( \frac{d\hat{w}}{dy} - \hat{\phi}_x \right) + \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \hat{\phi}_x = 0$$

Израз за обртање  $\hat{\phi}_x$ , када је одређен израз за угиб  $\hat{w}$ , једначина (3.25), може да се одреди из прве једначине (3.26):

$${}^1\Phi_{x0}^{SS}(y) = \sum_{i=1}^2 {}^1\gamma_{i,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \sinh({}^1r_{i,0}^{SS} y) \quad (3.27)$$

Израз за коефицијент  ${}^1\gamma_{i,0}^{SS}$  је:

$${}^1\gamma_{i,0}^{SS} = \frac{\left( {}^1r_{i,0}^{SS} \right)^2 + \frac{\rho \omega^2}{kG}}{{}^1r_{i,0}^{SS}}, \quad i = 1, 2 \quad (3.28)$$

Да би се добило укупно решење за SS случај, SS2 део решења (3.11) треба да се узме у прорачун по већ описаном поступку.

Укупно решење за SS је:

$$\hat{w}^{SS}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \left[ {}^1A_{i,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} y) + {}^2A_{i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} x) \right] + \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^2 {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \left[ \sum_{i=1}^2 {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] \cos(\beta_m y) \right\} \quad (3.29)$$

$$\hat{\phi}_y^{SS}(x, y) = \sum_{i=1}^2 {}^2\delta_{i,0}^{SS} {}^2A_{i,0}^{SS} \sinh({}^2r_{i,0}^{SS} x) + \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\delta_{i,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] \sin(\alpha_m x) + \\ & \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2\delta_{i,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] \cos(\beta_m y) \end{aligned} \right\}$$

$$\hat{\phi}_x^{SS}(x, y) = \sum_{i=1}^2 {}^1\gamma_{i,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \sinh({}^1r_{i,0}^{SS} y) + \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\gamma_{i,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \\ & \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2\gamma_{i,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] \sin(\beta_m y) \end{aligned} \right\}$$

где су одговарајуће карактеристичне једначине и коефицијенти  ${}^2\delta_{i,m}^{SS}$  и  ${}^2\gamma_{i,m}^{SS}$  за SS2 део дати следећим изразима:

$$\begin{aligned} ({}^2r_m^{SS})^4 + {}^2a_{1,m}^{SS} ({}^2r_m^{SS})^2 + {}^2a_{2,m}^{SS} &= 0 & ({}^2r_m^{SS})^2 + {}^2a_{3,m}^{SS} &= 0 \\ {}^2a_{1,m}^{SS} &= c_1 - 2\beta_m^2 & {}^2a_{3,m}^{SS} &= c_3 - \beta_m^2 \\ {}^2a_{2,m}^{SS} &= \beta_m^4 - c_1\beta_m^2 + c_2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} {}^2\delta_{i,0}^{SS} &= -\left( ({}^2r_{i,0}^{SS})^2 + \rho\omega^2/kG \right) / {}^2r_{i,0}^{SS} \\ {}^2\delta_{i,m}^{SS} &= -\frac{12 {}^2r_{i,m}^{SS} \left\{ kG \left[ kGh + D \left( ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 - \beta_m^2 \right) \right] + D\rho\omega^2 \right\}}{kGh(12kG - \rho h^2 \omega^2)} \\ {}^2\gamma_{i,m}^{SS} &= -\frac{12\beta_m \left\{ kG \left[ kGh + D \left( ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 - \beta_m^2 \right) \right] + D\rho\omega^2 \right\}}{kGh(12Gk - \rho h^2 \omega^2)}, i=1,2 \\ {}^2\delta_{3,m}^{SS} &= \frac{6D\beta_m(1-\nu)}{12kGh - \rho h^3 \omega^2} \quad {}^2\gamma_{3,m}^{SS} = \frac{6D^2 r_{3,m}^{SS}(1-\nu)}{12kGh - \rho h^3 \omega^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Карактеристична једначина за нулти члан реда,  $m = 0$ , за SS2 део је иста као за SS1 део, једначина (3.24), само што корени имају сад горњи леви индекс <sup>2</sup> уместо <sup>1</sup>. Заменом израза (3.29) у једначину (2.7) добијају се изрази за пресечне силе за случај SS:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_x^{SS}(x, y) &= \sum_{i=1}^2 \left( {}^1M_{xi,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} y) + {}^2M_{xi,0}^{SS} {}^2A_{i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} x) \right) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{xi,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{xi,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] \cos(\beta_m y) \right\} \\
 \hat{M}_y^{SS}(x, y) &= \sum_{i=1}^2 \left( {}^1M_{yi,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} y) + {}^2M_{yi,0}^{SS} {}^2A_{i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} x) \right) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{yi,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{yi,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] \cos(\beta_m y) \right\} \\
 \hat{M}_{xy}^{SS}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{xyi,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] \sin(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{xyi,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] \sin(\beta_m y) \right\} \\
 T_x^{SS}(x, y) &= \sum_{i=1}^2 {}^2T_{xi,0}^{SS} {}^2A_{i,0}^{SS} \sinh({}^2r_{i,0}^{SS} x) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1T_{xi,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] \sin(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2T_{xi,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] \cos(\beta_m y) \right\} \\
 \hat{T}_y^{SS}(x, y) &= \sum_{i=1}^2 {}^1T_{yi,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \sinh({}^1r_{i,0}^{SS} y) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1T_{yi,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2T_{yi,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] \sin(\beta_m y) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

где су:

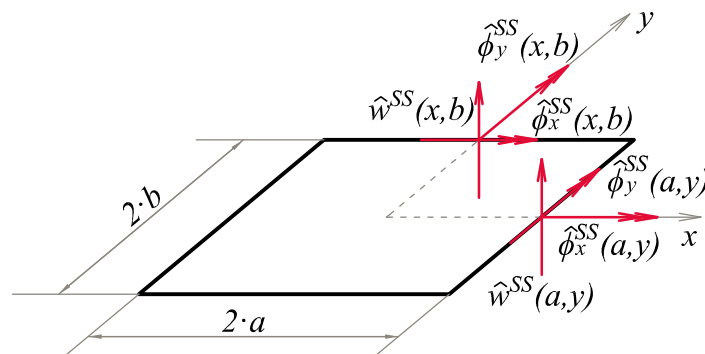
$$\begin{aligned}
 {}^1M_{xi,0}^{SS} &= -\nu D {}^1r_{i,0}^{SS} {}^1\gamma_{i,0}^{SS} & {}^2M_{xi,0}^{SS} &= D {}^2r_{i,0}^{SS} {}^2\delta_{i,0}^{SS} \\
 {}^1M_{xi,m}^{SS} &= D (\alpha_m {}^1\delta_{i,m}^{SS} - \nu {}^1r_{i,m}^{SS} {}^1\gamma_{i,m}^{SS}) & {}^2M_{xi,m}^{SS} &= D ({}^2r_{i,m}^{SS} {}^2\delta_{i,m}^{SS} - \nu \beta_m {}^2\gamma_{i,m}^{SS}) \\
 {}^1M_{yi,0}^{SS} &= -D {}^1r_{i,0}^{SS} {}^1\gamma_{i,0}^{SS} & {}^2M_{yi,0}^{SS} &= D \nu {}^2r_{i,0}^{SS} {}^2\delta_{i,0}^{SS} \\
 {}^1M_{yi,m}^{SS} &= D (\nu \alpha_m {}^1\delta_{i,m}^{SS} - {}^1r_{i,m}^{SS} {}^1\gamma_{i,m}^{SS}) & {}^2M_{yi,m}^{SS} &= D (\nu {}^2r_{i,m}^{SS} {}^2\delta_{i,m}^{SS} - \beta_m {}^2\gamma_{i,m}^{SS}) \\
 {}^1M_{xyi,m}^{SS} &= D \frac{1-\nu}{2} ({}^1r_{i,m}^{SS} {}^1\delta_{i,m}^{SS} + \alpha_m {}^1\gamma_{i,m}^{SS}) & {}^2M_{xyi,m}^{SS} &= D \frac{1-\nu}{2} (-\beta_m {}^2\delta_{i,m}^{SS} - {}^2\gamma_{i,m}^{SS} {}^2r_{i,m}^{SS}) \\
 {}^2T_{xi,0}^{SS} &= khG ({}^2r_{i,0}^{SS} + {}^2\delta_{i,0}^{SS}) \\
 \left. \begin{aligned} {}^1T_{xi,m}^{SS} &= khG ({}^1\delta_{i,m}^{SS} - \alpha_m) \\ {}^1T_{x3,m}^{SS} &= khG {}^1\delta_{3,m}^{SS} \end{aligned} \right\} & \left. \begin{aligned} {}^2T_{xi,m}^{SS} &= khG ({}^2r_{i,m}^{SS} + {}^2\delta_{i,m}^{SS}) \\ {}^2T_{x3,m}^{SS} &= khG {}^2\delta_{3,m}^{SS} \end{aligned} \right\} & (3.33) \\
 {}^1T_{yi,0}^{SS} &= khG ({}^1r_{i,0}^{SS} - {}^1\gamma_{i,0}^{SS}) \\
 \left. \begin{aligned} {}^1T_{yi,m}^{SS} &= khG ({}^1r_{i,m}^{SS} - {}^1\gamma_{i,m}^{SS}) \\ {}^1T_{y3,m}^{SS} &= khG (-{}^1\gamma_{3,m}^{SS}) \end{aligned} \right\} & \left. \begin{aligned} {}^2T_{yi,m}^{SS} &= khG (-\beta_m - {}^2\gamma_{i,m}^{SS}) \\ {}^2T_{y3,m}^{SS} &= khG (-{}^2\gamma_{3,m}^{SS}) \end{aligned} \right\} \\
 i &= 1, 2, (3)
 \end{aligned}$$

### 3.1.1.1 Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS}$

❖ Вектор померања  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$

Вектор померања  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$ , једначина (3.34), садржи померања и ротације контура плоче  $x=a$  и  $y=b$ , која су приказана на Слици 3.2 и дата изразима (3.35).

$$(\hat{\mathbf{q}}^{SS})^T = [\hat{w}^{SS}(a, y) \quad \hat{\phi}_y^{SS}(a, y) \quad \hat{\phi}_x^{SS}(a, y) \quad \hat{w}^{SS}(x, b) \quad \hat{\phi}_x^{SS}(x, b) \quad \hat{\phi}_y^{SS}(x, b)]_{1 \times 6} \quad (3.34)$$



Слика 3.2 - Померања и ротације контура плоче  $x=a$  и  $y=b$

$$\begin{aligned}
 \hat{w}^{SS}(a, y) &= \sum_{i=1}^2 \left[ {}^1A_{i,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} y) + {}^2A_{i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} a) \right] + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^2 {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] (-1)^m + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^2 {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} a) \right] \cos(\beta_m y) \right\} \\
 \hat{\phi}_y^{SS}(a, y) &= \sum_{i=1}^2 {}^2\delta_{i,0}^{SS} {}^2A_{i,0}^{SS} \sinh({}^2r_{i,0}^{SS} a) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2\delta_{i,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} a) \right] \cos(\beta_m y) \right\} \\
 \hat{\phi}_x^{SS}(a, y) &= \sum_{i=1}^2 {}^1\gamma_{i,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \sinh({}^1r_{i,0}^{SS} y) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\gamma_{i,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] (-1)^m + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2\gamma_{i,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} a) \right] \sin(\beta_m y) \right\} \\
 \hat{w}^{SS}(x, b) &= \sum_{i=1}^2 \left( {}^1A_{i,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} b) + {}^2A_{i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} x) \right) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^2 {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} b) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^2 {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] (-1)^m \right\} \\
 \hat{\phi}_x^{SS}(x, b) &= \sum_{i=1}^2 {}^1\gamma_{i,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \sinh({}^1r_{i,0}^{SS} b) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\gamma_{i,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} b) \right] \cos(\alpha_m x) \right\} \\
 \hat{\phi}_y^{SS}(x, b) &= \sum_{i=1}^2 {}^2\delta_{i,0}^{SS} {}^2A_{i,0}^{SS} \sinh({}^2r_{i,0}^{SS} x) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\delta_{i,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} b) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2\delta_{i,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] (-1)^m \right\}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Као што се види из једначине (3.35), компоненте вектора  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$  су функције  $x$ , односно  $y$  координате. Из тог разлога, није могуће да се успостави директна веза између вектора  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$  и вектора  $\mathbf{C}^{SS}$ , који садржи непознате интеграционе константе у решењу (3.29).



Проблем може да се реши ако се померања и ротације контура плоче апроксимирају помоћу *Fourier*-овог реда:

$$\begin{aligned}\hat{w}^{SS}(a, y) &\approx \sum_{n=0}^M {}^x W_n^{SS} \cos(\beta_n y) & \hat{w}^{SS}(x, b) &\approx \sum_{n=0}^M {}^y W_n^{SS} \cos(\alpha_n x) \\ \hat{\phi}_y^{SS}(a, y) &\approx \sum_{n=0}^M {}^x \Phi_{yn}^{SS} \cos(\beta_n y) & \hat{\phi}_x^{SS}(x, b) &\approx \sum_{n=0}^M {}^y \Phi_{xn}^{SS} \cos(\alpha_n x) \\ \hat{\phi}_x^{SS}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x \Phi_{xn}^{SS} \sin(\beta_n y) & \hat{\phi}_y^{SS}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^y \Phi_{yn}^{SS} \sin(\alpha_n x)\end{aligned}\quad (3.36)$$

где је  $\alpha_n = n\pi / a$  и  $\beta_n = n\pi / b$ . *Fourier*-ови коефицијенти се одређују на добро познат начин, нпр. израз за одређивање коефицијента  ${}^x W_n^{SS}$  је:

$$\begin{aligned}{}^x W_n^{SS} &= \frac{1}{b} \int_{-b}^b \hat{w}^{SS}(a, y) \cos(\beta_n y) dy = \\ &= \frac{1}{b} \int_{-b}^b \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[ {}^1 A_{i,0}^{SS} \cosh({}^1 r_{i,0}^{SS} y) + {}^2 A_{i,0}^{SS} \cosh({}^2 r_{i,0}^{SS} a) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^2 {}^1 A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1 r_{i,m}^{SS} y) \right] (-1)^m + \left[ \sum_{i=1}^2 {}^2 A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2 r_{i,m}^{SS} a) \right] \cos(\beta_m y) \right\} \right\} \cos(\beta_n y) dy\end{aligned}\quad (3.37)$$

Уместо вектора  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$  уводи се вектор "пројекције померања"  $\tilde{\mathbf{q}}^{SS}$  чије су компоненте *Fourier*-ови коефицијенти у једначини (3.36). Сада је могуће да се успостави веза између вектора "пројекције померања"  $\tilde{\mathbf{q}}^{SS}$  и вектора интеграционих константи  $\mathbf{C}^{SS}$ :

$$\tilde{\mathbf{q}}^{SS} = \tilde{\mathbf{D}}^{SS} \mathbf{C}^{SS} \quad (3.38)$$

где су:

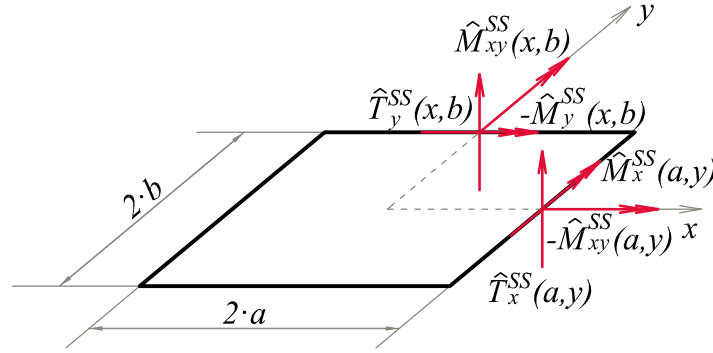
$$\begin{aligned}(\tilde{\mathbf{q}}^{SS})^T &= \begin{bmatrix} {}^x W_0^{SS} & {}^x \Phi_{y0}^{SS} & {}^y W_0^{SS} & {}^y \Phi_{x0}^{SS} & \dots \\ \dots & {}^x W_n^{SS} & {}^x \Phi_{yn}^{SS} & {}^x \Phi_{xn}^{SS} & {}^y W_n^{SS} & {}^y \Phi_{xn}^{SS} & {}^y \Phi_{yn}^{SS} & \dots \\ \dots & {}^x W_M^{SS} & {}^x \Phi_{yM}^{SS} & {}^x \Phi_{xM}^{SS} & {}^y W_M^{SS} & {}^y \Phi_{xM}^{SS} & {}^y \Phi_{yM}^{SS} \end{bmatrix}_{1 \times (6M+4)} \\ (\mathbf{C}^{SS})^T &= \begin{bmatrix} {}^1 A_{1,0}^{SS} & {}^1 A_{2,0}^{SS} & {}^2 A_{1,0}^{SS} & {}^2 A_{2,0}^{SS} & \dots \\ \dots & {}^1 A_{1,m}^{SS} & {}^1 A_{2,m}^{SS} & {}^1 A_{3,m}^{SS} & {}^2 A_{1,m}^{SS} & {}^2 A_{2,m}^{SS} & {}^2 A_{3,m}^{SS} & \dots \\ \dots & {}^1 A_{1,M}^{SS} & {}^1 A_{2,M}^{SS} & {}^1 A_{3,M}^{SS} & {}^2 A_{1,M}^{SS} & {}^2 A_{2,M}^{SS} & {}^2 A_{3,M}^{SS} \end{bmatrix}_{1 \times (6M+4)}\end{aligned}\quad (3.39)$$

Да би матрица  $\tilde{\mathbf{D}}^{SS}$  била квадратна, потребно је да број чланова реда у једначинама (3.36) и (3.11) буде исти. Ред матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{SS}$  је  $6M+4$  и она је дата у Прилогу.

❖ Вектор сила  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$

Вектор сила  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$  садржи трансверзалне силе и моменте на контурама плоче  $x = a$  и  $y = b$ , Слика 3.3, и дефинисан је следећим изразом:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{Q}}^{SS})^T = & \left[ \hat{T}_x^{SS}(a, y) \quad \hat{M}_x^{SS}(a, y) \quad -\hat{M}_{xy}^{SS}(a, y) \quad \dots \right. \\ & \left. \dots \quad \hat{T}_y^{SS}(x, b) \quad -\hat{M}_y^{SS}(x, b) \quad \hat{M}_{xy}^{SS}(x, b) \right]_{1 \times 6} \end{aligned} \quad (3.40)$$



Слика 3.3 - Пресечне силе на контурама плоче  $x = a$  и  $y = b$

Компоненте вектора  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$  на основу једначине (3.32) су:

$$\begin{aligned} \hat{T}_x^{SS}(a, y) = & \sum_{i=1}^2 {}^2T_{xi,0}^{SS} {}^2A_{i,0}^{SS} \sinh({}^2r_{i,0}^{SS} a) + \\ & \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2T_{xi,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} a) \right] \cos(\beta_m y) \right\} \\ \hat{M}_x^{SS}(a, y) = & \sum_{i=1}^2 ({}^1M_{xi,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} y) + {}^2M_{xi,0}^{SS} {}^2A_{i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} a)) + \\ & \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{xi,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] (-1)^m + \right. \\ & \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{xi,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] \cos(\beta_m y) \right\} \\ -\hat{M}_{xy}^{SS}(a, y) = & -\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{xyi,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} a) \right] \sin(\beta_m y) \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{T}_y^{SS}(x, b) &= \sum_{i=1}^2 {}^1T_{yi,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \sinh({}^1r_{i,0}^{SS} b) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1T_{yi,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \right] \cos(\alpha_m x) \right\} \\
 -\hat{M}_y^{SS}(x, b) &= -\sum_{i=1}^2 ({}^1M_{yi,0}^{SS} {}^1A_{i,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} b) + {}^2M_{yi,0}^{SS} {}^2A_{i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} x)) - \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{yi,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} b) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{yi,m}^{SS} {}^2A_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \right] (-1)^m \right\} \\
 \hat{M}_{xy}^{SS}(x, b) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{xyi,m}^{SS} {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} b) \right] \sin(\alpha_m x) \right\}
 \end{aligned}$$

Уз компоненте  $\hat{M}_{xy}^{SS}(a, y)$  и  $\hat{M}_y^{SS}(x, b)$  је додат знак - да би се смер момената, Слика 2.1-(b), поклапао са смером усвојених позитивних обртања, Слика 2.1-(a) и Слика 3.2. Пошто су компоненте вектора  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$  функције  $x$ , односно  $y$  координате, као што је био случај и са компонентама вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$ , није могуће да се успостави директна веза између вектора  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$  и  $\mathbf{C}^{SS}$ . Зато се уводи вектор "пројекције сила"  $\tilde{\mathbf{Q}}^{SS}$ :

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\mathbf{Q}}^{SS})^T &= \begin{bmatrix} T_{x,0}^{SS} & M_{x,0}^{SS} & T_{y,0}^{SS} & M_{y,0}^{SS} & \dots \\ \dots & T_{x,n}^{SS} & M_{x,n}^{SS} & {}^xM_{xy,n}^{SS} & T_{y,n}^{SS} & M_{y,n}^{SS} & {}^yM_{xy,n}^{SS} & \dots \\ \dots & T_{x,M}^{SS} & M_{x,M}^{SS} & {}^xM_{xy,M}^{SS} & T_{y,M}^{SS} & M_{y,M}^{SS} & {}^yM_{xy,M}^{SS} \end{bmatrix}_{1 \times (6M+4)}
 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Компоненте вектора "пројекције сила"  $\tilde{\mathbf{Q}}^{SS}$  су коефицијенти у развоју компоненти вектора  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$  у *Fourier*-ов ред:

$$\begin{aligned}
 \hat{T}_x^{SS}(a, y) &\approx \sum_{n=0}^M T_{x,n}^{SS} \cos(\beta_n y) & \hat{T}_y^{SS}(x, b) &\approx \sum_{n=0}^M T_{y,n}^{SS} \cos(\alpha_n x) \\
 \hat{M}_x^{SS}(a, y) &\approx \sum_{n=0}^M M_{x,n}^{SS} \cos(\beta_n y) & -\hat{M}_y^{SS}(x, b) &\approx -\sum_{n=0}^M M_{y,n}^{SS} \cos(\alpha_n x) \\
 -\hat{M}_{xy}^{SS}(a, y) &\approx -\sum_{n=1}^M {}^xM_{xy,n}^{SS} \sin(\beta_n y) & \hat{M}_{xy}^{SS}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^yM_{xy,n}^{SS} \sin(\alpha_n x)
 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Веза између вектора "пројекције сила"  $\tilde{\mathbf{Q}}^{SS}$  и вектора интеграционих константи  $\mathbf{C}^{SS}$  је:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{SS} = \tilde{\mathbf{F}}^{SS} \mathbf{C}^{SS} \quad (3.44)$$

где је  $\tilde{\mathbf{F}}^{SS}$  матрица реда  $6M+4$  која је дата у Прилогу.

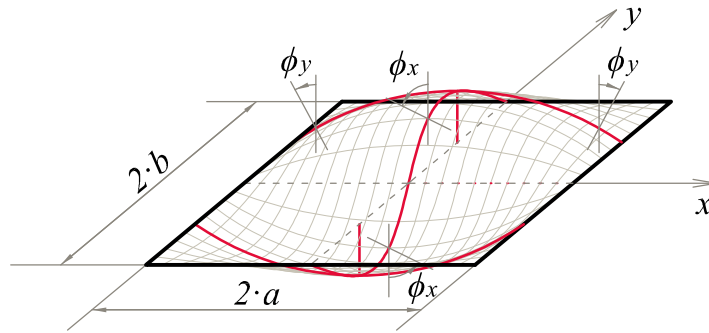
Коришћењем једначина (3.38) и (3.44) може да се успостави веза између вектора "пројекције сила"  $\tilde{\mathbf{Q}}^{SS}$  и вектора "пројекције померања"  $\tilde{\mathbf{q}}^{SS}$ :

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{SS} = \tilde{\mathbf{K}}_D^{SS} \tilde{\mathbf{q}}^{SS} \quad (3.45)$$

где је  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS}$  динамичка матрица крутости за  $SS$  део. Ред матрице  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS}$  је  $6M+4$  и она се одређује нумерички на основу следећег израза:

$$\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS} = \tilde{\mathbf{F}}^{SS} (\tilde{\mathbf{D}}^{SS})^{-1} \quad (3.46)$$

### 3.1.2 Симетрија-антисиметрија $SA$



Слика 3.4 -  $SA$  деформација плоче

Да би се задовољио услов да је деформисани облик плоче симетрично-антисиметричан (Слика 3.4), као и једначина (3.9), функције угиба  $\hat{w}^{SA}$ , ротација  $\hat{\phi}_y^{SA}$  и  $\hat{\phi}_x^{SA}$  и напонска функција  $\hat{\psi}^{SA}$  се усвајају у следећем облику:

$$\begin{aligned} \hat{w}^{SA}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \overset{SA1}{^1W_m^{SA}}(y) \cos(\alpha_m x) + \sum_{m=1}^M \overset{SA2}{^2W_m^{SA}}(x) \sin(\beta_m^* y) \\ \hat{\phi}_y^{SA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \overset{SA1}{^1\Phi_{ym}^{SA}}(y) \sin(\alpha_m x) + \sum_{m=1}^M \overset{SA2}{^2\Phi_{ym}^{SA}}(x) \sin(\beta_m^* y) \\ \hat{\phi}_x^{SA}(x, y) &= \sum_{m=0}^M \overset{SA1}{^1\Phi_{xm}^{SA}}(y) \cos(\alpha_m x) + \sum_{m=1}^M \overset{SA2}{^2\Phi_{xm}^{SA}}(x) \cos(\beta_m^* y) \\ \hat{\psi}^{SA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \overset{SA1}{^1\Psi_m^{SA}}(y) \sin(\alpha_m x) + \sum_{m=1}^M \overset{SA2}{^2\Psi_m^{SA}}(x) \cos(\beta_m^* y) \end{aligned} \quad (3.47)$$

где је  $\alpha_m = m\pi / a$  и  $\beta_m^* = (2m-1)\pi / 2b$ . Функције  ${}^2W_m^{SA}(x)$ ,  ${}^1\Phi_{xm}^{SA}(y)$ ,  ${}^2\Phi_{xm}^{SA}(x)$  и  ${}^1\Psi_m^{SA}(y)$  су парне, а  ${}^1W_m^{SA}(y)$ ,  ${}^1\Phi_{ym}^{SA}(y)$ ,  ${}^2\Phi_{ym}^{SA}(x)$  и  ${}^2\Psi_m^{SA}(x)$  непарне. Поступак за одређивање непознатих функција је исти као за случај  $SS$  и овде неће бити детаљно приказан.

Коначни изрази за угиб и ротације за  $SA$  део су:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}^{SA}(x, y) &= \sum_{i=1}^2 {}^1A_{i,0}^{SA} \sinh({}^1r_{i,0}^{SA} y) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^2 {}^1A_{i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^2 {}^2A_{i,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{\phi}_y^{SA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\delta_{i,m}^{SA} {}^1A_{i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} y) \right] \sin(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2\delta_{i,m}^{SA} {}^2A_{i,m}^{SA} \sinh({}^2r_{i,m}^{SA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{\phi}_x^{SA}(x, y) &= \sum_{i=1}^2 {}^1\gamma_{i,0}^{SA} {}^1A_{i,0}^{SA} \cosh({}^1r_{i,0}^{SA} y) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\gamma_{i,m}^{SA} {}^1A_{i,m}^{SA} \cosh({}^1r_{i,m}^{SA} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2\gamma_{i,m}^{SA} {}^2A_{i,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} x) \right] \cos(\beta_m^* y) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

где су:

$$\begin{aligned}
 {}^1\gamma_{i,0}^{SA} &= {}^1\gamma_{i,0}^{SS} \left( {}^1r_{i,0}^{SS} \rightarrow {}^1r_{i,0}^{SA} \right) & {}^1\gamma_{i,m}^{SA} &= {}^1\gamma_{i,m}^{SS} \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \rightarrow {}^1r_{i,m}^{SA} \right) \\
 {}^1\delta_{i,m}^{SA} &= {}^1\delta_{i,m}^{SS} \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \rightarrow {}^1r_{i,m}^{SA} \right) & {}^2\gamma_{3,m}^{SA} &= {}^2\gamma_{3,m}^{SS} \\
 {}^1\delta_{3,m}^{SA} &= {}^1\delta_{3,m}^{SS} \left( {}^1r_{3,m}^{SS} \rightarrow {}^1r_{3,m}^{SA} \right) & {}^2\gamma_{i,m}^{SA} &= -{}^2\gamma_{i,m}^{SS} \left( \begin{matrix} {}^2r_{i,m}^{SS} \rightarrow {}^2r_{i,m}^{SA} \\ \beta_m \rightarrow \beta_m^* \end{matrix} \right) \\
 {}^2\delta_{i,m}^{SA} &= {}^2\delta_{i,m}^{SS} \left( \begin{matrix} {}^2r_{i,m}^{SS} \rightarrow {}^2r_{i,m}^{SA} \\ \beta_m \rightarrow \beta_m^* \end{matrix} \right) & {}^2\gamma_{3,m}^{SA} &= {}^2\gamma_{3,m}^{SS} \left( {}^2r_{3,m}^{SS} \rightarrow {}^2r_{3,m}^{SA} \right) \\
 {}^2\delta_{3,m}^{SA} &= -{}^2\delta_{3,m}^{SS} \left( \beta_m \rightarrow \beta_m^* \right) & & \\
 i &= 1, 2
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Карактеристичне једначине су исте као за  $SS$  део уз смену  $SS \rightarrow SA$  и  $\beta_m \rightarrow \beta_m^*$ . Пресечне силе за  $SA$  део, које су добијене заменом решења (3.48) у изразе (2.7), дате су следећим изразима:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_x^{SA}(x, y) &= \sum_{i=1}^2 \left( {}^1M_{xi,0}^{SA} {}^1A_{i,0}^{SA} \sinh({}^1r_{i,0}^{SA} y) \right) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{xi,m}^{SA} {}^1A_{i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{xi,m}^{SA} {}^2A_{i,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{M}_y^{SA}(x, y) &= \sum_{i=1}^2 \left( {}^1M_{yi,0}^{SA} {}^1A_{i,0}^{SA} \sinh({}^1r_{i,0}^{SA} y) \right) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{yi,m}^{SA} {}^1A_{i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{yi,m}^{SA} {}^2A_{i,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{M}_{xy}^{SA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{xyi,m}^{SA} {}^1A_{i,m}^{SA} \cosh({}^1r_{i,m}^{SA} y) \right] \sin(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{xyi,m}^{SA} {}^2A_{i,m}^{SA} \sinh({}^2r_{i,m}^{SA} x) \right] \cos(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{T}_x^{SA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1T_{xi,m}^{SA} {}^1A_{i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} y) \right] \sin(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2T_{xi,m}^{SA} {}^2A_{i,m}^{SA} \sinh({}^2r_{i,m}^{SA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{T}_y^{SA}(x, y) &= \sum_{i=1}^2 {}^1T_{yi,0}^{SA} {}^1A_{i,0}^{SA} \cosh({}^1r_{i,0}^{SA} y) + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1T_{yi,m}^{SA} {}^1A_{i,m}^{SA} \cosh({}^1r_{i,m}^{SA} y) \right] \cos(\alpha_m x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2T_{yi,m}^{SA} {}^2A_{i,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} x) \right] \cos(\beta_m^* y) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

где су:

$$\begin{aligned}
 {}^1M_{xi,0}^{SA} &= -\nu D {}^1r_{i,0}^{SA} {}^1\gamma_{i,0}^{SA} \\
 {}^1M_{xi,m}^{SA} &= D(\alpha_m {}^1\delta_{i,m}^{SA} - \nu {}^1r_{i,m}^{SA} {}^1\gamma_{i,m}^{SA}) & {}^2M_{xi,m}^{SA} &= D({}^2r_{i,m}^{SA} {}^2\delta_{i,m}^{SA} + \nu \beta_m^* {}^2\gamma_{i,m}^{SA}) \\
 {}^1M_{yi,0}^{SA} &= -D {}^1r_{i,0}^{SA} {}^1\gamma_{i,0}^{SA} \\
 {}^1M_{yi,m}^{SA} &= D(\nu \alpha_m {}^1\delta_{i,m}^{SA} - {}^1r_{i,m}^{SA} {}^1\gamma_{i,m}^{SA}) & {}^2M_{yi,m}^{SA} &= D(\nu {}^2r_{i,m}^{SA} {}^2\delta_{i,m}^{SA} + \beta_m^* {}^2\gamma_{i,m}^{SA}) \\
 {}^1M_{xyi,m}^{SA} &= D \frac{1-\nu}{2} ({}^1r_{i,m}^{SA} {}^1\delta_{i,m}^{SA} + \alpha_m {}^1\gamma_{i,m}^{SA}) & {}^2M_{xyi,m}^{SA} &= D \frac{1-\nu}{2} (\beta_m^* {}^2\delta_{i,m}^{SA} - {}^2\gamma_{i,m}^{SA} {}^2r_{i,m}^{SA}) \\
 \left\{ \begin{aligned} {}^1T_{xi,m}^{SA} &= khG({}^1\delta_{i,m}^{SA} - \alpha_m) \\ {}^1T_{x3,m}^{SA} &= khG {}^1\delta_{3,m}^{SA} \end{aligned} \right\} & \left\{ \begin{aligned} {}^2T_{xi,m}^{SA} &= khG({}^2r_{i,m}^{SA} + {}^2\delta_{i,m}^{SA}) \\ {}^2T_{x3,m}^{SA} &= khG {}^2\delta_{3,m}^{SA} \end{aligned} \right\} & (3.51) \\
 {}^1T_{yi,0}^{SA} &= khG({}^1r_{i,0}^{SA} - {}^1\gamma_{i,0}^{SA}) \\
 \left\{ \begin{aligned} {}^1T_{yi,m}^{SA} &= khG({}^1r_{i,m}^{SA} - {}^1\gamma_{i,m}^{SA}) \\ {}^1T_{y3,m}^{SA} &= khG(-{}^1\gamma_{3,m}^{SA}) \end{aligned} \right\} & \left\{ \begin{aligned} {}^2T_{yi,m}^{SA} &= khG(\beta_m^* - {}^2\gamma_{i,m}^{SA}) \\ {}^2T_{y3,m}^{SA} &= khG(-{}^2\gamma_{3,m}^{SA}) \end{aligned} \right\} \\
 i &= 1, 2, (3)
 \end{aligned}$$

### 3.1.2.1 Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SA}$

Вектори померања  $\hat{\mathbf{q}}^{SA}$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}^{SA}$  су:

$$\hat{\mathbf{q}}^{SA} = \begin{bmatrix} \hat{w}^{SA}(a, y) \\ \hat{\phi}_y^{SA}(a, y) \\ \hat{\phi}_x^{SA}(a, y) \\ \hat{w}^{SA}(x, b) \\ \hat{\phi}_x^{SA}(x, b) \\ \hat{\phi}_y^{SA}(x, b) \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{Q}}^{SA} = \begin{bmatrix} \hat{T}_x^{SA}(a, y) \\ \hat{M}_x^{SA}(a, y) \\ -\hat{M}_{xy}^{SA}(a, y) \\ \hat{T}_y^{SA}(x, b) \\ -\hat{M}_y^{SA}(x, b) \\ \hat{M}_{xy}^{SA}(x, b) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Као што је објашњено код извођења динамичке матрице крутости за  $SS$  део, директна веза између вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}^{SA}$ , односно вектора сила  $\hat{\mathbf{Q}}^{SA}$ , и вектора интеграционих константи  $\mathbf{C}^{SA}$  не може да се успостави. Уводе се вектор "пројекција померања"  $\tilde{\mathbf{q}}^{SA}$  и вектор "пројекције сила"  $\tilde{\mathbf{Q}}^{SA}$ , чије су компоненте коефицијенти развоја компоненти вектора  $\hat{\mathbf{q}}^{SA}$  и  $\hat{\mathbf{Q}}^{SA}$  у *Fourier*-ов ред, једначина (3.53).

$$\begin{aligned}
 \hat{w}^{SA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x W_n^{SA} \sin(\beta_n^* y) & \hat{T}_x^{SA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M T_{xn}^{SA} \sin(\beta_n^* y) \\
 \hat{\phi}_y^{SA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x \Phi_{yn}^{SA} \sin(\beta_n^* y) & \hat{M}_x^{SA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M M_{xn}^{SA} \sin(\beta_n^* y) \\
 \hat{\phi}_x^{SA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x \Phi_{xn}^{SA} \cos(\beta_n^* y) & -\hat{M}_{xy}^{SA}(a, y) &\approx -\sum_{n=1}^M {}^x M_{xyn}^{SA} \cos(\beta_n^* y) \\
 \hat{w}^{SA}(x, b) &\approx \sum_{n=0}^M {}^y W_n^{SA} \cos(\alpha_n x) & \hat{T}_y^{SA}(x, b) &\approx \sum_{n=0}^M T_{yn}^{SA} \cos(\alpha_n x) \\
 \hat{\phi}_x^{SA}(x, b) &\approx \sum_{n=0}^M {}^y \Phi_{xn}^{SA} \cos(\alpha_n x) & -\hat{M}_y^{SA}(x, b) &\approx -\sum_{n=0}^M M_{yn}^{SA} \cos(\alpha_n x) \\
 \hat{\phi}_y^{SA}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^y \Phi_{yn}^{SA} \sin(\alpha_n x) & \hat{M}_{xy}^{SA}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^y M_{xyn}^{SA} \sin(\alpha_n x)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

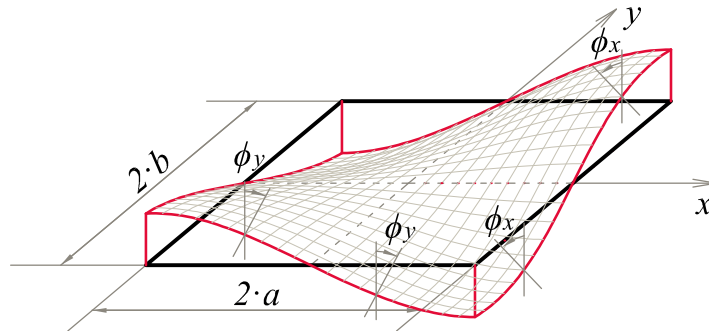
$$\alpha_n = n\pi / a \text{ и } \beta_n^* = (2n-1)\pi / 2b.$$

Вектори  $\tilde{\mathbf{q}}^{SA}$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}^{SA}$  и  $\mathbf{C}^{SA}$  су дати једначиниом (3.54), док су матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{SA}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{SA}$ , реда  $6M+2$ , дате у Прилогу.

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\mathbf{q}}^{SA})^T &= \begin{bmatrix} {}^y W_0^{SA} & {}^y \Phi_{x0}^{SA} \dots & {}^x W_n^{SA} & {}^x \Phi_{yn}^{SA} & {}^x \Phi_{xn}^{SA} & {}^y W_n^{SA} & {}^y \Phi_{xn}^{SA} & {}^y \Phi_{yn}^{SA} & \dots \\ \dots & {}^x W_M^{SA} & {}^x \Phi_{yM}^{SA} & {}^x \Phi_{xM}^{SA} & {}^y W_M^{SA} & {}^y \Phi_{xM}^{SA} & {}^y \Phi_{yM}^{SA} \end{bmatrix}_{1 \times (6M+2)} \\
 (\tilde{\mathbf{Q}}^{SA})^T &= \begin{bmatrix} T_{y0}^{SA} & M_{y0}^{SA} \dots & T_{xn}^{SA} & M_{xn}^{SA} & {}^x M_{xyn}^{SA} & T_{yn}^{SA} & M_{yn}^{SA} & {}^y M_{xyn}^{SA} & \dots \\ \dots & T_{xM}^{SA} & M_{xM}^{SA} & {}^x M_{xyM}^{SA} & T_{yM}^{SA} & M_{yM}^{SA} & {}^y M_{xyM}^{SA} \end{bmatrix}_{1 \times (6M+2)} \\
 (\mathbf{C}^{SA})^T &= \begin{bmatrix} {}^1 A_{1,0}^{SA} & {}^1 A_{2,0}^{SA} \dots & {}^1 A_{1,m}^{SA} & {}^1 A_{2,m}^{SA} & {}^1 A_{3,m}^{SA} & {}^2 A_{1,m}^{SA} & {}^2 A_{2,m}^{SA} & {}^2 A_{3,m}^{SA} & \dots \\ \dots & {}^1 A_{1,M}^{SA} & {}^1 A_{2,M}^{SA} & {}^1 A_{3,M}^{SA} & {}^2 A_{1,M}^{SA} & {}^2 A_{2,M}^{SA} & {}^2 A_{3,M}^{SA} \end{bmatrix}_{1 \times (6M+2)}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

### 3.1.3 Дупла антисиметрија AA

Деформисани облик плоче у случају AA деформације је приказан на Слици 3.5:



Слика 3.5 - AA деформација плоче



Решење се усваја у следећем облику:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M {}^1W_m^{AA}(y) \sin(\alpha_m^* x) + \sum_{m=1}^M {}^2W_m^{AA}(x) \sin(\beta_m^* y) \\
 \hat{\phi}_y^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M {}^1\Phi_{ym}^{AA}(y) \cos(\alpha_m^* x) + \sum_{m=1}^M {}^2\Phi_{ym}^{AA}(x) \sin(\beta_m^* y) \\
 \hat{\phi}_x^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M {}^1\Phi_{xm}^{AA}(y) \sin(\alpha_m^* x) + \sum_{m=1}^M {}^2\Phi_{xm}^{AA}(x) \cos(\beta_m^* y) \\
 \hat{\psi}^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M {}^1\Psi_m^{AA}(y) \cos(\alpha_m^* x) + \sum_{m=1}^M {}^2\Psi_m^{AA}(x) \cos(\beta_m^* y)
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

где је  $\alpha_m^* = (2m-1)\pi/2a$  и  $\beta_m^* = (2m-1)\pi/2b$ . Функције  ${}^1\Phi_{xm}^{AA}(y)$ ,  ${}^2\Phi_{ym}^{AA}(x)$ ,  ${}^1\Psi_m^{AA}(y)$  и  ${}^2\Psi_m^{AA}(x)$  су парне, док су  ${}^1W_m^{AA}(y)$ ,  ${}^2W_m^{AA}(x)$ ,  ${}^1\Phi_{ym}^{AA}(y)$  и  ${}^2\Phi_{xm}^{AA}(x)$  непарне функције.

Коначни изрази за угиб и ротације за  $AA$  део су:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^2 {}^1A_{i,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} y) \right] \sin(\alpha_m^* x) + \\ &\left[ \sum_{i=1}^2 {}^2A_{i,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{\phi}_y^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\delta_{i,m}^{AA} {}^1A_{i,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} y) \right] \cos(\alpha_m^* x) + \\ &\left[ \sum_{i=1}^3 {}^2\delta_{i,m}^{AA} {}^2A_{i,m}^{AA} \cosh({}^2r_{i,m}^{AA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{\phi}_x^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^3 {}^1\gamma_{i,m}^{AA} {}^1A_{i,m}^{AA} \cosh({}^1r_{i,m}^{AA} y) \right] \sin(\alpha_m^* x) + \\ &\left[ \sum_{i=1}^3 {}^2\gamma_{i,m}^{AA} {}^2A_{i,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} x) \right] \cos(\beta_m^* y) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

где су:

$$\begin{aligned}
 {}^1\delta_{i,m}^{AA} &= -{}^1\delta_{i,m}^{SS} \left( \begin{array}{l} {}^1r_{i,m}^{SS} \rightarrow {}^1r_{i,m}^{AA} \\ \alpha_m \rightarrow \alpha_m^* \end{array} \right) & {}^1\gamma_{i,m}^{AA} &= {}^1\gamma_{i,m}^{SS} \left( \begin{array}{l} {}^1r_{i,m}^{SS} \rightarrow {}^1r_{i,m}^{AA} \\ \alpha_m \rightarrow \alpha_m^* \end{array} \right) \\
 {}^1\delta_{3,m}^{AA} &= {}^1\delta_{3,m}^{SS} \left( \begin{array}{l} {}^1r_{3,m}^{SS} \rightarrow {}^1r_{3,m}^{AA} \\ \alpha_m \rightarrow \alpha_m^* \end{array} \right) & {}^1\gamma_{3,m}^{AA} &= -{}^1\gamma_{3,m}^{SS} \left( \alpha_m \rightarrow \alpha_m^* \right) \\
 {}^2\delta_{i,m}^{AA} &= {}^2\delta_{i,m}^{SS} \left( \begin{array}{l} {}^2r_{i,m}^{SS} \rightarrow {}^2r_{i,m}^{AA} \\ \beta_m \rightarrow \beta_m^* \end{array} \right) & {}^2\gamma_{i,m}^{AA} &= -{}^2\gamma_{i,m}^{SS} \left( \begin{array}{l} {}^2r_{i,m}^{SS} \rightarrow {}^2r_{i,m}^{AA} \\ \beta_m \rightarrow \beta_m^* \end{array} \right) \\
 {}^2\delta_{3,m}^{AA} &= -{}^2\delta_{3,m}^{SS} \left( \beta_m \rightarrow \beta_m^* \right) & {}^2\gamma_{3,m}^{AA} &= {}^2\gamma_{3,m}^{SS} \left( {}^2r_{3,m}^{SS} \rightarrow {}^2r_{3,m}^{AA} \right)
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

$i = 1, 2$

Карактеристичне једначине су исте као за  $SS$  део уз смену  $SS \rightarrow AA$ ,  $\alpha_m \rightarrow \alpha_m^*$  и  $\beta_m \rightarrow \beta_m^*$ . Пресечне силе за  $AA$  део добијају се заменом решење (3.56) у изразе (2.7):

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_x^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{xi,m}^{AA} {}^1A_{i,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} y) \right] \sin(\alpha_m^* x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{xi,m}^{AA} {}^2A_{i,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{M}_y^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{yi,m}^{AA} {}^1A_{i,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} y) \right] \sin(\alpha_m^* x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{yi,m}^{AA} {}^2A_{i,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{M}_{xy}^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1M_{xyi,m}^{AA} {}^1A_{i,m}^{AA} \cosh({}^1r_{i,m}^{AA} y) \right] \cos(\alpha_m^* x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2M_{xyi,m}^{AA} {}^2A_{i,m}^{AA} \cosh({}^2r_{i,m}^{AA} x) \right] \cos(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{T}_x^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1T_{xi,m}^{AA} {}^1A_{i,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} y) \right] \cos(\alpha_m^* x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2T_{xi,m}^{AA} {}^2A_{i,m}^{AA} \cosh({}^2r_{i,m}^{AA} x) \right] \sin(\beta_m^* y) \right\} \\
 \hat{T}_y^{AA}(x, y) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^3 {}^1T_{yi,m}^{AA} {}^1A_{i,m}^{AA} \cosh({}^1r_{i,m}^{AA} y) \right] \sin(\alpha_m^* x) + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^3 {}^2T_{yi,m}^{AA} {}^2A_{i,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} x) \right] \cos(\beta_m^* y) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

где су:

$$\begin{aligned}
 {}^1M_{xi,m}^{AA} &= D(-\alpha_m^* {}^1\delta_{i,m}^{AA} - \nu {}^1r_{i,m}^{AA} {}^1\gamma_{i,m}^{AA}) & {}^2M_{xi,m}^{AA} &= D({}^2r_{i,m}^{AA} {}^2\delta_{i,m}^{AA} + \nu \beta_m^* {}^2\gamma_{i,m}^{AA}) \\
 {}^1M_{yi,m}^{AA} &= D(-\nu \alpha_m^* {}^1\delta_{i,m}^{AA} - {}^1r_{i,m}^{AA} {}^1\gamma_{i,m}^{AA}) & {}^2M_{yi,m}^{AA} &= D(\nu {}^2r_{i,m}^{AA} {}^2\delta_{i,m}^{AA} + \beta_m^* {}^2\gamma_{i,m}^{AA}) \\
 {}^1M_{xyi,m}^{AA} &= D \frac{1-\nu}{2} ({}^1r_{i,m}^{AA} {}^1\delta_{i,m}^{AA} - \alpha_m^* {}^1\gamma_{i,m}^{AA}) & {}^2M_{xyi,m}^{AA} &= D \frac{1-\nu}{2} (\beta_m^* {}^2\delta_{i,m}^{AA} - {}^2\gamma_{i,m}^{AA} {}^2r_{i,m}^{AA}) \\
 \left\{ \begin{aligned} {}^1T_{xi,m}^{AA} &= khG({}^1\delta_{i,m}^{AA} + \alpha_m^*) \\ {}^1T_{x3,m}^{AA} &= khG({}^1\delta_{3,m}^{AA}) \end{aligned} \right\} & \left\{ \begin{aligned} {}^2T_{xi,m}^{AA} &= khG({}^2r_{i,m}^{AA} + {}^2\delta_{i,m}^{AA}) \\ {}^2T_{x3,m}^{AA} &= khG({}^2\delta_{3,m}^{AA}) \end{aligned} \right\} \\
 \left\{ \begin{aligned} {}^1T_{yi,m}^{AA} &= khG({}^1r_{i,m}^{AA} - {}^1\gamma_{i,m}^{AA}) \\ {}^1T_{y3,m}^{AA} &= khG(-{}^1\gamma_{3,m}^{AA}) \end{aligned} \right\} & \left\{ \begin{aligned} {}^2T_{yi,m}^{AA} &= khG(\beta_m^* - {}^2\gamma_{i,m}^{AA}) \\ {}^2T_{y3,m}^{AA} &= khG(-{}^2\gamma_{3,m}^{AA}) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$i = 1, 2, (3)$$

### 3.1.3.1 Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{AA}$

Апроксимација компоненти вектора  $\hat{\mathbf{q}}^{AA}$  и  $\hat{\mathbf{Q}}^{AA}$ , које представљају померања и силе на контурама плоче, преко *Fourier*-овог реда је:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}^{AA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x W_n^{AA} \sin(\beta_n^* y) & \hat{T}_x^{AA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M T_{xn}^{AA} \sin(\beta_n^* y) \\
 \hat{\phi}_y^{AA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x \Phi_{yn}^{AA} \sin(\beta_n^* y) & \hat{M}_x^{AA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M M_{xn}^{AA} \sin(\beta_n^* y) \\
 \hat{\phi}_x^{AA}(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x \Phi_{xn}^{AA} \cos(\beta_n^* y) & -\hat{M}_{xy}^{AA}(a, y) &\approx -\sum_{n=1}^M {}^x M_{xyn}^{AA} \cos(\beta_n^* y) \\
 \hat{w}^{AA}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^y W_n^{AA} \sin(\alpha_n^* x) & \hat{T}_y^{AA}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M T_{yn}^{AA} \sin(\alpha_n^* x) \\
 \hat{\phi}_x^{AA}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^y \Phi_{xn}^{AA} \sin(\alpha_n^* x) & -\hat{M}_y^{AA}(x, b) &\approx -\sum_{n=1}^M M_{yn}^{AA} \sin(\alpha_n^* x) \\
 \hat{\phi}_y^{AA}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^y \Phi_{yn}^{AA} \cos(\alpha_n^* x) & \hat{M}_{xy}^{AA}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^y M_{xyn}^{AA} \cos(\alpha_n^* x)
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

где је  $\alpha_n^* = (2n-1)\pi / 2a$  и  $\beta_n^* = (2n-1)\pi / 2b$ .

Вектори  $\tilde{\mathbf{q}}^{AA}$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}^{AA}$  и  $\mathbf{C}^{AA}$  су дати једначином (3.61), а матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{AA}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{AA}$ , које су реда  $6M$ , су дате у Прилогу.

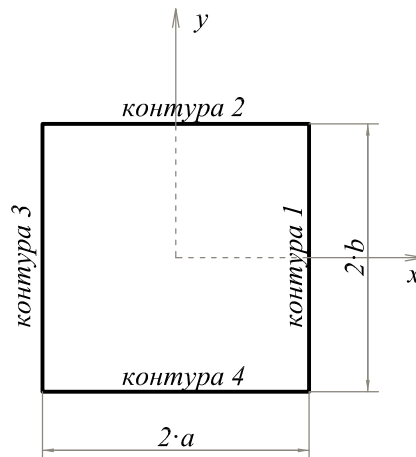
$$\begin{aligned}
 (\tilde{\mathbf{q}}^{AA})^T &= \begin{bmatrix} {}^x W_1^{AA} & {}^x \Phi_{y1}^{AA} & {}^x \Phi_{x1}^{AA} & {}^y W_1^{AA} & {}^y \Phi_{x1}^{AA} & {}^y \Phi_{y1}^{AA} & \dots \\ \dots & {}^x W_M^{AA} & {}^x \Phi_{yM}^{AA} & {}^x \Phi_{xM}^{AA} & {}^y W_M^{AA} & {}^y \Phi_{xM}^{AA} & {}^y \Phi_{yM}^{AA} \end{bmatrix}_{1 \times 6M} \\
 (\tilde{\mathbf{Q}}^{AA})^T &= \begin{bmatrix} T_{x1}^{AA} & M_{x1}^{AA} & {}^x M_{xy1}^{AA} & T_{y1}^{AA} & M_{y1}^{AA} & {}^y M_{xy1}^{AA} & \dots \\ \dots & T_{xM}^{AA} & M_{xM}^{AA} & {}^x M_{xyM}^{AA} & T_{yM}^{AA} & M_{yM}^{AA} & {}^y M_{xyM}^{AA} \end{bmatrix}_{1 \times 6M} \\
 (\mathbf{C}^{AA})^T &= \begin{bmatrix} {}^1 A_{1,1}^{AA} & {}^1 A_{2,1}^{AA} & {}^1 A_{3,1}^{AA} & {}^2 A_{1,1}^{AA} & {}^2 A_{2,1}^{AA} & {}^2 A_{3,1}^{AA} & \dots \\ \dots & {}^1 A_{1,M}^{AA} & {}^1 A_{2,M}^{AA} & {}^1 A_{3,M}^{AA} & {}^2 A_{1,M}^{AA} & {}^2 A_{2,M}^{AA} & {}^2 A_{3,M}^{AA} \end{bmatrix}_{1 \times 6M}
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

### 3.1.4 Динамичка матрица крутости правоугаоне плоче $\tilde{\mathbf{K}}_D$

Динамичка матрица крутости континуалног елемента правоугаоне *Mindlin*-ове плоче  $\tilde{\mathbf{K}}_D$  може да се одреди када су дефинисане динамичке матрице крутости за све симетричне доприносе ( $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SA}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{AS}$  и  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{AA}$ ). Угиби  $\hat{w}$  и ротације  $\hat{\phi}_y$  и  $\hat{\phi}_x$  контура плоче апроксимирају се *Fourier*-овим редом који, за случај произвољног деформисаног облика, садржи и парне и непарне чланове:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}(a, y) &\approx {}^1W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^1W_n^S \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^M {}^1W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\
 \hat{w}(x, b) &\approx {}^2W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^2W_n^S \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^M {}^2W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \\
 \hat{w}(-a, y) &\approx {}^3W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^3W_n^S \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^M {}^3W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\
 \hat{w}(x, -b) &\approx {}^4W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^4W_n^S \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^M {}^4W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \\
 \hat{\phi}_y(a, y) &\approx {}^1\Phi_{y0}^S + \sum_{n=1}^M {}^1\Phi_{yn}^S \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^M {}^1\Phi_{yn}^A \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\
 \hat{\phi}_y(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^2\Phi_{yn}^S \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} + \sum_{n=1}^M {}^2\Phi_{yn}^A \sin \frac{n\pi x}{a} \\
 \hat{\phi}_y(-a, y) &\approx {}^3\Phi_{y0}^S + \sum_{n=1}^M {}^3\Phi_{yn}^S \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^M {}^3\Phi_{yn}^A \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\
 \hat{\phi}_y(x, -b) &\approx \sum_{n=1}^M {}^4\Phi_{yn}^S \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} + \sum_{n=1}^M {}^4\Phi_{yn}^A \sin \frac{n\pi x}{a} \\
 \hat{\phi}_x(a, y) &\approx \sum_{n=1}^M {}^1\Phi_{xn}^S \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} + \sum_{n=1}^M {}^1\Phi_{xn}^A \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \hat{\phi}_x(x, b) &\approx {}^2\Phi_{x0}^S + \sum_{n=1}^M {}^2\Phi_{xn}^S \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^M {}^2\Phi_{xn}^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \\
 \hat{\phi}_x(-a, y) &\approx \sum_{n=1}^M {}^3\Phi_{xn}^S \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} + \sum_{n=1}^M {}^3\Phi_{xn}^A \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \hat{\phi}_x(x, -b) &\approx {}^4\Phi_{x0}^S + \sum_{n=1}^M {}^4\Phi_{xn}^S \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^M {}^4\Phi_{xn}^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Горњи леви индекси 1, 2, 3 и 4 односе се на број контуре према следећој слици:



Слика 3.6 – Нумерација контура плоче

Уводи се вектор  $\tilde{\mathbf{q}}$ , једначина (3.63), чије су компоненте дефинисане једначинама (3.64) и (3.65).

$$\tilde{\mathbf{q}}^T = [\tilde{\mathbf{q}}_0 \quad \tilde{\mathbf{q}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{q}}_n \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{q}}_M]_{1 \times (24M+8)} \quad (3.63)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_0^T = [{}^1W_0^S \quad {}^1\Phi_{y0}^S \quad {}^2W_0^S \quad {}^2\Phi_{x0}^S \quad {}^3W_0^S \quad {}^3\Phi_{y0}^S \quad {}^4W_0^S \quad {}^4\Phi_{x0}^S]_{1 \times 8} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_n^T = & [{}^1W_n^S \quad {}^1W_n^A \quad {}^1\Phi_{yn}^S \quad {}^1\Phi_{yn}^A \quad {}^1\Phi_{xn}^S \quad {}^1\Phi_{xn}^A \quad \cdots \\ & \cdots \quad {}^4W_n^S \quad {}^4W_n^A \quad {}^4\Phi_{yn}^S \quad {}^4\Phi_{yn}^A \quad {}^4\Phi_{xn}^S \quad {}^4\Phi_{xn}^A]_{1 \times 24} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Са друге стране, већ су за симетричне доприносе дефинисани вектори  $\tilde{\mathbf{q}}^{SS}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}^{SA}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}^{AS}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}^{AA}$ , који формирају вектор  $\tilde{\mathbf{q}}_0$ :

$$\tilde{\mathbf{q}}_0^T = [\tilde{\mathbf{q}}^{SS} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{SA} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{AS} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{AA}]_{1 \times (24M+8)} \quad (3.66)$$

Потребно је да се успостави веза између вектора  $\tilde{\mathbf{q}}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}_0$ .

Померања контура плоче  $x = \pm a$  за произвољан деформисани облик, на основу *Gortan*-овог метода суперпозиције, могу да се прикажу као:

$$\begin{aligned} \hat{w}(a, y) &= \hat{w}^{SS}(a, y) + \hat{w}^{SA}(a, y) + \hat{w}^{AS}(a, y) + \hat{w}^{AA}(a, y) \\ \hat{w}(a, -y) &= \hat{w}^{SS}(a, -y) + \hat{w}^{SA}(a, -y) + \hat{w}^{AS}(a, -y) + \hat{w}^{AA}(a, -y) \\ \hat{w}(-a, y) &= \hat{w}^{SS}(-a, y) + \hat{w}^{SA}(-a, y) + \hat{w}^{AS}(-a, y) + \hat{w}^{AA}(-a, y) \\ \hat{w}(-a, -y) &= \hat{w}^{SS}(-a, -y) + \hat{w}^{SA}(-a, -y) + \hat{w}^{AS}(-a, -y) + \hat{w}^{AA}(-a, -y) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Сабирањем сва четири израза у једначини (3.67) и уз узимање у обзир да је:

$$\begin{aligned} \hat{w}^{SS}(a, y) &= \hat{w}^{SS}(a, -y) = \hat{w}^{SS}(-a, y) = \hat{w}^{SS}(-a, -y) \\ \hat{w}^{SA}(a, y) &= -\hat{w}^{SA}(a, -y) = \hat{w}^{SA}(-a, y) = -\hat{w}^{SA}(-a, -y) \\ \hat{w}^{AS}(a, y) &= \hat{w}^{AS}(a, -y) = -\hat{w}^{AS}(-a, y) = -\hat{w}^{AS}(-a, -y) \\ \hat{w}^{AA}(a, y) &= -\hat{w}^{AA}(a, -y) = -\hat{w}^{AA}(-a, y) = \hat{w}^{AA}(-a, -y) \end{aligned} \quad (3.68)$$

добија се:

$$\hat{w}^{SS}(a, y) = \frac{1}{4} [\hat{w}(a, y) + \hat{w}(a, -y) + \hat{w}(-a, y) + \hat{w}(-a, -y)] \quad (3.69)$$

Из једначине (3.36) следи:

$$\hat{w}^{SS}(a, y) \approx {}^xW_0^{SS} + \sum_{n=1}^M {}^xW_n^{SS} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.70)$$

док из првог и трећег израза у (3.62) је:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}(a, y) &\approx {}^1W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^1W_n^S \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^M {}^1W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\
 \hat{w}(a, -y) &\approx {}^1W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^1W_n^S \cos \frac{n\pi y}{b} - \sum_{n=1}^M {}^1W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\
 \hat{w}(-a, y) &\approx {}^3W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^3W_n^S \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^M {}^3W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\
 \hat{w}(-a, -y) &\approx {}^3W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^3W_n^S \cos \frac{n\pi y}{b} - \sum_{n=1}^M {}^3W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

На основу једначине (3.69) може да се успостави веза између *Fourier*-ових коефицијента у изразима (3.70) и (3.71):

$${}^xW_0^{SS} = \frac{1}{2} ({}^1W_0^S + {}^3W_0^S) \quad {}^xW_n^{SS} = \frac{1}{2} ({}^1W_n^S + {}^3W_n^S) \tag{3.72}$$

Применом приказаног поступка на обртања контура плоче  $x = \pm a$  добијају се следеће релације:

$$\begin{aligned}
 {}^x\Phi_{y0}^{SS} &= \frac{1}{2} ({}^1\Phi_{y0}^S - {}^3\Phi_{y0}^S) & {}^x\Phi_{yn}^{SS} &= \frac{1}{2} ({}^1\Phi_{yn}^S - {}^3\Phi_{yn}^S) \\
 {}^x\Phi_{xn}^{SS} &= \frac{1}{2} ({}^1\Phi_{xn}^S + {}^3\Phi_{xn}^S)
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Понављањем процедуре за контуре  $y = \pm b$ , добијају се и сви остали односи између коефицијената:

$$\begin{aligned}
 {}^yW_0^{SS} &= \frac{1}{2} ({}^2W_0^S + {}^4W_0^S) & {}^yW_n^{SS} &= \frac{1}{2} ({}^2W_n^S + {}^4W_n^S) \\
 {}^y\Phi_{yn}^{SS} &= \frac{1}{2} ({}^2\Phi_{yn}^S + {}^4\Phi_{yn}^S) \\
 {}^y\Phi_{x0}^{SS} &= \frac{1}{2} ({}^2\Phi_{x0}^S - {}^4\Phi_{x0}^S) & {}^y\Phi_{xn}^{SS} &= \frac{1}{2} ({}^2\Phi_{xn}^S - {}^4\Phi_{xn}^S)
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Вектор  $\tilde{\mathbf{q}}^{SS}$  је записан у скраћеном облику:

$$(\tilde{\mathbf{q}}^{SS})^T = [\tilde{\mathbf{q}}_0^{SS} \quad \tilde{\mathbf{q}}_1^{SS} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{q}}_n^{SS} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{q}}_M^{SS}]_{1 \times (6M+4)} \tag{3.75}$$

где су:

$$(\tilde{\mathbf{q}}_0^{SS})^T = [{}^xW_0^{SS} \quad {}^x\Phi_{y0}^{SS} \quad {}^yW_0^{SS} \quad {}^y\Phi_{x0}^{SS}]_{1 \times 4} \tag{3.76}$$

$$(\tilde{\mathbf{q}}_n^{SS})^T = [{}^xW_n^{SS} \quad {}^x\Phi_{yn}^{SS} \quad {}^x\Phi_{xn}^{SS} \quad {}^yW_n^{SS} \quad {}^y\Phi_{xn}^{SS} \quad {}^y\Phi_{yn}^{SS}]_{1 \times 6} \tag{3.77}$$

Везе између вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_0^{SS}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}_0$ , односно вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_n^{SS}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}_n$ , су дате једначинама (3.78) и (3.79), док је веза између елемената вектора  $\tilde{\mathbf{q}}^{SS}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}$  успостављена преко матрице трансформације за  $SS$  део  $\mathbf{T}^{SS}$ , једначина (3.80):

$$\tilde{\mathbf{q}}_0^{SS} = \frac{1}{2} \mathbf{t}_0^{SS} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 \quad (3.78)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_n^{SS} = \frac{1}{2} \mathbf{t}_n^{SS} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_n \quad (3.79)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^{SS} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^{SS} \cdot \tilde{\mathbf{q}} \quad (3.80)$$

Матрице  $\mathbf{t}_0^{SS}$ ,  $\mathbf{t}_n^{SS}$  и  $\mathbf{T}^{SS}$  су дате у Прилогу.

На исти начин, преко матрица трансформација за  $SA$ ,  $AS$  и  $AA$  део могу да се успоставе и везе између елемената вектора  $\tilde{\mathbf{q}}^{SA}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}^{AS}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}^{AA}$  и вектора  $\tilde{\mathbf{q}}$ :

$$\tilde{\mathbf{q}}^{SA} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^{SA} \cdot \tilde{\mathbf{q}} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{AS} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^{AS} \cdot \tilde{\mathbf{q}} \quad \tilde{\mathbf{q}}^{AA} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^{AA} \cdot \tilde{\mathbf{q}} \quad (3.81)$$

Сада веза између вектора  $\tilde{\mathbf{q}}$  и  $\tilde{\mathbf{q}}_0$  може да се напише као:

$$\tilde{\mathbf{q}}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{q}} \quad (3.82)$$

где је:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{SS} \\ \mathbf{T}^{SA} \\ \mathbf{T}^{AS} \\ \mathbf{T}^{AA} \end{bmatrix}_{(24M+8) \times (24M+8)} \quad (3.83)$$

Матрице  $\mathbf{T}^{SA}$  и  $\mathbf{T}^{AA}$  су такође дате у Прилогу.

Применом приказаног поступка може да се успостави и веза између вектора сила  $\tilde{\mathbf{Q}}$  и  $\tilde{\mathbf{Q}}_0$ :

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^T \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_0 \quad (3.84)$$

Ако се веза између вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_0$  и  $\tilde{\mathbf{Q}}_0$  запише као:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_0 = \tilde{\mathbf{K}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 \quad (3.85)$$

где је:

$$\tilde{\mathbf{K}}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_D^{SS} & & & \\ & \tilde{\mathbf{K}}_D^{SA} & & \\ & & \tilde{\mathbf{K}}_D^{AS} & \\ & & & \tilde{\mathbf{K}}_D^{AA} \end{bmatrix}_{(24M+8) \times (24M+8)} \quad (3.86)$$

онда коришћењем једначина (3.82) и (3.84) може да се добија веза између вектора  $\tilde{\mathbf{q}}$  и  $\tilde{\mathbf{Q}}$ :

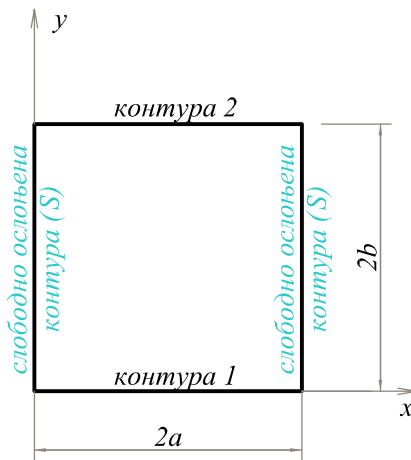
$$\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{K}}_D \cdot \tilde{\mathbf{q}} \quad (3.87)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_D = \frac{1}{2} \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{K}}_0 \mathbf{T} \quad (3.88)$$

$\tilde{\mathbf{K}}_D$  је динамичка матрица крутости правоугаоне *Mindlin*-ове плоче и њен ред је  $24M+8$ .

### 3.1.5 Динамичка матрица крутости *Maurice Lévy*-еве плоче $\mathbf{K}_{Dm}$

У претходном поглављу је изведена динамичка матрица крутости  $\tilde{\mathbf{K}}_D$  правоугаоне *Mindlin*-ове плоче на основу општег решења проблема слободних вибрација. Коришћено *Gorman*-ово решење је независно од граничних услова, па из тог разлога, континуални елемент заснован на динамичкој матрици крутости  $\tilde{\mathbf{K}}_D$  може да се користи у анализи вибрација плоча и система плоча за произвољне граничне услове. Тачност овог континуалног елемента зависи од броја коришћених чланова реда решења  $M$ .



Слика 3.7 – *Maurice Lévy*-јева плоча



Насупрот томе, у овом поглављу биће изведена динамичка матрица крутости *Maurice Lévy*-еве плоче која је тачна, али је њена примена ограничена на плоче и системе плоча са две паралелне слободно ослоњене контуре. Решење проблема слободних вибрација у случају *Maurice Lévy*-еве плоче, Слика 3.7, које *a priori* задовољава предефинисане граничне услове, усваја се у следећем облику:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m(y) \sin(\alpha_m x) \\
 \hat{\phi}_y(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{ym}(y) \cos(\alpha_m x) \\
 \hat{\phi}_x(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{xm}(y) \sin(\alpha_m x) \\
 \hat{\psi}(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(y) \cos(\alpha_m x)
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

где је  $\alpha_m = m\pi / 2a$ . Види се да је *Maurice Lévy*-јево решење, уз смену  $\alpha_m^* \rightarrow \alpha_m$ , исто као решење за *AA1* део, једначина (3.55). Из тог разлога, за одређивање корена карактеристичне једначине и коефицијената  $\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$  могу да се користе решења дата у Поглављу 3.1.3. Функције  $W_m(y)$ ,  $\Phi_{ym}(y)$  и  $\Phi_{xm}(y)$ , за разлику од решења за *AA1* део, садрже и парне и непарне чланове. У случају да су гранични услови на контурама  $y=0$  и  $y=2b$  константи, решења за поједине хармонике су независна. Уместо решења у облику суме, једначина (3.89), може да се посматра решење само за  $m$ -ти хармоник.

Решења за непознате функције угиба и ротација за  $m$ -ти хармоник су:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_m(x, y) &= \left[ A_{1,m} \cosh(r_{1,m}y) + A_{2,m} \sinh(r_{1,m}y) + \right. \\
 &\quad \left. A_{3,m} \cosh(r_{2,m}y) + A_{4,m} \sinh(r_{2,m}y) \right] \sin(\alpha_m x) \\
 \hat{\phi}_{ym}(x, y) &= \left[ \delta_{1,m} A_{1,m} \cosh(r_{1,m}y) + \delta_{1,m} A_{2,m} \sinh(r_{1,m}y) + \right. \\
 &\quad \delta_{2,m} A_{3,m} \cosh(r_{2,m}y) + \delta_{2,m} A_{4,m} \sinh(r_{2,m}y) + \\
 &\quad \left. \delta_{3,m} A_{5,m} \cosh(r_{3,m}y) + \delta_{3,m} A_{6,m} \sinh(r_{3,m}y) \right] \cos(\alpha_m x) \\
 \hat{\phi}_{xm}(x, y) &= \left[ \gamma_{1,m} A_{1,m} \sinh(r_{1,m}y) + \gamma_{1,m} A_{2,m} \cosh(r_{1,m}y) + \right. \\
 &\quad \gamma_{2,m} A_{3,m} \sinh(r_{2,m}y) + \gamma_{2,m} A_{4,m} \cosh(r_{2,m}y) + \\
 &\quad \left. \gamma_{3,m} A_{5,m} \sinh(r_{3,m}y) + \gamma_{3,m} A_{6,m} \cosh(r_{3,m}y) \right] \sin(\alpha_m x)
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

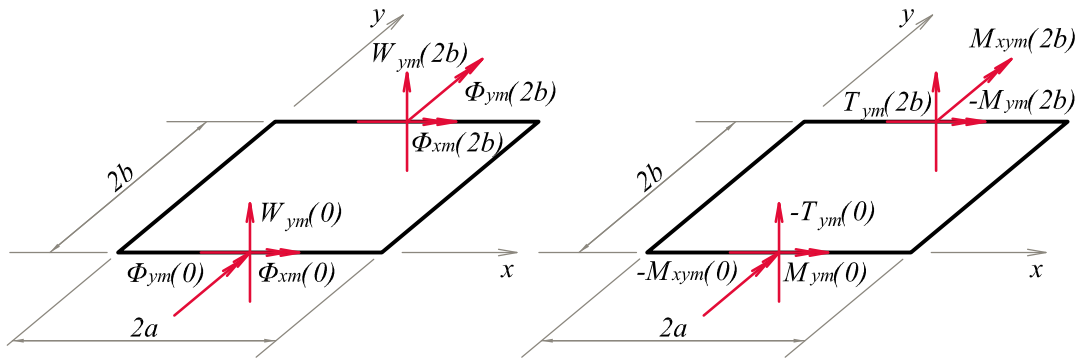
Заменом једначина (3.90) у (2.7) добијају се изрази за пресечне силе:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_x(x, y) &= M_{xm}(y) \sin(\alpha_m x) \\
 M_{xm}(y) &= M_{x1,m} A_{1,m} \sinh(r_{1,m} y) + M_{x1,m} A_{2,m} \cosh(r_{1,m} y) + \\
 &\quad M_{x2,m} A_{3,m} \sinh(r_{2,m} y) + M_{x2,m} A_{4,m} \cosh(r_{2,m} y) + \\
 &\quad M_{x3,m} A_{5,m} \sinh(r_{3,m} y) + M_{x3,m} A_{6,m} \cosh(r_{3,m} y) \\
 \hat{M}_y(x, y) &= M_{ym}(y) \sin(\alpha_m x) \\
 M_{ym}(y) &= M_{y1,m} A_{1,m} \sinh(r_{1,m} y) + M_{y1,m} A_{2,m} \cosh(r_{1,m} y) + \\
 &\quad M_{y2,m} A_{3,m} \sinh(r_{2,m} y) + M_{y2,m} A_{4,m} \cosh(r_{2,m} y) + \\
 &\quad M_{y3,m} A_{5,m} \sinh(r_{3,m} y) + M_{y3,m} A_{6,m} \cosh(r_{3,m} y) \\
 \hat{M}_{xy}(x, y) &= M_{xym}(y) \cos(\alpha_m x) \\
 M_{xym}(y) &= M_{xy1,m} A_{1,m} \cosh(r_{1,m} y) + M_{xy1,m} A_{2,m} \sinh(r_{1,m} y) + \\
 &\quad M_{xy2,m} A_{3,m} \cosh(r_{2,m} y) + M_{xy2,m} A_{4,m} \sinh(r_{2,m} y) + \\
 &\quad M_{xy3,m} A_{5,m} \cosh(r_{3,m} y) + M_{xy3,m} A_{6,m} \sinh(r_{3,m} y) \\
 \hat{T}_x(x, y) &= T_{xm}(y) \cos(\alpha_m x) \\
 T_{xm}(y) &= T_{x1,m} A_{1,m} \sinh(r_{1,m} y) + T_{x1,m} A_{2,m} \cosh(r_{1,m} y) + \\
 &\quad T_{x2,m} A_{3,m} \sinh(r_{2,m} y) + T_{x2,m} A_{4,m} \cosh(r_{2,m} y) + \\
 &\quad T_{x3,m} A_{5,m} \sinh(r_{3,m} y) + T_{x3,m} A_{6,m} \cosh(r_{3,m} y) \\
 \hat{T}_y(x, y) &= T_{ym}(y) \sin(\alpha_m x) \\
 T_{ym}(y) &= T_{y1,m} A_{1,m} \cosh(r_{1,m} y) + T_{y1,m} A_{2,m} \sinh(r_{1,m} y) + \\
 &\quad T_{y2,m} A_{3,m} \cosh(r_{2,m} y) + T_{y2,m} A_{4,m} \sinh(r_{2,m} y) + \\
 &\quad T_{y3,m} A_{5,m} \cosh(r_{3,m} y) + T_{y3,m} A_{6,m} \sinh(r_{3,m} y)
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

где су изрази за “амплитуде” пресечних сила дате  $AA1$  делом (чланови који имају индекс <sup>1</sup>  $AA$ ) једначине (3.59), при чему је  $\alpha_m^*$  замењено са  $\alpha_m$ .

Када су одређени изрази за померање, ротације и пресечне силе, може да се одреди динамичка матрица крутости за *Maurice Lévy*-јеву плочу. Вектор померања  $\hat{\mathbf{q}}_m$  и вектор сила  $\hat{\mathbf{Q}}_m$ , који садрже амплитуде померања и ротације, односно сила, на контурама плоче  $y=0$  и  $y=2b$ , су дати једначинама (3.92), док су њихове компоненте приказане на Слици 3.8.

$$\hat{\mathbf{q}}_m = \begin{bmatrix} W_m(0) \\ \Phi_{xm}(0) \\ \Phi_{ym}(0) \\ W_m(2b) \\ \Phi_{xm}(2b) \\ \Phi_{ym}(2b) \end{bmatrix}_{1 \times 6} \quad \hat{\mathbf{Q}}_m = \begin{bmatrix} -T_{ym}(0) \\ M_{ym}(0) \\ -M_{xym}(0) \\ T_{ym}(2b) \\ -M_{ym}(2b) \\ M_{xym}(2b) \end{bmatrix}_{1 \times 6} \quad (3.92)$$



Слика 3.8 – Компоненте вектора  $\hat{\mathbf{q}}_m$  и  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  за Maurice Lévy-јеву плочу

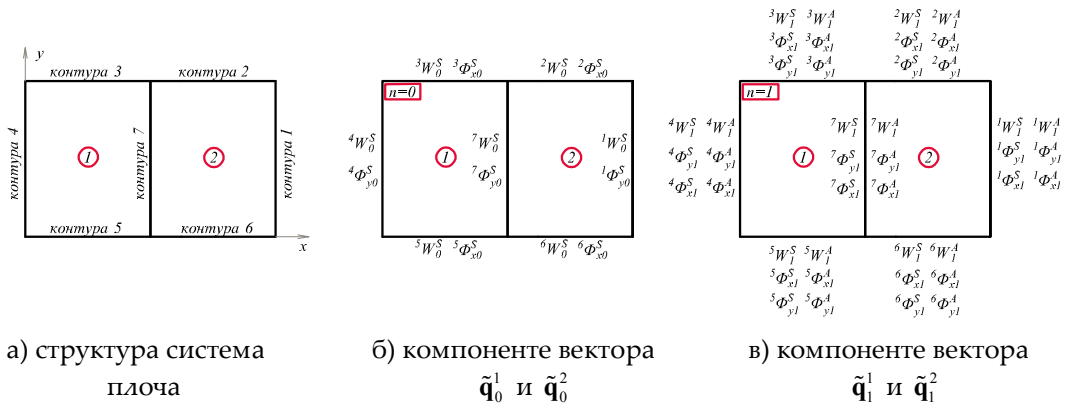
Веза између вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}_m$ , односно вектора сила  $\hat{\mathbf{Q}}_m$ , и вектора интеграционих константи  $\mathbf{C}_m$ , једначина (3.93), успостављена је преко матрице  $\mathbf{D}_m$ , односно преко матрице  $\mathbf{F}_m$ , које су дате у Прилогу.

$$\mathbf{C}_m^T = [A_{1,m} \ A_{2,m} \ A_{3,m} \ A_{4,m} \ A_{5,m} \ A_{6,m}]_{1 \times 6} \quad (3.93)$$

Ред матрица  $\mathbf{D}_m$  и  $\mathbf{F}_m$ , као и матрице крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$  за Maurice Lévy-јеву плочу, је 6.

### 3.1.6 Формирање глобалне динамичке матрице крутости, гранични услови, сопствене фреквенције и облици осциловања

Глобална динамичка матрица крутости се формира на сличан начин као у МКЕ, са том разликом што су у методи динамичке крутости плоче уместо у чворовима повезане дуж контура. На Слици 3.9-(а) је приказан систем који се састоји од две плоче, повезане дуж контуре 7, на чијим контурама могу да буду задати произвољни гранични услови.



Слика 3.9 - Нумерација плоча и контура и компоненте вектора померања за  $M = 1$   
 Основне непознате за сваку плочу су компоненте вектора  $\tilde{\mathbf{q}}$ , једначина  
 (3.63). Вектори померања који одговарају плочама 1 и 2, за  $M = 1$ , су:

$$\tilde{\mathbf{q}}^1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_0^1 \\ \tilde{\mathbf{q}}_1^1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_0^2 \\ \tilde{\mathbf{q}}_1^2 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Компоненте вектора  $\tilde{\mathbf{q}}^1$  и  $\tilde{\mathbf{q}}^2$  су приказане на Слици 3.9-(б) и (в) и дате су следећим изразима:

$$\left(\tilde{\mathbf{q}}_0^1\right)^T = \left[ {}^7W_0^S \quad {}^7\Phi_{y0}^S \quad {}^3W_0^S \quad {}^3\Phi_{x0}^S \quad {}^4W_0^S \quad {}^4\Phi_{y0}^S \quad {}^5W_0^S \quad {}^5\Phi_{x0}^S \right]_{1 \times 8} \quad (3.95)$$

$$\left(\tilde{\mathbf{q}}_1^1\right)^T = \left[ {}^7W_1^S \quad {}^7W_1^A \quad {}^7\Phi_{y1}^S \quad {}^7\Phi_{y1}^A \quad {}^7\Phi_{x1}^S \quad {}^7\Phi_{x1}^A \quad \dots \right. \\ \left. \dots \quad {}^5W_1^S \quad {}^5W_1^A \quad {}^5\Phi_{x1}^S \quad {}^5\Phi_{x1}^A \quad {}^5\Phi_{y1}^S \quad {}^5\Phi_{y1}^A \right]_{1 \times 24} \quad (3.96)$$

$$\left(\tilde{\mathbf{q}}_0^2\right)^T = \left[ {}^1W_0^S \quad {}^1\Phi_{y0}^S \quad {}^2W_0^S \quad {}^2\Phi_{x0}^S \quad {}^7W_0^S \quad {}^7\Phi_{y0}^S \quad {}^6W_0^S \quad {}^6\Phi_{x0}^S \right]_{1 \times 8} \quad (3.97)$$

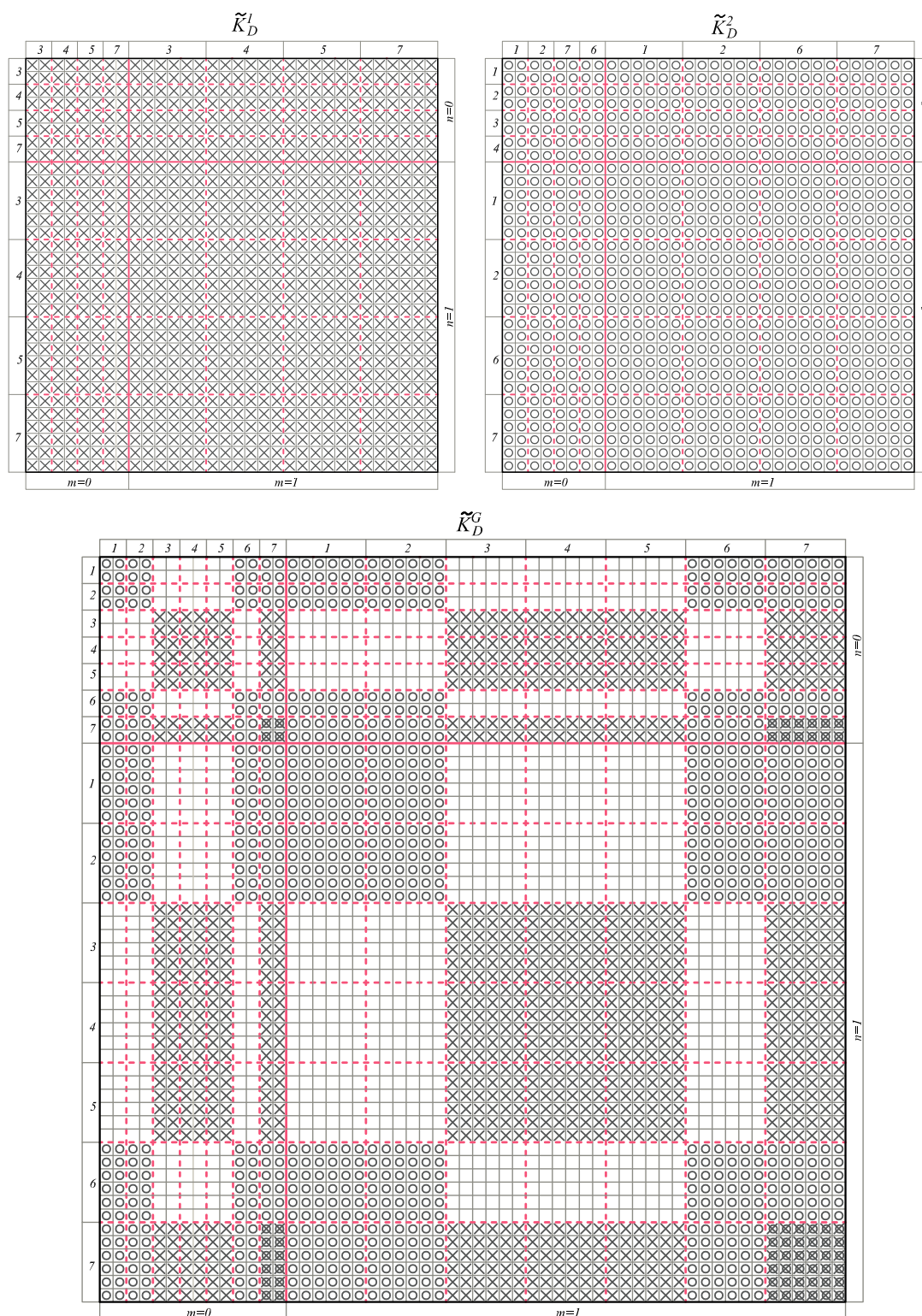
$$\left(\tilde{\mathbf{q}}_1^2\right)^T = \left[ {}^1W_1^S \quad {}^1W_1^A \quad {}^1\Phi_{y1}^S \quad {}^1\Phi_{y1}^A \quad {}^1\Phi_{x1}^S \quad {}^1\Phi_{x1}^A \quad \dots \right. \\ \left. \dots \quad {}^6W_1^S \quad {}^6W_1^A \quad {}^6\Phi_{x1}^S \quad {}^6\Phi_{x1}^A \quad {}^6\Phi_{y1}^S \quad {}^6\Phi_{y1}^A \right]_{1 \times 24} \quad (3.98)$$

У једначинама (3.94)-(3.98), горњи десни индекс односи се на број плоче, односно горњи леви индекс означава број контуре према Слици 3.9-(а).

Свакој плочи одговара динамичка матрица крутости континуалног елемента *Mindlin*-ове плоче  $\tilde{\mathbf{K}}_D$ . Ранг ових матрице је  $24M+8$  и оне су за  $M=1$  шематски приказане на Слици 3.10. Формирање глобалне динамичке матрице крутости система  $\tilde{\mathbf{K}}_D^G$  је приказано је на истој слици и њен ранг је  $n_c \cdot (6M + 2)$ , где је  $n_c$ -број контура.

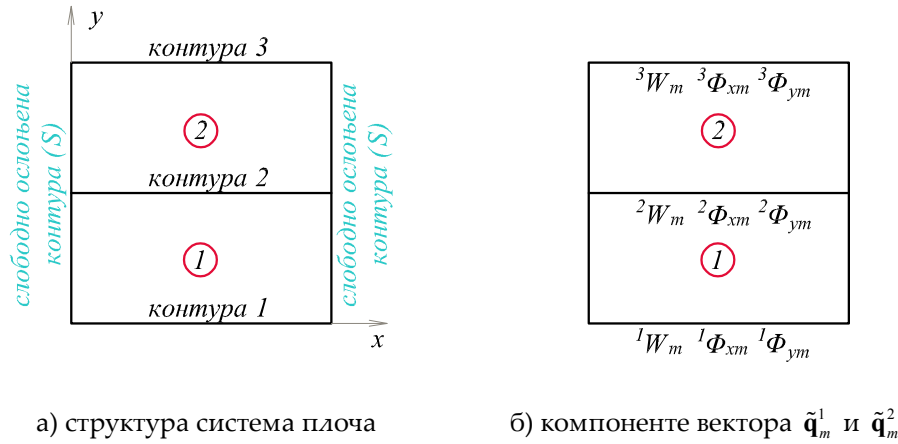
У случају да се систем састоји од плоча које су на две паралелне контуре слободно ослоњене, може да се користи континуални елемент *Maurice Lévy*-ове плоче. Решења добијена применом динамичке матрице крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$  су тачна. Такође, ред ових матрица је знатно нижи него ред матрица

$\tilde{\mathbf{K}}_D$ , па је самим тим и време потребно за прорачун краће. Њихов недостатак је што не могу да се користе за произвољне граничне услове.



Слика 3.10 – Формирање глобалне динамичке матрице крутости система који се састоји од две Mindlin-ове плоче ( $M = 1$ )

На Слици 3.11-(а) је приказан систем који се састоји од две *Maurice Lévy*-еве плоче, повезане дуж контуре 2.



а) структура система плоча                      б) компоненте вектора  $\tilde{\mathbf{q}}_m^1$  и  $\tilde{\mathbf{q}}_m^2$

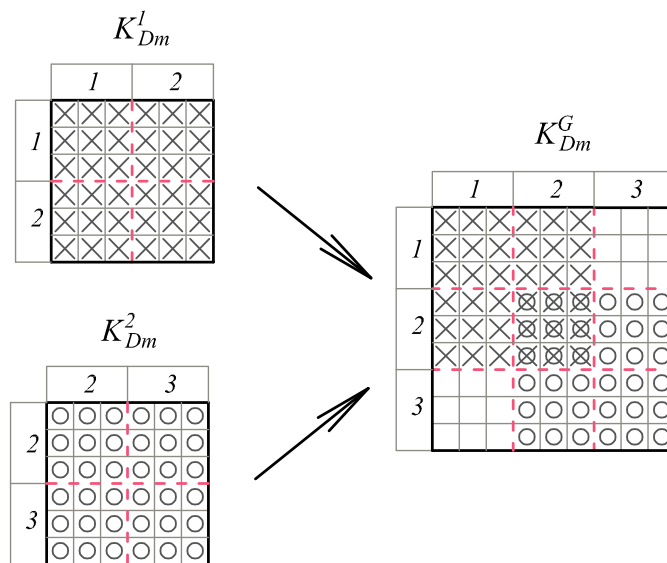
Слика 3.11 - Нумерација плоча и контура и компоненте вектора померања

Основне непознате за сваку плочу су компоненте вектора  $\hat{\mathbf{q}}_m$ , једначина (3.92), које су приказане на Слици 3.11-(б) и дате следећим изразима:

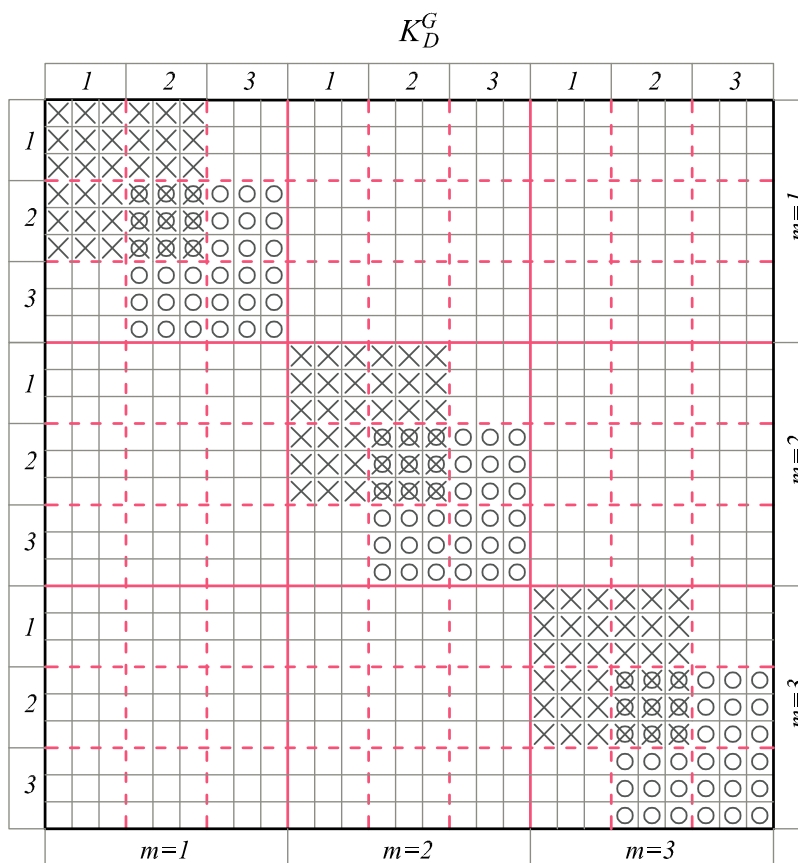
$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{q}}_m^1)^T &= \left[ {}^1W_m \quad {}^1\Phi_{xm} \quad {}^1\Phi_{ym} \quad {}^2W_m \quad {}^2\Phi_{xm} \quad {}^2\Phi_{ym} \right]_{1 \times 6} \\ (\hat{\mathbf{q}}_m^2)^T &= \left[ {}^2W_m \quad {}^2\Phi_{xm} \quad {}^2\Phi_{ym} \quad {}^3W_m \quad {}^3\Phi_{xm} \quad {}^3\Phi_{ym} \right]_{1 \times 6} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Горњи десни индекс се односи на број плоче, односно горњи леви индекс означава број контуре. Свакој плочи одговара динамичка матрица крутости континуалног елемента *Maurice Lévy*-еве плоче, која је реда 6. Шематски приказ ових матрица крутости, као и глобалне матрице крутости система приказан је на Слици 3.12. Ред глобалне динамичке матрице крутости за сваки хармоник је  $3 \cdot n_c$ , где је  $n_c$ -број контура паралелних са  $x$ -осом, Слика 3.11-(а).

На Слици 3.13 је шематски приказана глобална динамичка матрица крутости система са Сlike 3.11-(а) за три усвојена хармоника  $m = 1, 2$  и  $3$ . Треба напоменути да глобална динамичка матрица крутости на Слици 3.13 садржи тачне сопствене вредности које одговарају само 1., 2. и 3. хармонику, док глобална динамичка матрица крутости на Слици 3.10 садржи све сопствене вредности, али њихова тачност зависи од броја чланова реда у решењу  $M$ .



Слика 3.12 – Формирање глобалне динамичке матрице крутости система који се састоји од две Maurice Lévy-еве плоче



Слика 3.13 – Глобална динамичка матрица крутости система који се састоји од две Maurice Lévy-еве плоче за прва три хармоника

Када је формирана глобална динамичка матрица крутости, гранични услови се аплицирају кроз брисање врста и колона које одговарају спреченим померањима. У нумеричким примерима користиће се гранични услови који су дефинисани на следећи начин:

- слободно ослоњена контура  $S$ : у случају да је контура паралелне са  $x$ -осом,  $w$  и  $\phi_y$  су спречени, односно ако је паралелне са  $y$ -осом,  $w$  и  $\phi_x$  су спречени,
- укљештена контура  $C$ : померање  $w$  и обе ротације  $\phi_y$  и  $\phi_x$  су спречени,
- слободна контура  $F$ : померање  $w$  и обе ротације  $\phi_y$  и  $\phi_x$  су различити од нуле.

Сопствене фреквенције одговарају фреквенцијама за које је  $\det(\tilde{\mathbf{K}}_D^G) = 0$ , односно  $\det(\mathbf{K}_{Dm}^G) = 0$ . Тражење нула детерминанте матрице крутости замењено је тражењем максимума (*peak*-ова) израза  $1/\log\det(\tilde{\mathbf{K}}_D^G)$ , односно  $1/\log\det(\mathbf{K}_{Dm}^G)$  (Doyle 1997), и за ту сврху је написан код у програму *Matlab*.

Када су одређене сопствене фреквенције, облици осциловања могу да се одреде на основу добро познате обрнуте (уназад) процедуре. Вектор сила  $\tilde{\mathbf{Q}}$  је идентички једнак нули па једначина (3.87) постаје:

$$\tilde{\mathbf{K}}_D \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.100)$$

Динамичка матрица крутости  $\tilde{\mathbf{K}}_D$  се израчуна за сопствену фреквенцију за коју се одређује облик осциловања и онда, брисањем једне њене врсте и додељивањем произвољне вредности једној компоненти вектора померања  $\tilde{\mathbf{q}}$ , могу да одреде све остале компоненте у функцији изабране.

### 3.1.7 Нумерички примери

За верификацију приказаног поступка написан је програм у *Matlab*-у, који се заснива на примени изведених динамичких матрица крутости  $\tilde{\mathbf{K}}_D$  и  $\mathbf{K}_{Dm}$  (*Maurice Lévy*-јева плоча) континуалног елемента *Mindlin*-ове плоче, и служи за одређивање сопствених фреквенција и облика осциловања плоча и система плоча. Решења добијена применом динамичке матрице крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$  (*Maurice Lévy*-јев континуални елемент) су тачна и могу да



служе као репер при одређивању брзине конвергенције решења добијених применом динамичке матрице крутости  $\tilde{\mathbf{K}}_D$ , која зависе од број чланова реда решења  $M$ . Комбинација граничних услова означена са *CSSF* значи да је контура 1, Слика 3.6, укљештена, контуре 2 и 3 слободно ослоњене и контура 4 слободна. Код примене *Maurice Lévy*-јевог континуалног елемента плоче, Слика 3.7, комбинација граничних услова означена са *SF* означава да је контура  $y=0$  слободно ослоњена, односно да је контура  $y=2b$  слободна. У свим примерима је  $\nu=0.3$  и  $k=5/6$ .

Шест комбинација граничних услова, од 21 могуће комбинације слободних, слободно ослоњених и укљештених контура (Liew, Xiang and Kitipornchai, 1993), је изабрано да би се верификовао нумерички модел. Код плоче са *CCCC* комбинацијом граничних услова сва померања и ротације на контурама су једнаки нули, што доводи до брисања свих врста и колоне у динамичкој матрици крутости. Из тог разлога, *CCCC* плоча мора да се моделира са најмање два континуална елемента.

### Пример 3.1

У првом примеру је испитана брзина конвергенције решења код примене континуалног елемента *Mindlin*-ове плоче. За правоугаону плочу, са односом страна  $a/b=0.4$  и односом дебљине и распона  $h/2b=0.2$ , одређено је првих осам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$ . Резултати за шест изабраних комбинација граничних услова су дати у Табели 3.1. Коришћено је 3-15 чланова реда решења. У последњој колони приказана је релативна разлика у процентима за решење добијено са  $M=3$  и  $M=15$  чланова реда. Види се да ова релативна разлика, за све сопствене фреквенције и граничне услове у Табели 3.1, не прелази 1 %.

Табела 3.1 - Првих осам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за правоугаону плочу ( $a/b = 0.4$ ) са различитим комбинацијама граничних услова:  $\nu = 0.3$ ,  $k = 5/6$ ,  $h/2b = 0.2$ .

ГУ	тон	ДМК							$\Delta \% M = 3$ и $M = 15$
		$M = 3$	$M = 5$	$M = 7$	$M = 9$	$M = 11$	$M = 13$	$M = 15$	
CCCC	1	68.21	68.21	68.21	68.21	68.21	68.21	68.21	0.00
	2	78.90	78.91	78.91	78.91	78.91	78.93	78.93	0.04
	3	96.40	96.44	96.44	96.44	96.44	96.44	96.44	0.04
	4	118.50	118.70	118.70	118.70	118.70	118.71	118.71	0.18
	5	129.60	129.60	129.60	129.60	129.60	129.56	129.56	-0.03
	6	138.20	138.30	138.30	138.30	138.30	138.31	138.31	0.08
	7	143.75	143.95	143.96	143.96	143.96	143.96	143.96	0.15
	8	151.70	151.90	151.90	151.90	151.80	151.85	151.83	0.09
SSSS	1	51.08	51.13	51.14	51.14	51.15	51.15	51.15	0.14
	2	66.08	66.24	66.29	66.30	66.32	66.33	66.33	0.38
	3	87.70	87.88	87.93	87.94	87.95	87.96	87.96	0.30
	4	112.81	113.25	113.32	113.34	113.34	113.35	113.35	0.48
	5	125.31	125.35	125.37	125.37	125.37	125.37	125.37	0.05
	6	134.03	134.30	134.33	134.34	134.36	134.36	134.36	0.25
	7	140.35	140.72	140.77	140.78	140.79	140.81	140.81	0.33
	8	147.90	148.26	148.32	148.35	148.36	148.36	148.36	0.31
SCSC	1	52.18	52.17	52.17	52.17	52.17	52.17	52.17	-0.02
	2	68.70	68.69	68.69	68.68	68.68	68.68	68.68	-0.03
	3	90.60	90.63	90.61	90.61	90.61	90.60	90.60	0.00
	4	115.40	115.55	115.55	115.54	115.54	115.54	115.54	0.12
	5	125.49	125.50	125.50	125.50	125.50	125.50	125.50	0.01
	6	134.63	134.75	134.76	134.77	134.76	134.76	134.76	0.10
	7	142.06	142.22	142.23	142.22	142.22	142.22	142.22	0.11
	8	148.80	148.97	148.98	148.98	148.98	148.98	148.98	0.12
CSSF	1	55.18	55.20	55.20	55.20	55.21	55.21	55.21	0.05
	2	62.16	62.20	62.22	62.23	62.23	62.23	62.23	0.11
	3	76.23	76.46	76.48	76.49	76.49	76.50	76.50	0.35
	4	96.76	96.96	96.98	96.99	96.99	96.99	96.99	0.24
	5	120.58	121.25	121.31	121.33	121.33	121.34	121.34	0.63
	6	125.03	125.13	125.14	125.14	125.14	125.14	125.14	0.09
	7	130.51	130.62	130.63	130.63	130.63	130.63	130.63	0.09
	8	140.47	140.95	141.00	141.01	141.02	141.02	141.02	0.39

ГУ	тон	ДМК							$\Delta \% M = 3$ и $M = 15$
		$M = 3$	$M = 5$	$M = 7$	$M = 9$	$M = 11$	$M = 13$	$M = 15$	
CFCF	1	64.60	64.61	64.62	64.62	64.62	64.62	64.62	0.03
	2	65.87	65.87	65.88	65.88	65.88	65.88	65.88	0.02
	3	71.64	71.69	71.69	71.69	71.69	71.69	71.69	0.07
	4	84.40	84.69	84.72	84.73	84.73	84.73	84.73	0.39
	5	104.35	104.60	104.64	104.65	104.65	104.66	104.66	0.30
	6	125.99	126.03	126.03	126.03	126.03	126.03	126.03	0.03
	7	127.26	128.16	128.17	128.17	128.17	128.17	128.18	0.72
	8	127.98	128.29	128.36	128.39	128.40	128.40	128.40	0.33
CSFF	1	19.49	19.50	19.52	19.52	19.52	19.52	19.52	0.15
	2	28.82	28.82	28.82	28.82	28.82	28.82	28.82	0.00
	3	47.69	47.70	47.70	47.70	47.70	47.70	47.70	0.02
	4	69.06	69.06	69.05	69.05	69.05	69.05	69.05	-0.01
	5	73.65	73.68	73.68	73.68	73.69	73.69	73.69	0.05
	6	79.39	79.35	79.33	79.33	79.33	79.33	79.32	-0.09
	7	94.95	95.04	95.04	95.04	95.04	95.04	95.04	0.09
	8	102.78	102.71	102.69	102.69	102.67	102.67	102.67	-0.11

### Пример 3.2

У оквиру овог примера су резултати добијени применом ДМК за  $M = 15$  из Табеле 3.1 упоређени са доступним резултатима из литературе (Liew, Xiang and Kitipornchai, 1993), (Xing and Liu, 2009), као и са резултатима комерцијалног програма заснованог на *MKE-Abaqus*-а (Abaqus, 2009). Приказ резултата је дат у Табели 3.2. У свом раду, Xing је сопствене фреквенције, за комбинацију слободно ослоњених  $S$  и укљештених контура  $C$ , одредио применом аналитичког решења у затвореном облику које се заснива на методи раздвајања променљивих, док је Liew користио  $pb-2$  Rayleigh-Ritz-ов метод. Помоћу програма *Abaqus* одређене су сопствене фреквенције плоче димензија  $1.6 \times 4$   $m$  и дебљине  $0.8$   $m$ , при чему су примењене три различите густине мреже коначних елемената:  $8 \times 20$ ,  $20 \times 50$ ,  $40 \times 100$  и  $80 \times 200$ .  $S4R$  је назив коначног елемента љуске са 4 чвора, који узима у обзир деформацију смицања, коришћеног у анализи.

Из Табеле 3.2 може да се закључи да постоји скоро потпуно поклапање између резултата добијених применом ДМК и резултата добијених применом  $pb$ -2 Rayleigh-Ritz-ов метод, као и резултата из Abaqus-а код примене мреже од 80x200 елемената. Сопствене фреквенције које је одредио Xing су нешто више. Знак “-” у табели значи да Xing није решио проблем слободних вибрација плоче са слободним контурама  $F$ . Такође, што је виша сопствена фреквенција, то је већи број коначних елемената потребан у анализи да би се добили резултати задовољавајуће тачности, па у динамичкој анализи у области високих фреквенција највише долазе до изражаја предности метода динамичке крутости над МКЕ.

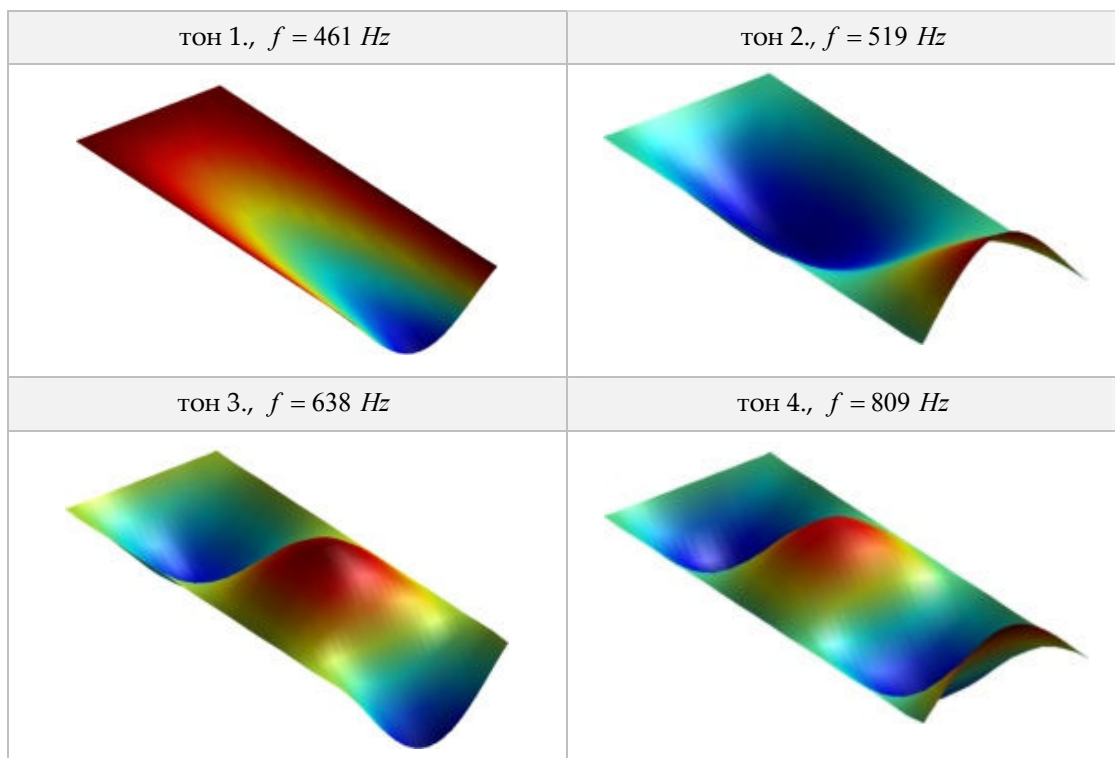
Прва четири облика осциловања плоча са  $CSSF$ ,  $CFCF$  и  $CSFF$  комбинацијом граничних услова су приказана на Сликама 3.14, 3.15 и 3.16. Поред облика осциловања дате су и вредности одговарајућих сопствених фреквенција у (Hz) за:  $b = 4 \text{ m}$ ,  $E = 30 \text{ GPa}$  и  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ .

Табела 3.2 - Првих осам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за правоугаону плочу ( $a/b = 0.4$ ) са различитим комбинацијама граничних услова:  $\nu = 0.3$ ,  $k = 5/6$ ,  $h/2b = 0.2$ .

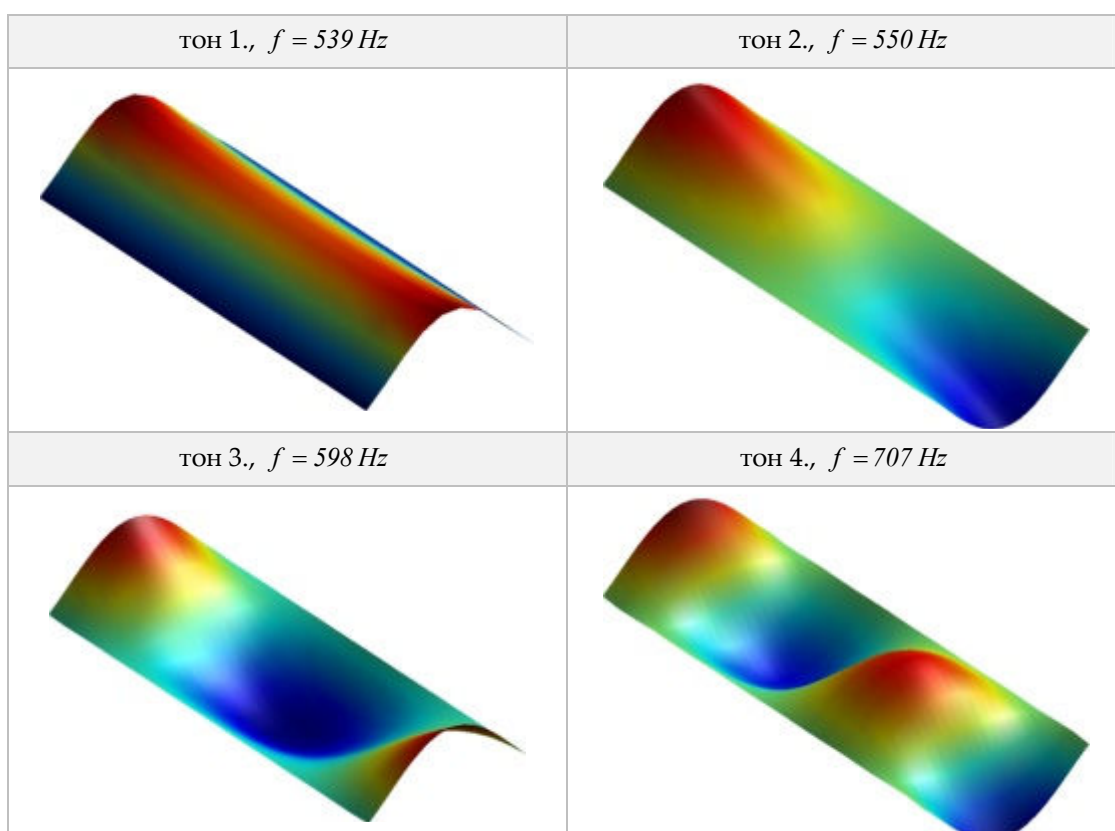
ГУ	тон	ДМК $M = 15$	(Liew, 1993)	(Yufeng Xing, 2009)	Abaqus ( $b = 2$ )			
					8x20	20x50	40x100	80x200
CCCC	1	68.21	68.21	68.69	69.07	68.35	68.24	68.22
	2	78.93	78.92	80.28	79.61	79.03	78.95	78.93
	3	96.44	96.44	98.27	97.36	96.59	96.48	96.45
	4	118.71	118.71	120.63	120.55	119.00	118.78	118.73
	5	129.56	129.57	130.42	134.10	130.28	129.74	129.61
	6	138.31	138.30	140.52	142.24	138.94	138.46	138.34
	7	143.96	143.96	145.71	147.59	144.53	144.10	143.99
	8	151.83	151.83	154.78	155.15	152.36	151.97	151.86
SSSS	1	51.15	51.64	51.82	51.69	51.24	51.18	51.16
	2	66.33	67.49	67.94	66.79	66.41	66.35	66.34
	3	87.963	89.30	89.87	88.75	88.10	88.01	87.98
	4	13.353	114.47	115.03	115.16	113.66	113.44	113.39
	5	125.37	125.43	125.48	130.12	126.12	125.56	125.43
	6	134.36	134.56	134.73	138.44	135.02	134.52	134.40
	7	140.81	141.53	142.05	144.52	141.41	140.96	140.85
	8	148.36	148.68	148.98	151.75	148.91	148.51	148.41

3. Континуални елемент Mindlin-ове плоче за анализу вибрација и избочавања

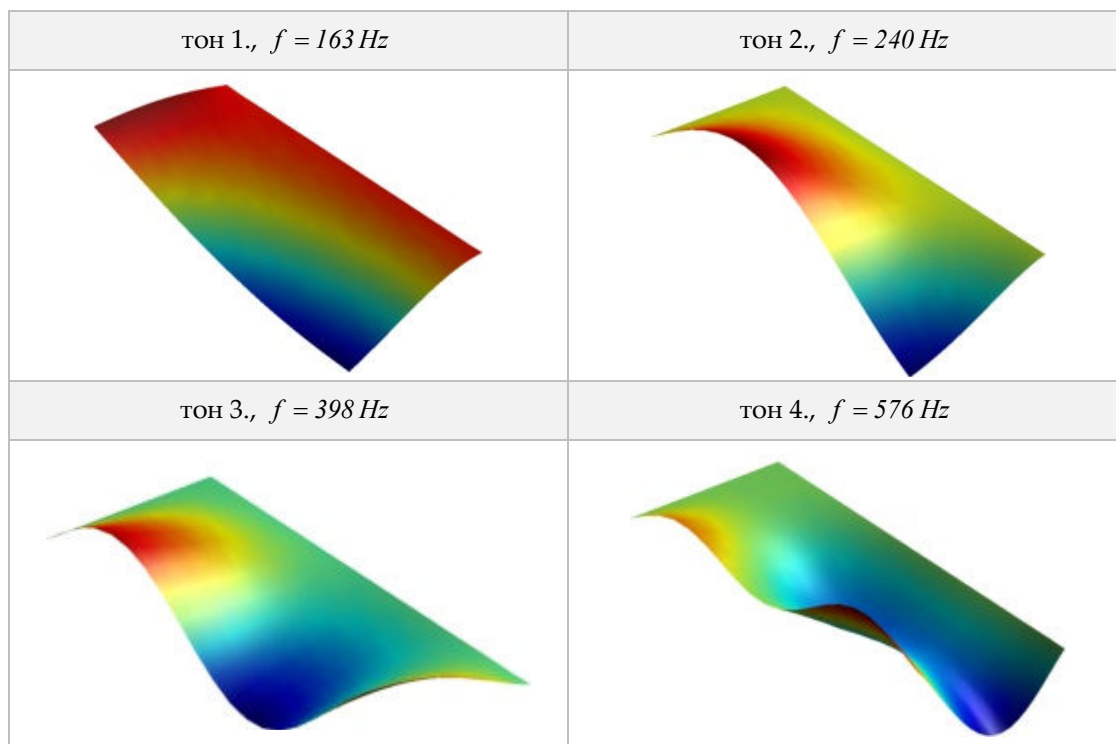
ГУ	тон	ДМК $M = 15$	(Liew, 1993)	(Yufeng Xing, 2009)	Abaqus ( $b = 2$ )			
					8x20	20x50	40x100	80x200
SCSC	1	52.17	51.68	52.60	52.68	52.25	52.19	52.17
	2	68.68	68.67	69.60	69.13	68.75	68.69	68.68
	3	90.60	90.60	91.73	91.44	90.74	90.64	90.61
	4	115.54	115.52	116.64	117.38	115.82	115.60	115.55
	5	125.50	125.50	125.60	130.23	126.24	125.68	125.55
	6	134.76	134.76	135.11	138.80	135.40	134.92	134.80
	7	142.22	142.22	143.25	145.90	142.81	142.36	142.26
	8	148.98	148.98	149.58	152.33	149.51	149.11	149.02
CSSF	1	55.21	55.21		55.42	55.34	55.24	55.22
	2	62.23	62.23		62.38	62.33	62.25	62.24
	3	76.50	76.51		76.63	76.58	76.52	76.51
	4	96.99	97.00		97.20	97.13	97.03	97.00
	5	121.34	121.34	-	121.81	121.64	121.41	121.35
	6	125.14	125.13		126.34	125.91	125.32	125.17
	7	130.63	130.63		131.72	131.32	130.81	130.68
	8	141.02	141.03		141.93	141.61	141.17	141.06
CFCF	1	64.62	64.64		65.66	64.80	64.67	64.64
	2	65.88	65.90		66.80	66.04	65.93	65.90
	3	71.69	71.69		72.26	71.78	71.71	71.69
	4	84.73	84.74		85.12	84.79	84.74	84.73
	5	104.66	104.67	-	105.47	104.80	104.70	104.67
	6	126.03	126.03		130.35	126.79	126.22	126.07
	7	128.18	128.18		130.82	128.72	128.36	128.22
	8	128.40	128.43		132.77	128.90	128.49	128.43
CSFF	1	19.52	19.52		19.54	19.52	19.52	19.52
	2	28.82	28.82		28.84	28.82	28.82	28.82
	3	47.70	47.70		47.96	47.74	47.71	47.70
	4	69.05	69.05		70.13	69.22	69.09	69.06
	5	73.69	73.68	-	74.73	73.85	73.73	73.69
	6	79.32	79.32		80.30	79.48	79.36	79.33
	7	95.04	95.04		95.85	95.17	95.07	95.05
	8	102.67	102.67		105.17	103.07	102.77	102.69



Слика 3.14 – Прва четири облика осциловања за *CSSF* правоугаону плочу ( $a/b = 0.4$ )



Слика 3.15 – Прва четири облика осциловања за *CFCF* правоугаону плочу ( $a/b = 0.4$ )

Слика 3.16 – Прва четири облика осциловања за *CSFF* правоугаону плочу ( $a/b = 0.4$ )**Пример 3.3**

У Табели 3.3 је приказано првих 10 бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega}$  добијених применом ДМК по *Mindlin*-овој, као и *Kirchhoff*-овој *CPT* (*classical plate theory*) теорији плоча. Изабрана је квадратна плоча ( $b/a = 1$ ) и истих шест комбинација граничних услова као и у Примеру 3.1. Однос дебљине и распона иде од  $h/b = 0.01$  (танка плоча) до  $h/b = 0.2$  (умерено дебела плоча). У табели је дата и релативна разлика у % између решења за  $\bar{\omega}$  заснованог на *Kirchhoff*-овој теорији, које не зависе од односа  $h/b$ , и *Mindlin*-овој теорији за  $h/b = 0.2$ . На основу овог поређења, може да се закључи да ако се за умерено дебеле плоче  $h/b = 0.2$  користи *Kirchhoff*-ова теорија плоча добијају се прецењене сопствене фреквенције. Што је тон виши, то је и релативна разлика између решења већа, па за тотално укљештену плочу она иде и до 121.40 % (10. тон). Број чланова реда  $M$ , који је коришћен за добијање приказаних резултата, је такође дат у табели.

Табела 3.3 - Првих десет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за квадратну плочу:  $a/b = 1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $k = 5/6$ .

ГУ	тон	CPT	$h/2b$											$\Delta\% \text{ CPT-}$ $h/2b = 0.2$
			0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	
CCCC ( $M = 7$ )	1	35.99	35.96	35.84	35.36	34.56	33.63	32.53	31.35	30.12	28.90	27.69	26.53	35.66
	2	73.39	73.12	72.76	71.09	68.49	65.39	62.05	58.62	55.26	52.07	49.08	46.30	58.51
	3	108.20	107.90	106.90	103.50	98.54	92.84	86.96	81.22	75.83	70.85	66.29	62.17	74.04
	4	131.60	131.10	129.80	125.00	118.10	110.30	102.40	94.88	87.90	81.58	75.89	70.83	85.80
	5	132.20	131.90	130.40	125.70	119.00	111.20	103.40	95.90	88.93	82.61	76.91	71.81	84.10
	6	165.00	164.20	162.30	155.00	145.20	134.40	123.90	114.10	105.20	97.29	90.27	84.04	96.34
	7	210.50	209.50	206.40	195.50	181.00	165.60	150.90	137.60	125.90	115.60	106.60	98.83	112.99
	8	220.00	218.90	215.40	203.40	187.80	171.60	156.40	142.70	130.60	120.00	110.80	102.70	114.22
	9	242.10	240.70	236.60	222.40	204.20	185.50	168.10	152.70	139.30	127.70	117.60	108.90	122.31
	10	243.10	241.70	237.70	223.70	205.70	187.10	169.70	154.20	140.60	128.90	118.70	109.80	121.40
SSSS ( $M = 9$ )	1	19.63	19.66	19.66	19.60	19.50	19.30	19.06	18.78	18.48	18.15	17.81	17.44	12.56
	2	49.45	49.39	49.15	48.61	47.83	46.72	45.46	44.07	42.61	41.12	39.63	38.14	29.65
	3	79.02	78.88	78.52	77.14	75.16	72.61	69.77	66.75	63.72	60.73	57.87	55.13	43.33
	4	98.65	98.54	97.94	95.96	92.90	89.16	85.04	80.80	76.60	72.54	68.73	65.13	51.47
	5	128.22	128.03	127.07	123.71	118.80	112.89	106.64	100.40	94.39	88.74	83.51	78.67	62.98
	6	131.94	131.38	130.07	160.15	152.16	143.01	133.61	124.53	116.04	108.25	101.16	94.76	39.24
	7	167.73	167.35	165.79	169.08	160.27	150.20	139.99	130.20	121.09	112.77	105.26	98.48	70.32
	8	177.67	176.94	175.26	187.00	176.38	164.50	152.60	141.33	130.92	121.63	113.22	105.68	68.12
	9	197.30	196.60	194.56	230.76	215.22	198.48	182.26	167.33	153.92	142.04	131.53	122.24	61.40
	10	246.50	245.51	242.27	239.45	222.85	205.11	188.01	172.32	158.32	145.92	135.01	125.37	96.62



3. Континуални елемент Mindlin-ове плоче за анализу вибрација и избочавања

ГУ	тон	CPT	$h/2b$										$\Delta\% \text{ CPT-}$ $h/2b = 0.2$	
			0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18		0.2
SCSC ( $M = 9$ )	1	29.01	29.01	28.89	28.53	28.05	27.42	26.66	25.85	24.99	24.11	23.23	22.36	29.74
	2	54.66	54.66	54.42	53.64	52.43	50.86	49.10	47.25	45.35	43.45	41.61	39.85	37.16
	3	69.29	69.29	68.81	67.31	65.05	62.28	59.22	56.06	52.97	50.00	47.22	44.62	55.29
	4	94.70	94.46	93.74	91.23	87.63	83.34	78.81	74.26	69.90	65.83	62.03	58.55	61.74
	5	102.13	101.89	101.41	99.02	95.54	91.38	86.84	82.25	77.77	73.50	69.50	65.76	55.31
	6	128.99	128.75	127.43	122.93	116.44	109.00	101.37	94.04	87.25	81.08	75.53	70.56	82.81
	7	140.25	139.77	138.46	133.84	127.23	119.73	112.06	104.63	97.70	91.33	85.54	80.29	74.68
	8	154.88	154.16	152.48	146.37	137.86	128.39	118.92	109.99	101.84	94.52	87.98	82.15	88.53
	9	170.46	169.74	168.19	162.19	153.80	144.30	134.60	125.27	116.60	108.68	101.51	95.03	79.37
	10	199.71	198.99	196.36	187.01	174.58	161.23	148.31	136.40	125.22	115.07	106.20	98.44	102.87
CSSF ( $M = 9$ )	1	16.78	16.78	16.78	16.60	16.46	16.24	15.97	15.68	15.34	15.00	14.64	14.27	17.59
	2	31.17	30.93	30.93	30.57	30.09	29.49	28.77	28.01	27.19	26.34	25.51	24.67	26.35
	3	51.31	51.31	51.07	50.35	49.15	47.68	45.98	44.19	42.33	40.47	38.65	36.91	39.01
	4	64.01	63.77	63.53	62.52	60.94	59.04	56.92	54.66	52.37	50.09	47.88	45.74	39.94
	5	67.61	67.37	67.01	65.69	63.81	61.50	58.93	56.24	53.57	50.98	48.50	46.15	46.50
	6	101.18	100.70	99.86	97.34	93.62	89.28	84.61	79.94	75.44	70.13	67.17	63.47	59.41
	7	105.49	105.25	104.41	101.59	97.50	92.60	87.37	82.15	77.11	72.40	68.05	64.06	64.67
	8	117.24	116.76	116.04	113.04	108.69	103.51	98.03	92.50	87.10	81.62	76.53	71.90	63.06
	9	122.51	122.27	121.19	117.48	112.16	105.97	99.52	93.18	87.24	82.11	77.37	72.98	67.87
	10	153.68	152.96	151.40	146.13	138.74	130.39	121.89	113.68	105.99	98.87	92.36	86.47	77.73

3. Континуални елемент Mindlin-ове плоче за анализу вибрација и избочавања

ГУ	тон	CPT	$h/2b$										$\Delta\% \text{ CPT-}$ $h/2b = 0.2$	
			0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18		0.2
CFCF ( $M = 9$ )	1	22.36	22.06	22.06	21.88	21.54	21.13	20.62	20.06	19.45	18.82	18.18	17.54	27.48
	2	27.08	26.37	26.25	25.89	25.37	24.72	24.00	23.22	22.40	21.55	20.71	19.88	36.22
	3	44.98	43.39	43.16	42.38	41.28	39.98	38.53	37.04	35.53	34.04	32.61	31.24	43.98
	4	61.62	61.14	60.66	59.46	57.58	55.26	52.67	49.99	47.30	44.68	42.21	39.88	54.51
	5	68.33	66.89	66.53	64.97	62.69	60.00	57.04	53.98	51.00	48.12	45.42	42.90	59.28
	6	81.01	79.60	79.00	77.14	74.64	71.66	68.45	65.19	61.96	58.86	55.90	53.10	52.56
	7	89.70	87.27	86.43	83.91	80.40	76.36	72.07	67.83	63.77	59.97	56.46	53.24	68.48
	8	120.76	119.64	118.56	114.48	108.65	101.92	94.97	88.23	81.93	76.17	70.95	66.29	82.17
	9	127.22	123.71	122.39	117.96	112.04	105.40	98.68	92.02	85.39	79.34	73.92	69.05	84.24
	10	128.22	126.11	124.79	120.24	113.88	106.60	99.16	92.20	86.17	80.62	75.55	70.94	80.74
CSFF ( $M = 7$ )	1	5.27	5.27	5.27	5.27	5.27	5.24	5.18	5.13	5.09	5.03	4.98	4.91	7.33
	2	19.18	18.94	18.94	18.82	18.62	18.37	18.08	17.76	17.42	17.04	16.66	16.27	17.89
	3	24.69	24.69	24.57	24.33	23.98	23.56	23.06	22.50	21.89	21.25	20.61	19.96	23.70
	4	43.16	42.92	42.68	42.02	41.08	39.95	38.70	37.36	36.00	34.63	33.29	31.98	34.96
	5	52.75	52.51	52.39	51.73	50.71	49.42	47.93	46.33	44.66	42.98	41.30	39.67	32.97
	6	63.77	63.53	63.29	62.16	60.46	58.35	55.98	53.50	51.00	48.55	46.18	43.95	45.10
	7	77.44	77.20	76.60	74.92	72.56	69.77	66.70	63.57	60.49	57.48	54.62	51.92	49.15
	8	83.67	83.43	82.71	80.74	77.92	74.56	70.99	67.33	63.77	60.36	57.17	54.18	54.43
	9	106.21	105.97	105.37	102.91	99.30	94.97	90.29	85.53	80.85	76.36	72.13	68.16	55.82
	10	120.36	119.64	118.56	114.72	109.57	103.66	97.53	91.55	85.83	80.53	75.61	71.09	69.31

**Пример 3.4**

У Табели 3.4 су резултати за бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega}$  из Табеле 3.3 за однос  $h/2b=0.2$  упоређени са резултатима доступним у литератури (Liew, Xiang and Kitipornchai, 1993), као и са резултатима добијеним помоћу програма *Abaqus*. У *Abaqus*-у је плоча димензија  $2 \times 2$   $m$  моделирана са  $100 \times 100$  *S4R* коначних елемената. Из табеле се види скоро апсолутно поклапање између резултата добијених применом ДМК, резултата добијених коришћењем  $pb-2$  Rayleigh-Ritz-овог метода, као и резултата добијених помоћу МКЕ.

Табела 3.4 - Првих десет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за квадратну плочу:  $a/b=1$ ,  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ ,  $h/2b=0.2$ .

\* - двоструке сопствене фреквенције

тон	ГУ	ДМК	(Liew, 1993)	<i>Abaqus</i>	ГУ	ДМК	(Liew, 1993)	<i>Abaqus</i>
1		26.53	26.52	26.53		14.27	14.26	14.26
2		46.30	46.30	46.31*		24.67	24.67	24.67
3		62.17	62.16	62.18		36.91	36.92	36.93
4		70.83	70.83	70.88		45.74	45.75	45.76
5	CCCC	71.81	71.81	71.86	CSSF	46.15	46.16	46.17
6	(M=7)	84.04	84.04	84.08*	(M=9)	63.47	63.48	63.50
7		98.83	98.82	98.92*		64.06	64.06	64.10
8		102.70	-	102.78		71.90	71.91	71.95
9		108.90	-	108.98		72.98	72.99	73.03
10		109.80	-	109.84		86.47	86.48	86.51
1		17.44	17.45	17.45		17.54	17.54	17.54
2		38.14	38.15	38.16*		19.88	19.89	19.89
3		55.13	55.15	55.16		31.24	31.24	31.24
4		65.13	65.15	65.18*		39.88	39.89	39.90
5	SSSS	78.67	78.70	78.73*	CFCF	42.90	42.91	42.92
6	(M=9)	94.76	94.77	94.86*	(M=9)	53.10	53.11	53.13
7		98.48	-	98.54		53.24	53.24	53.24
8		105.68	-	105.76*		66.29	66.29	66.34
9		122.24	-	122.33*		69.05	69.06	69.10
10		125.37	-	125.56*		70.94	70.95	70.96

тон	ГУ	ДМК	(Liew, 1993)	Abaqus	ГУ	ДМК	(Liew, 1993)	Abaqus
1		22.36	22.36	22.36		4.91	4.92	4.92
2		39.85	39.85	39.86		16.27	16.27	16.27
3		44.62	44.62	44.63		19.96	19.96	19.96
4		58.55	58.55	58.56		31.98	31.98	31.98
5	SCSC	65.76	65.77	65.81	CSFF	39.67	39.67	39.68
6	(M = 9)	70.56	70.56	70.61	(M = 7)	43.95	43.94	43.96
7		80.29	80.29	80.32		51.92	51.92	51.93
8		82.15	82.16	82.20		54.18	54.19	54.20
9		95.03	95.03	95.12		68.16	68.16	68.21
10		98.44	98.45	98.55		71.09	71.09	71.12

### Пример 3.5

Да би се одредио утицај *Poisson*-овог коефицијента на сопствене фреквенције, за све плоче из Примера 3.3 су одређене сопствене фреквенције када је  $\nu=0.15$ , уместо  $\nu=0.3$ , и резултати су приказани у Табели 3.5. У последњој колони су дате, за однос  $h/2b=0.2$ , релативне разлике у % између решења за сопствене фреквенције када је  $\nu=0.3$  (Табела 3.3) и  $\nu=0.15$  (Табела 3.5), које иду до 6.6%. На основу овог примера може да се закључи да када се *Poisson*-ов коефицијент смањује сопствене фреквенције расту.

Табела 3.5 - Првих десет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega(2b)^2 \sqrt{\rho h / D}$  за квадратну плочу:  $a/b = 1, \nu = 0.15, k = 5/6$ .

ГУ	тон	CPT	h/2b											Δ % $\nu = 0.15$ - $\nu = 0.3$ за h/2b = 0.2
			0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	
CCCC (M = 7)	1	35.98	35.96	35.84	35.41	34.79	33.98	33.00	31.97	30.87	29.76	28.64	27.54	3.67
	2	73.40	73.12	72.76	71.44	69.20	66.47	63.46	60.34	57.22	54.22	51.35	48.65	4.83
	3	108.20	107.90	106.90	104.20	99.85	94.77	89.38	84.07	78.96	74.17	69.74	65.66	5.32
	4	131.60	131.10	129.80	125.90	119.90	112.90	105.70	98.57	91.89	85.73	80.11	75.04	5.61
	5	132.20	131.90	130.40	126.60	120.70	113.80	106.60	99.56	92.90	86.75	81.14	76.05	5.58
	6	165.00	164.20	162.30	156.40	147.70	137.90	128.20	118.90	110.30	102.50	95.51	89.26	5.85
	7	210.50	209.50	206.40	197.50	184.70	170.60	156.80	144.00	132.50	122.20	113.20	105.20	6.06
	8	220.00	218.90	215.40	205.60	191.70	176.80	162.50	149.30	137.40	127.00	117.70	109.50	6.21
	9	242.10	240.70	236.60	225.10	208.80	191.50	175.00	160.10	146.90	135.20	125.10	116.10	6.20
	10	243.10	241.70	237.70	226.30	210.10	193.00	176.50	161.10	148.20	136.50	126.20	117.10	6.23
SSSS (M = 9)	1	19.63	19.63	19.75	19.63	19.51	19.35	19.13	18.91	18.64	18.34	18.03	17.70	1.47
	2	49.45	49.20	49.20	48.70	48.00	47.06	45.94	44.69	43.36	41.99	40.61	39.24	2.80
	3	79.02	78.77	78.52	77.40	75.62	73.36	70.82	68.08	65.28	62.51	59.80	57.19	3.60
	4	98.65	98.40	98.03	96.29	93.64	90.29	86.57	82.68	78.75	74.98	71.31	67.87	4.04
	5	128.22	127.97	127.23	124.30	119.93	114.64	108.94	103.16	97.51	92.14	87.09	82.41	4.54
	6	167.73	167.23	165.99	161.14	154.02	145.74	137.09	128.57	120.50	113.00	106.10	99.80	5.05
	7	177.67	177.17	175.55	170.15	162.26	153.19	143.75	134.55	125.87	117.84	110.51	103.82	5.14
	8	197.30	196.80	194.81	188.29	178.83	168.04	157.02	146.38	136.45	127.38	119.12	111.67	5.36
	9	246.50	245.75	242.89	232.71	218.75	203.42	188.23	174.00	161.04	149.39	138.99	129.70	5.75
	10	256.68	255.44	252.46	241.59	226.66	210.34	194.34	179.34	165.77	153.61	142.80	133.14	5.84

3. Континуални елемент Mindlin-ове плоче за анализу вибрација и избочавања

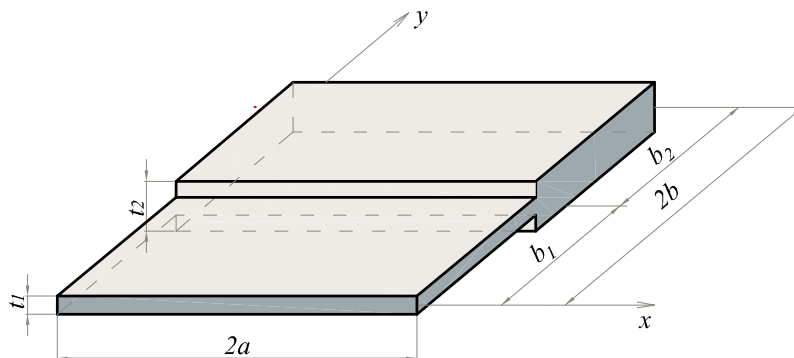
ГУ	тон	CPT	$h/2b$											$\Delta \% \nu = 0.15$ - $\nu = 0.3$ за $h/2b = 0.2$
			0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	
SCSC ( $M = 9$ )	1	28.82	28.82	28.82	28.58	28.20	27.65	26.99	26.28	25.51	24.71	23.90	23.10	3.20
	2	54.67	54.67	54.54	53.80	52.76	51.37	49.82	48.12	46.40	44.64	42.92	41.25	3.39
	3	69.33	69.33	68.83	67.59	65.64	63.21	60.48	57.63	54.77	51.98	49.31	46.79	4.64
	4	94.67	94.42	93.80	91.69	88.58	84.76	80.63	76.45	72.36	68.46	64.80	61.40	4.64
	5	102.13	102.13	101.51	99.46	96.41	92.65	88.56	84.34	80.15	76.11	72.28	68.68	4.25
	6	129.21	128.71	127.72	123.81	118.11	111.44	104.46	97.59	91.10	85.11	79.63	74.67	5.50
	7	140.14	139.90	138.78	134.68	128.88	122.10	115.02	108.09	101.49	95.34	89.69	84.51	4.99
	8	154.81	154.31	152.82	147.54	140.02	131.45	122.68	114.24	106.40	99.25	92.77	86.94	5.51
	9	170.46	169.96	168.47	163.25	155.80	147.16	138.21	129.46	121.21	113.56	106.54	100.16	5.12
	10	199.78	199.04	196.80	188.72	177.67	165.43	153.34	141.97	131.63	121.60	112.66	104.77	6.04
CSSF ( $M = 9$ )	1	17.15	17.15	17.02	16.96	16.81	16.65	16.42	16.15	15.87	15.55	15.21	14.86	3.97
	2	31.81	31.81	31.68	31.31	30.85	30.28	29.64	28.91	28.13	27.33	26.52	25.71	4.05
	3	51.93	51.93	51.68	51.00	50.03	48.73	47.21	45.58	43.86	42.13	40.41	38.74	4.72
	4	64.61	64.61	64.23	63.24	61.83	60.07	58.10	55.97	53.81	51.64	49.52	47.46	3.62
	5	68.58	68.33	68.08	66.90	65.27	63.18	60.80	58.33	55.80	53.32	50.90	48.60	5.04
	6	102.38	102.13	101.51	99.08	95.71	91.69	87.34	82.89	78.56	74.39	70.47	66.80	4.99
	7	106.35	106.10	105.36	103.00	99.35	94.95	90.17	85.29	80.53	75.99	71.72	67.77	5.47
	8	117.78	117.28	116.66	113.93	110.00	105.29	100.19	94.98	89.90	85.03	80.43	76.07	5.48
	9	123.74	123.50	122.50	119.27	114.59	108.96	103.00	97.01	91.26	85.87	80.87	76.31	4.36
	10	155.05	154.55	153.06	148.28	141.51	133.75	125.73	117.88	110.43	103.52	97.14	91.32	5.31

3. Континуални елемент Mindlin-ове плоче за анализу вибрација и избочавања

ГУ	тон	CPT	$h/2b$											$\Delta \% \nu = 0.15$ - $\nu = 0.3$ за $h/2b = 0.2$
			0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	
CFCF ( $M = 9$ )	1	22.36	22.36	22.24	22.12	21.83	21.46	21.02	20.54	20.00	19.43	18.84	18.24	3.84
	2	27.08	27.08	27.08	26.77	26.34	25.75	25.10	24.35	23.57	22.78	21.96	21.16	6.05
	3	44.98	44.73	44.48	43.73	42.70	41.47	40.06	38.60	37.11	35.64	34.19	32.81	4.79
	4	61.62	61.38	61.25	60.13	58.52	56.50	54.19	51.73	49.24	46.76	44.38	42.12	5.32
	5	68.33	68.33	67.84	66.59	64.61	62.18	59.46	56.61	53.76	50.99	48.33	45.83	6.39
	6	81.01	80.76	80.26	78.52	76.12	73.30	70.22	67.07	63.93	60.88	57.97	55.19	3.79
	7	89.70	89.45	88.71	86.47	83.28	79.51	75.46	71.38	67.41	63.64	60.11	56.84	6.33
	8	120.76	120.51	119.52	115.98	110.87	104.83	98.42	92.06	86.01	80.38	75.22	70.53	6.01
	9	127.22	126.48	125.24	121.20	115.63	109.33	102.85	96.52	90.36	84.39	78.94	74.00	6.69
	10	128.22	127.97	126.85	122.94	117.24	110.58	103.64	96.81	90.50	84.93	79.82	75.12	5.56
CSFF ( $M = 7$ )	1	5.72	5.72	5.59	5.59	5.59	5.53	5.49	5.45	5.40	5.34	5.29	5.24	6.30
	2	19.88	19.88	19.88	19.69	19.51	19.26	18.98	18.68	18.33	17.97	17.60	17.22	5.52
	3	25.10	25.10	24.97	24.79	24.48	24.10	23.63	23.11	22.54	21.94	21.33	20.71	3.62
	4	44.73	44.73	44.48	43.80	42.95	41.87	40.65	39.36	38.04	36.68	35.34	34.03	6.02
	5	53.68	53.42	53.30	52.74	51.81	50.63	49.27	47.77	46.22	44.62	43.02	41.45	4.29
	6	64.36	64.36	63.99	63.05	61.50	59.61	57.45	55.12	52.75	50.41	48.11	45.91	4.27
	7	79.51	79.27	78.89	77.28	75.08	72.43	69.53	66.51	63.47	60.52	57.68	54.96	5.53
	8	85.48	85.23	84.61	82.87	80.26	77.15	73.75	70.26	66.79	63.44	60.27	57.29	5.43
	9	107.34	107.10	106.60	104.43	101.22	97.25	92.91	88.42	83.97	79.65	75.55	71.69	4.92
	10	123.25	122.75	121.76	118.34	113.52	107.90	102.03	96.12	90.43	85.03	79.96	75.28	5.57

**Пример 3.6**

Кроз овај последњи пример је демонстрирана примена изведених ДМК у анализи плоча са скоковитом променом геометријских карактеристика. Изабрана је плоча са једностепеном променом дебљине, Слика 3.17, за коју је:  $E = 30 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ ,  $2a = 4 \text{ m}$ ,  $b_1 = b_2 = b = 4 \text{ m}$ ,  $t_1 = 0.4 \text{ m}$  и  $t_2 = 0.8 \text{ m}$ . Првих шест сопствених фреквенција у (Hz), које су одређене за три комбинације граничних услова: *SSSC*, *SFSC* и *SFSF*, приказано је у Табели 3.6. Комбинација граничних услова *SFSC* значи да је контура  $x = 2a$  слободно ослоњена,  $y = 2b$  слободна,  $x = 0$  слободно ослоњена и  $y = 0$  укљештена. Изабране комбинације граничних услова могу да се реше и применом континуалног елемента за *Maurice Lévy*-јеву плочу. На тај начин је омогућено поређење резултата добијених применом ДМК за усвојено  $M$  и тачне ДМК за *Maurice Lévy*-јеву плочу. Минималан број континуалних елемената система на Слици 3.17 је два. У Табели 3.6 су приказана решења за  $M = 3, 5, 7$  и  $9$  чланова реда код примене ДМК. У последњој колони, вредности сопствених фреквенција за  $M = 9$  су упоређене са решењима добијеним применом тачне ДМК за *Maurice Lévy*-јеву плочу и ове разлике су изражене у процентима. Из табеле се види да релативне разлике за све изабране граничне услове и тонове не прелазе 0.1%.



Слика 3.17 – Плоча са скоковитом променом дебљине



Табела 3.6 - Првих шест сопствених фреквенција у (Hz) за правоугаону плочу са једноступеном променом дебљине:  $E = 30 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ ,  $2a = 4 \text{ m}$ ,  $b_1 = b_2 = b = 4 \text{ m}$ ,  $t_1 = 0.4 \text{ m}$  и  $t_2 = 0.8 \text{ m}$ .

ГУ	тон	ДМК				ДМК за М. Lévy- јеву плочу	Δ % М = 9 и М. Lévy
		М = 3	М = 5	М = 7	М = 9		
SSSC	1	75.8	75.9	75.9	76.0	76.0	0.0
	2	117.8	117.9	117.9	117.9	118.0	0.1
	3	182.1	182.3	182.3	182.3	182.4	0.1
	4	193.7	193.9	193.9	193.9	194.0	0.1
	5	261.3	261.5	261.5	261.5	261.5	0.0
	6	264.5	264.7	264.7	264.8	264.8	0.0
SFSC	1	70.7	70.8	70.8	70.8	70.8	0.0
	2	93.0	93.1	93.1	93.1	93.1	0.0
	3	136.3	136.3	136.3	136.3	136.3	0.0
	4	193.6	193.8	193.9	193.9	194.0	0.1
	5	209.7	209.8	209.9	209.9	209.9	0.0
	6	258.7	258.8	258.8	258.8	258.8	0.0
SFSF	1	47.5	47.5	47.5	47.5	47.5	0.0
	2	74.6	74.6	74.6	74.6	74.6	0.0
	3	99.6	99.7	99.7	99.7	99.7	0.0
	4	144.0	144.1	144.1	144.1	144.1	0.0
	5	159.6	159.7	159.7	159.7	159.7	0.0
	6	215.0	215.3	215.4	215.4	215.5	0.0

### 3.2 Опште решење проблема избочавања

Код проблема еластичне стабилности угиб  $w^0$  и обртања  $\phi_y$  и  $\phi_x$  су, за разлику од проблема слободних вибрација, функције само просторних координата:

$$w^0(x, y) = \hat{w}(x, y) \quad \phi_y(x, y) = \hat{\phi}_y(x, y) \quad \phi_x(x, y) = \hat{\phi}_x(x, y) \quad (3.101)$$

На основу поступка приказаног код проблема слободних вибрација, систем од три спрегнуте парцијалне диференцијалне једначине (2.11) се увођењем напонске функције  $\Psi$  своди на две раздвојене парцијалне диференцијалне једначине:

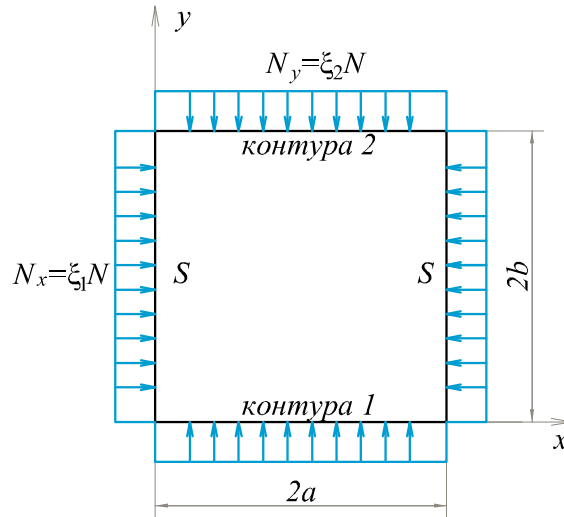
$$D \frac{1-\nu}{2} \nabla^2 \hat{\psi} - kGh\hat{\psi} = 0 \quad (3.102)$$

$$\nabla\nabla\hat{w} - \frac{N}{kGh} \left( \xi_1 \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} + (\xi_1 + \xi_2) \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \xi_2 \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial y^4} \right) + \frac{N}{D} \left( \xi_1 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.103)$$

Када су одређене функција угиба  $\hat{w}$  и напонска функција  $\hat{\psi}$ , ротације  $\hat{\phi}_y$  и  $\hat{\phi}_x$  могу да се одреде из друге, односно из треће једначине (2.11):

$$\begin{aligned} kGh\hat{\phi}_y &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[ D\nabla\hat{w} + kGh\hat{w} - \frac{DN}{kGh} \left( \xi_1 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) \right] + D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \\ kGh\hat{\phi}_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ D\nabla\hat{w} + kGh\hat{w} - \frac{DN}{kGh} \left( \xi_1 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) \right] + D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.104)$$

### 3.2.1 Maurice Lévy-ева плоча



Слика 3.18 – Maurice Lévy-јева плоча оптерећена константним аксијалним оптерећењем

Решење проблема еластичне стабилности Maurice Lévy-еве плоче усваја се у истом облику као и у случају слободних вибрација, једначина (3.89). Заменом усвојених решења за угиб  $\hat{w}$  и напонску функцију  $\hat{\psi}$  у једначину (3.103), односно (3.102), добијају се следеће обичне диференцијалне једначине:

$$\frac{d^4 W_m(y)}{dy^4} + a_{1,m} \frac{d^2 W_m(y)}{dy^2} + a_{2,m} W_m(y) = 0 \quad (3.105)$$

$$\frac{d^2 \Psi_m(y)}{dy^2} + a_{3,m} \Psi_m(y) = 0 \quad (3.106)$$

где су:

$$a_{1,m} = \frac{-2\alpha_m^2 + \alpha_m^2(\xi_1 + \xi_2)\frac{N}{kGh} + \xi_2\frac{N}{D}}{1 - \xi_2\frac{N}{kGh}} \quad a_{2,m} = \frac{\alpha_m^4 - \xi_1\frac{N}{kGh}\alpha_m^2 - \xi_1\frac{N}{D}\alpha_m^2}{1 - \xi_2\frac{N}{kGh}} \quad (3.107)$$

$$a_{3,m} = -\frac{2kGh}{D(1-\nu)} - \alpha_m^2$$

Решења за угиб, ротације и пресечне силе су дата једначинама (3.90) и (3.91), при чему су изрази за коефицијенте  $\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$  сад једнаки:

$$\delta_{i,m} = -\frac{\alpha_m \left[ kGh + D \left( (r_{i,m})^2 - \alpha_m^2 \right) + \frac{DN}{kGh} \left( \xi_1 \alpha_m^2 - \xi_2 (r_{i,m})^2 \right) \right]}{kGh}$$

$$\gamma_{i,m} = \frac{r_{i,m} \left[ kGh + D \left( (r_{i,m})^2 - \alpha_m^2 \right) + \frac{DN}{kGh} \left( \xi_1 \alpha_m^2 - \xi_2 (r_{i,m})^2 \right) \right]}{kGh} \quad (3.108)$$

$i = 1, 2$

$$\delta_{3,m} = \frac{Dr_{i,m}(1-\nu)}{2kGh} \quad \gamma_{3,m} = -\frac{D\alpha_m(1-\nu)}{2kGh}$$

Изрази за “амплитуде” пресечних сила су дате АА1 делом израза (3.59), као и у случају слободних вибрација.

### 3.2.1.1 Матрица крутости за избочавање $\mathbf{K}_{lm}$

Вектор померања  $\hat{\mathbf{q}}_m$  и вектор интеграционих константи  $\mathbf{C}_m$  дати су једначинама (3.92) и (3.93). Вектор сила  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  за случај избочавања је:

$$\hat{\mathbf{Q}}_m^T = \left[ -\bar{T}_{ym}(0) \quad M_{ym}(0) \quad -M_{xym}(0) \quad \bar{T}_{ym}(2b) \quad -M_{ym}(2b) \quad M_{xym}(2b) \right]_{1 \times 6} \quad (3.109)$$

Компоненте вектора сила  $-\bar{T}_{ym}(0)$  и  $\bar{T}_{ym}(2b)$ , преко којих је узета у обзир компонента аксијалне силе управна на деформисану површ, су једнаке:

$$\bar{T}_{ym}(0) = T_{ym}(0) - \xi_2 N \frac{dW_m(y)}{dy} \Big|_{y=0}$$

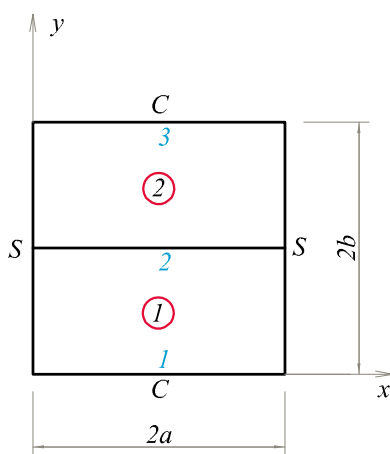
$$\bar{T}_{ym}(2b) = T_{ym}(2b) - \xi_2 N \frac{dW_m(y)}{dy} \Big|_{y=2b} \quad (3.110)$$

Матрица  $\mathbf{D}_m$  је иста као за случај вибрација, док се матрица  $\mathbf{F}_m$  разликује и дата је у Прилогу. Матрица крутости за избочавање  $\mathbf{K}_{lm}$  је, као и ДМК Maurice Lévy-јеве плоче, реда 6.

Све што је речено у вези формирања глобалне матрице крутости, аплицирања граничних услова, одређивања сопствених вредности и сопствених облика у случају слободних вибрација важи и овде. Једина разлика је у томе што је матрица крутости за избочавање  $\mathbf{K}_{lm}$  функција фактора оптерећења  $N$ , а не кружне фреквенције. “Пикови” дијаграма  $1/\log \det(\mathbf{K}_{lm})$  одговарају траженим критичним факторима оптерећењима при чему је најчешће само најмањи критични фактор оптерећења (критични фактор избочавања) онај које је од интереса.

### 3.2.2 Нумерички примери

Резултати за критичне факторе избочавања  $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D$ , који су одређени помоћу *Matlab* програма заснованог на матрицама крутости за избочавање  $\mathbf{K}_{lm}$  Maurice Lévy-еве плоче, су упоређени са доступним резултатима из литературе. Испитан је случај једнооксијалног ( $\xi_1 = 0$  или  $\xi_2 = 0$ ) и двооксијалног ( $\xi_1 \neq 0$  и  $\xi_2 \neq 0$ ) напрезања у равни. Решења су приказана за плоче константне дебљине, као и за плоче са скоковитом променом дебљине. Пошто је МКИ за Maurice Lévy-еву плочу тачна, сва решења добијена њеном применом се поклапају са тачним аналитичким решењима, што ће се видети кроз примере.



Слика 3.19 – Maurice Lévy-јева плоча са *CS* граничним условима

Комбинација граничних услова означена са *CS* значи да је контура 1, Слика 3.18, укљештена, а контура 2 слободно ослоњена. Код плоча са *CS* граничним условима морају да се користе минимум два континуална

елемента. *Maurice Lévy*-ева плоча на Слици 3.19 је моделирана са два континуална елемента 1 и 2, који су спојени дуж контуре 2.

У свим примерима је коришћено  $\nu=0.3$  и  $k=5/6$ , осим ако није друкчије наглашено. Критични фактори избочавања су одређени са кораком  $d\lambda=0.0001$ .

### **Пример 3.7**

У Примеру 3.7 су одређени критични фактори избочавања  $\lambda$  применом МКИ за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) за случај двоаксијалне компресије ( $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ) за свих шест комбинација граничних услова (Liew, Xiang and Kitipornchai, 1993). За однос  $h/2a$  усвојене су вредности од 0.001 (танка плоча) до 0.4 (умерено дебела плоча). Ови резултати су упоређени су са аналитичким резултатима од (Hosseini-Hashemi, Khorshidi and Amabili, 2008) и (Liew, Xiang and Kitipornchai, 1995), као и са високо тачним нумеричким решењем од (Shufrin and Eisenberger, 2005). *Hosseini-Hashemi* је решавао систем једначина (2.11) зависно од комбинације граничних услова, док је *Liew* користио *state space* метод помоћу кога је систем једначина (2.11) трансформисао у систем обичних линеарних диференцијалних једначина. Приказ резултата је дат у Табели 3.7. Због нумеричке нестабилности, критични фактори избочавања за однос  $h/2a=0.001$  не могу да се добију коришћењем једног континуалног елемента, па су за резултате приказане у табели коришћена четири континуална елемента за избочавање *Maurice Lévy*-јеве плоче по *Mindlin*-овој теорији.

### **Пример 3.8 и Пример 3.9**

У Табели 3.8 су приказани критични фактори избочавања  $\lambda$  за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) за случај једноаксијалне компресије у правцу *x*-осе ( $\xi_1 = 1$  и  $\xi_2 = 0$ ), док су у Табели 3.9 приказани критични фактори избочавања за случај константног притиска у равни које делује у правцу *y*-осе ( $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 1$ ). У Табели 3.9 нису приказану резултати за *SS* граничне услове зато што су исти као у Табели 3.8. Резултати применом МКИ су упоређени са резултатима од (Hosseini-Hashemi, Khorshidi and Amabili, 2008), (Liew, Xiang and Kitipornchai, 1995) и (Shufrin and Eisenberger, 2005).

Табела 3.7 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D$  за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) за случај двоаксијалне компресије ( $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ):  $\nu = 0.3$ ,  $k = 5/6$ .

ГУ	резултати	$h/2a$								
		0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4
FF	(Hosseini-Hashemi, 2008)	0.9321	0.9316	0.9309 <sup>b</sup>	0.9207	0.8977	0.8650	0.8282 <sup>b</sup>	-	-
	(Shufrin, 2005)	-	-	-	0.9208	0.8977	0.8650	0.8248	-	-
	(Liew, 1995)	-	0.9316	-	0.9207	0.8977	0.8650	-	-	-
	МКИ	0.9321	0.9316	0.9309	0.9207	0.8977	0.8650	0.8248	0.7313	0.6337
SF	(Hosseini-Hashemi, 2008)	1.0548	1.0535	1.0519 <sup>b</sup>	1.0322	0.9954	0.9476	0.8968 <sup>b</sup>	-	-
	(Liew, 1995)	-	1.0535	-	1.0323	0.9954	0.9476	-	-	-
	МКИ	1.0548	1.0535	1.0518	1.0323	0.9954	0.9476	0.8923	0.7722	0.6551
CF	(Hosseini-Hashemi, 2008)	1.1431	1.1412	1.1388 <sup>b</sup>	1.1119	1.0641	1.0049	0.9443 <sup>b</sup>	-	-
	(Liew, 1995)	-	1.1412	-	1.1119	1.0641	1.0049	-	-	-
	МКИ	1.1431	1.1412	1.1387	1.1120	1.0641	1.0049	0.9390	0.8022	0.6745
SS	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	2	1.9997	1.9989 <sup>b</sup>	1.9718	1.8919	1.7722	1.6435 <sup>b</sup>	-	-
	(Shufrin, 2005)	-	-	-	-	1.8932	-	1.6319	1.3266	1.0513
	МКИ	1.9999	1.9997	1.9989	1.9722	1.8932	1.7748	1.6319	1.3266	1.0513
SC	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>b</sup>	2.6627	-	2.6605	-	2.4587	-	2.0097	-	-
	МКИ	2.6626	2.6621	2.6603	2.6059	2.4512	2.2337	1.9906	1.5270	1.1588
CC	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>b</sup>	3.8298	-	3.8248	-	3.3913	-	2.5512	-	-
	МКИ	3.8298	3.8286	3.8246	3.7036	3.3761	2.9513	2.5186	1.7945	1.2942

<sup>a</sup> $k=0.823$     <sup>b</sup> $k=0.86667$

Табела 3.8 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D$  за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) за случај једноосијалне компресије у правцу  $x$ -осе ( $\xi_1 = 1$  и  $\xi_2 = 0$ ):  $\nu = 0.3$ ,  $k = 5/6$ .

ГУ	резултати	$h/2a$								
		0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4
FF	(Hosseini-Hashemi, 2008)	0.9522	-	0.9515 <sup>b</sup>	0.9432	0.9222	-	0.8512	-	-
	(Shufrin, 2005)	-	-	-	0.9433	0.9222	0.8908	0.8512	-	-
	МКИ	-	0.9520	0.9515	0.9432	0.9222	0.8908	0.8512	0.7570	0.6566
SF	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	1.4014	-	1.3993 <sup>b</sup>	1.3813	1.3707	-	1.2138	-	-
	МКИ	-	1.4006	1.3993	1.3815	1.3413	1.2846	1.2157	1.0590	0.9005
CF	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	1.6522	-	1.6489 <sup>b</sup>	1.6197	1.5558	-	1.3701	-	-
	МКИ	-	1.6508	1.6488	1.6200	1.5568	1.4714	1.3728	1.1640	0.9689
SS	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	4	-	3.9978 <sup>b</sup>	3.9444	3.7864	-	3.2637	-	-
	(Shufrin, 2005)	-	-	-	-	3.7865	-	3.2637	2.6533	1.9196
	МКИ	-	3.9994	3.9977	3.9444	3.7864	3.5496	3.2637	2.6533	1.9196
SC	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	5.7401	-	5.7346 <sup>b</sup>	5.5977	5.2171	-	4.1364	-	-
	МКИ	-	5.7387	5.7343	5.5995	5.2232	4.7087	4.1510	3.1303	2.3509
CC	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	7.6911	-	7.6752 <sup>b</sup>	7.2989	6.3698	-	4.3204	-	-
	МКИ	-	7.6871	7.6746	7.3037	6.3836	5.3202	4.3440	3.6952	2.6301

<sup>a</sup> $k = \pi^2 / 12$     <sup>b</sup> $k = 0.86667$

Табела 3.9 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D$  за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) за случај једноосијалне компресије у правцу  $y$ -осе ( $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 1$ ):  $\nu = 0.3$ ,  $k = 5/6$ .

ГУ	резултати	$h/2a$								
		0.001	0.005	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4
FF	(Hosseini-Hashemi, 2008)	2.0413	-	2.0266 <sup>b</sup>	1.9464	1.8234	-	1.5372	-	-
	(Shufrin, 2005)	-	-	-	1.9469	1.8234	1.6839	1.5372	-	-
	(Liew, 1995)	-	2.0347	-	1.9464	1.8233	1.6839	-	-	-
	МКИ	-	2.0347	2.0262	1.9464	1.8234	1.6839	1.5372	1.2504	0.9999
SF	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	2.3639	-	2.3461 <sup>b</sup>	2.2442	2.0829	-	1.7105	-	-
	(Liew, 1995)	-	2.3560	-	2.2452	2.0852	1.9035	-	-	-
	МКИ	-	2.3560	2.3456	2.2452	2.0852	1.9035	1.7154	1.3616	1.0690
CF	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	2.3901	-	2.3717 <sup>b</sup>	2.2667	2.1010	-	1.7200	-	-
	(Liew, 1995)	-	2.3819	-	2.2676	2.1033	1.9171	-	-	-
	МКИ	-	2.3820	2.3713	2.2677	2.1033	1.9172	1.7250	1.3653	1.0699
SC	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	4.8471	-	4.8432 <sup>b</sup>	4.7454	4.4656	-	3.6115	-	-
	МКИ	-	4.8450	4.8430	4.7467	4.4701	4.0750	3.6236	3.0459	2.3360
CC	(Hosseini-Hashemi, 2008) <sup>a</sup>	6.7431	-	6.7345 <sup>b</sup>	6.5238	5.9487	-	4.4004	-	-
	МКИ	-	6.7409	6.7342	6.5265	5.9578	5.2063	4.4207	3.0315	2.0239

<sup>a</sup> $k = \pi^2 / 12$     <sup>b</sup> $k = 0.86667$



**Пример 3.10**

Кроз Пример 3.10 је верификована примена изведене МКИ код правоугаоних плоча. За однос дужина страна плоче  $a/b$  изабране су следеће вредности:  $a/b=0.5, 1, 1.5, 2$  и  $2.5$ , док је за однос  $h/2a$  усвојена вредност  $0.1$ . Коришћене су три комбинације граничних услова:  $FF$ ,  $FS$  и  $FC$ . У Табели 3.10 су приказани резултати за критични фактор избочавања  $\lambda$  за плочу која је оптерећена двооксијалним притиском ( $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ), као и за плочу оптерећену једнооксијалним притиском у правцу  $x$  ( $\xi_1 = 1$  и  $\xi_2 = 0$ ), односно у правцу  $y$ -осе ( $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 1$ ). За одређивање критичног фактора избочавања коришћен је коефицијент смичућих напона  $k=0.86667$  ради поређења са резултатима из литературе (Hosseini-Hashemi, Khorshidi and Amabili, 2008).

Табела 3.10 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_{cr}(2a)^2/\pi^2D$  за правоугаону плочу за случај двооксијалне и једнооксијалне компресије:  $h/2a=0.1$ ,  $\nu=0.3$ ,  $k=0.86667$ .

ГУ	$\xi$	резултати	$a/b$					
			0.5	1	1.5	2	2.5	
FF	$\xi_1 = \xi_2 = 1$	(Hosseini-Hashemi, 2008)	0.9180	0.8988	0.8913	0.8885	0.8874	
		МКИ	0.9180	0.8988	0.8913	0.8885	0.8874	
	$\xi_1 = 1$ $\xi_2 = 0$	(Hosseini-Hashemi, 2008)	0.9449	0.9232	0.909	0.9008	0.8962	
		МКИ	0.9449	0.9232	0.909	0.9008	0.8962	
	$\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 1$	(Hosseini-Hashemi, 2008)	2.0146	1.8286	1.506	1.3468	1.2489	
		МКИ	2.0146	1.8285	1.506	1.3468	1.2489	
	SF	$\xi_1 = \xi_2 = 1$	(Hosseini-Hashemi, 2008)	0.9509	0.9971	1.0484	1.0877	1.1123
			МКИ	0.9509	0.9971	1.0484	1.0877	1.1123
$\xi_1 = 1$ $\xi_2 = 0$		(Hosseini-Hashemi, 2008)	1.0546	1.3432	1.8215	2.4781	3.3029	
		МКИ	1.0546	1.3432	1.8215	2.4781	3.3029	
$\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 1$		(Hosseini-Hashemi, 2008)	2.0514	2.092	2.0622	1.8286	1.6363	
		МКИ	2.0514	2.092	2.0622	1.8285	1.6363	
CF		$\xi_1 = \xi_2 = 1$	(Hosseini-Hashemi, 2008)	0.9578	1.0663	1.2879	1.6274	2.0789
			МКИ	0.9578	1.0662	1.2879	1.6274	2.0789
	$\xi_1 = 1$ $\xi_2 = 0$	(Hosseini-Hashemi, 2008)	1.0783	1.5598	2.6467	4.7001	6.9249	
		МКИ	1.0783	1.5598	2.6467	4.7001	6.9249	
	$\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 1$	(Hosseini-Hashemi, 2008)	2.0517	2.1103	2.1351	2.3027	2.6542	
		МКИ	2.0517	2.1103	2.1351	2.3027	2.6542	

**Пример 3.11**

У Примеру 3.11 је вариран однос интензитета аксијалног оптерећења у правцу  $x$  и  $y$ -осе. Изабрана је квадратна плоча ( $a/b=1$ ) са  $FF$  и  $CF$  комбинацијом граничних услова, док су за однос дебљине и распона изабране следеће вредности:  $h/2a=0.05, 0.1$  и  $0.15$ . Критични фактори избочавања  $\lambda$  добијени применом  $MKI$  су упоређени са резултатима од (Liew, Xiang and Kitipornchai, 1995) и њихов приказ је дат у Табели 3.11.

Табела 3.11 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_{cr}(2a)^2/\pi^2 D$  за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) за различите односе интензитета оптерећења у равни у правцу  $x$  и  $y$ -осе ( $\xi_2 = 1$ ):  $\nu = 0.3, k = 5/6$ .

ГУ	$\xi_1$	резултати	$h/2a$		
			0.05	0.1	0.15
$FF$	0	(Liew, 1995)	1.9464	1.8233	1.6839
		$MKI$	1.9464	1.8234	1.6839
	0.1	(Liew, 1995)	1.8260	1.7146	1.5878
		$MKI$	1.8261	1.7146	1.5878
	0.2	(Liew, 1995)	1.7175	1.6157	1.4996
		$MKI$	1.7176	1.6158	1.4997
	0.3	(Liew, 1995)	1.6196	1.5260	1.4190
		$MKI$	1.6197	1.5260	1.4190
	0.4	(Liew, 1995)	1.5311	1.4445	1.3452
		$MKI$	1.5312	1.4446	1.3453
	0.5	(Liew, 1995)	1.4510	1.3704	1.2778
		$MKI$	1.4510	1.3705	1.2778
	0.6	(Liew, 1995)	1.3782	1.3029	1.2161
		$MKI$	1.3782	1.3029	1.2161
	0.7	(Liew, 1995)	1.2879	1.2412	1.1595
		$MKI$	1.2879	1.2413	1.1595
	0.8	(Liew, 1995)	1.1383	1.1079	1.0654
		$MKI$	1.1383	1.1079	1.0654
0.9	(Liew, 1995)	1.0184	0.9923	0.9554	
	$MKI$	1.0184	0.9923	0.9554	
1	(Liew, 1995)	0.9207	0.8977	0.8650	
	$MKI$	0.9207	0.8978	0.8650	
	$\xi_1 = 1$	(Liew, 1995) <sup>a</sup>	0.9537	0.9327	0.9008
	$\xi_2 = -1$	$MKI$	0.9538	0.9331	0.9015

ГУ	$\xi_1$	резултати	$h/2a$		
			0.05	0.1	0.15
CF	0	(Liew, 1995)	2.2676	2.1033	1.9171
		МКИ	2.2677	2.1033	1.9172
	0.1	(Liew, 1995)	2.1324	1.9865	1.8200
		МКИ	2.1324	1.9865	1.8201
	0.2	(Liew, 1995)	1.9924	1.8649	1.7183
		МКИ	1.9924	1.8650	1.7183
	0.3	(Liew, 1995)	1.8520	1.7419	1.6138
		МКИ	1.8520	1.7419	1.6139
	0.4	(Liew, 1995)	1.7160	1.6210	1.5094
		МКИ	1.7160	1.6211	1.5095
	0.5	(Liew, 1995)	1.5883	1.5060	1.4083
		МКИ	1.5884	1.5060	1.4083
	0.6	(Liew, 1995)	1.4713	1.3992	1.3127
		МКИ	1.4714	1.3992	1.3127
	0.7	(Liew, 1995)	1.3658	1.3017	1.2243
		МКИ	1.3658	1.3018	1.2243
	0.8	(Liew, 1995)	1.2713	1.2138	1.1436
		МКИ	1.2713	1.2138	1.1437
0.9	(Liew, 1995)	1.1870	1.1348	1.0707	
	МКИ	1.1871	1.1349	1.0707	
1	(Liew, 1995)	1.1119	1.0641	1.0049	
	МКИ	1.1120	1.0641	1.0049	
	$\xi_1 = 1$	(Liew, 1995)	-	-	-
	$\xi_2 = -1$	МКИ	2.4371	2.3250	2.1714

<sup>a</sup> $k=0.823$ **Пример 3.12**

Овим последњим примером је демонстрирана примене *метода динамичке крутости* у анализи еластичне стабилности система плоча. За ту сврху је изабрана квадратна плоча ( $a/b = 1$ ) са скоковитом променом геометријских карактеристика ( $t_2/t_1 = 2$ ,  $h_1/2a = 0.1$ ,  $b_1/2b = 0.3$ ), која је приказана на Слици 3.17. За моделирање ове плоче коришћена су два континуална елемента, што је уједно и минималан број елемената потребан у анализи. У Табели 3.13 су приказани резултати за критичне факторе избочавања  $\lambda$ .  $D_1$  је

крутост на савијање плоче чија је дебљина  $t_1$ . Контуре  $y=0$  и  $y=2b$  су слободно ослоњене, док су на контурама  $y=0$  и  $y=2b$  *FS*, *FC* и *SC* гранични услови.

Решења су дата за случај двоаксијалне компресије ( $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ), као и за случај једноаксијалне компресије у правцу  $x$  ( $\xi_1 = 1$  и  $\xi_2 = 0$ ), односно  $y$ -осе ( $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 1$ ). Резултати су упоређени са тачним решењима од (Xiang and Wei, 2004), која су добијени коришћењем *state space* метода за решавање диференцијалних једначина (2.11) и технике декомпозиције домена (*domain decomposition technique*) за спајање плоча различите дебљине.

Табела 3.12 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_{cr} (2a)^2 / \pi^2 D_1$  за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) са једностепеном променом дебљине за случај двоаксијалне и једноаксијалне компресије:  $\nu = 0.3$ ,  $k = 5/6$ ,  $t_1 / t_2 = 2$ ,  $b_1 / 2b = 0.3$ .

ГУ	$\xi$	резултати	$t_1/2a$		
			0.01	0.1	
FS	$\xi_1 = \xi_2 = 1$	(Xiang, 2004)	5.8610	5.2267	
		МКИ	5.8610	5.2267	
	$\xi_1 = 1$ $\xi_2 = 0$	(Xiang, 2004)	8.5261	7.6128	
		МКИ	8.5261	7.6128	
	$\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 1$	(Xiang, 2004)	10.3339	8.5027	
		МКИ	10.3339	8.5027	
	FC	$\xi_1 = \xi_2 = 1$	(Xiang, 2004)	7.7892	6.6379
			МКИ	7.7892	6.6378
$\xi_1 = 1$ $\xi_2 = 0$		(Xiang, 2004)	10.2613	8.7938	
		МКИ	10.2613	8.7938	
$\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 1$		(Xiang, 2004)	16.3249	12.2071	
		МКИ	16.3249	12.2071	
SC		$\xi_1 = \xi_2 = 1$	(Xiang, 2004)	11.2214	8.9387
			МКИ	11.2214	8.9387
	$\xi_1 = 1$ $\xi_2 = 0$	(Xiang, 2004)	25.1480	20.0522	
		МКИ	25.1480	20.0522	
	$\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 1$	(Xiang, 2004)	18.7209	14.0322	
		МКИ	18.7209	14.0322	

### 3.3 Опште решење проблема слободних вибрација плоче оптерећене константним силама у равни

Угиб  $w$  и обртања  $\phi_y$  и  $\phi_x$  су функције просторних координата и времена, па се користи спектрална декомпозиција, једначина (3.1). Систем од три спрегнуте парцијалне диференцијалне једначине (2.12) се увођењем напонске функције  $\Psi$  своди на две раздвојене ПДЈ:

$$D \frac{1-\nu}{2} \nabla \hat{\psi} - kGh \hat{\psi} + \frac{\rho h^3 \omega^2}{12} \hat{\psi} = 0 \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \nabla \nabla \hat{w} + \left( \frac{\rho}{kG} + \frac{1}{D} \frac{\rho h^3}{12} \right) \omega^2 \nabla \hat{w} + \frac{\rho h \omega^2}{D} \left( \frac{\rho h^3}{12} \frac{\omega^2}{kGh} - 1 \right) \hat{w} + \frac{N}{D} \left( \xi_1 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) \\ - \frac{N}{kGh} \left( \xi_1 \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^4} + (\xi_1 + \xi_2) \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \xi_2 \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial y^4} \right) - \frac{\rho h^3 \omega^2}{12} \frac{N}{kGh D} \left( \xi_1 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

Када су одређене функција угиба  $\hat{w}$  и напонска функција  $\hat{\psi}$ , ротације  $\hat{\phi}_y$  и  $\hat{\phi}_x$  могу да се одреде из друге, односно из треће једначине (2.12):

$$\begin{aligned} \left( kGh - \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \right) \hat{\phi}_y = - \frac{\partial}{\partial x} \left( D \nabla \hat{w} + kGh \hat{w} - \frac{DN}{kGh} \left( \xi_1 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) + D \frac{\rho \omega^2}{kG} \hat{w} \right) \\ + D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \left( kGh - \frac{\rho h^3}{12} \omega^2 \right) \hat{\phi}_x = \frac{\partial}{\partial y} \left( D \nabla \hat{w} + kGh \hat{w} - \frac{DN}{kGh} \left( \xi_1 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} \right) + D \frac{\rho \omega^2}{kG} \hat{w} \right) \\ + D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \end{aligned}$$

Ако се вредност  $\omega=0$  замени у (3.111)-(3.113), добијају се једначине које важе у анализи еластичне стабилности, док ако се усвоји да је  $N=0$ , добијају се једначине које се користе у анализи слободних вибрација.

#### 3.3.1 Maurice Lévy-ева плоча

Решење проблема слободних вибрација за Maurice Lévy-еву плочу која је оптерећена силама у равни усваја се у облику датом једначином (3.89). Заменом усвојеног решења за угиб  $\hat{w}$  и напонску функцију  $\hat{\psi}$  у једначину (3.112), односно једначину (3.111), добија се обична диференцијална једначина (3.105), односно (3.106), чији су коефицијенти сада једнаки:

$$\begin{aligned}
 a_{1,m} &= \frac{c_1 - 2\alpha_m^2 + \alpha_m^2 (\xi_1 + \xi_2) \frac{N}{kGh} + \xi_2 \frac{N}{D} \left(1 - \frac{\rho h^2 \omega^2}{12kG}\right)}{1 - \xi_2 \frac{N}{kGh}} \\
 a_{2,m} &= \frac{c_2 + \alpha_m^4 \left(1 - \xi_1 \frac{N}{kGh}\right) - \alpha_m^2 \left[ c_1 + \left(1 - \frac{\rho h^2 \omega^2}{12kG}\right) \xi_1 \frac{N}{D} \right]}{1 - \xi_2 \frac{N}{kGh}} \\
 a_{3,m} &= -\frac{\rho h^3 \omega^2 - 12kGh}{6D(1-\nu)} - \alpha_m^2
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

$c_1$  и  $c_2$  су дати једначином (3.13). Коначни изрази за угин, ротације и пресечне силе су дати једначинама (3.90) и (3.91), при чему су изрази за коефицијенте  $\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$  једнаки:

$$\begin{aligned}
 \delta_{i,m} &= -\frac{\alpha_m \left[ kGh + D \frac{\rho \omega^2}{kG} + D \left( (r_{i,m})^2 - \alpha_m^2 \right) + \frac{DN}{kGh} \left( \xi_1 \alpha_m^2 - \xi_2 (r_{i,m})^2 \right) \right]}{kGh - \frac{\rho h^3 \omega^2}{12}} \\
 \gamma_{i,m} &= \frac{r_{i,m} \left[ kGh + D \frac{\rho \omega^2}{kG} + D \left( (r_{i,m})^2 - \alpha_m^2 \right) + \frac{DN}{kGh} \left( \xi_1 \alpha_m^2 - \xi_2 (r_{i,m})^2 \right) \right]}{kGh - \frac{\rho h^3 \omega^2}{12}}
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

$i = 1, 2$

$$\delta_{3,m} = \frac{6Dr_{i,m}(1-\nu)}{12kGh - \rho h^3 \omega^2} \quad \gamma_{3,m} = -\frac{6D\alpha_m(1-\nu)}{12kGh - \rho h^3 \omega^2}$$

Изрази за “амплитуде” пресечних сила су дате АА1 делом израза (3.59), као и у случају слободних вибрација. Вектор померања  $\hat{\mathbf{q}}_m$  и вектор интеграционих константи  $\mathbf{C}_m$  су дати једначином (3.92), односно (3.93), редом, док је вектор сила  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  дат једначином (3.109). Матрице  $\mathbf{D}_m$  и  $\mathbf{F}_m$  су исте као за случај одређивања еластичне силе избочавања.

### 3.3.2 Нумерички примери

#### Пример 3.13

У првом примеру, Табела 3.13, је приказан утицај једноаксијалног оптерећења у правцу  $y$ -осе ( $\xi_1=0$  и  $\xi_2=1$ ) на вредност првих шест сопствених фреквенција у (Hz). Изабрана је квадратна плоча ( $a/b=1$ ) следећих карактеристика:  $E=30\text{ GPa}$ ,  $\rho=2500\text{ kg/m}^3$ ,  $\nu=0.3$ ,  $k=0.86667$ ,  $2a=4\text{ m}$  и  $h=0.4\text{ m}$ . Вредност аксијалног оптерећења се креће од 99% критичног оптерећења, које је одређено у Табели 3.10, до -100% (константна сила затезања интензитета  $N_{cr}$  делује у правцу  $y$ -осе). Из овог примера се види да када аксијално оптерећење тежи критичном оптерећењу, прва сопствена фреквенција тежи нули. Оптерећење у равни које је повезано са нултом фреквенцијом је у ствари критична сила избочавања.

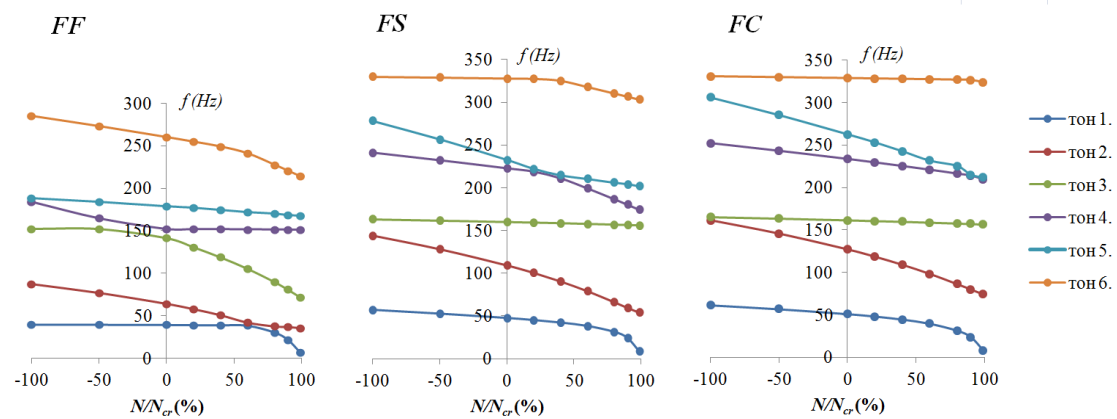
#### Пример 3.14

У оквиру овог примера је за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) са скоковитом променом дебљине, чији су критични фактори избочавања  $\lambda = N_{cr}(2a)^2/\pi^2 D_1$  дати у Табели 3.12, одређен утицај интензитета оптерећења у равни на првих шест сопствених фреквенција. Приказ резултата је дат у Табели 3.14. Сопствене фреквенције су одређене за случај двоаксијалног напрезања у равни ( $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ), однос  $h_1/2a=0.1$  и за вредност силе у равни од 0 до 99%  $N_{cr}$ .

Графички приказ резултата из Табела 3.13 и 3.14 је дат на Слици 3.20, односно на Слици 3.21.

Табела 3.13 - Првих шест сопствених фреквенција у (Hz) за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) која је оптерећена константним оптерећењем у равни у правцу  $y$ -осе ( $\xi_1=0$  и  $\xi_2=1$ ):  $E=30\text{ GPa}$ ,  $\rho=2500\text{ kg/m}^3$ ,  $\nu=0.3$ ,  $k=0.86667$ ,  $2a=4\text{ m}$ ,  $h=0.4\text{ m}$ .

ГУ	тон	$N/N_{cr}(\%)$								
		-100%	-50%	0	20%	40%	60%	80%	90%	99%
FF	1	39.8	39.6	39.4	39.2	39.0	38.6	30.5	21.8	7.0
	2	87.4	77.0	64.3	58.1	51.0	42.3	37.9	37.2	35.9
	3	152.4	152.2	141.5	130.8	118.9	105.5	89.9	80.9	72.1
	4	184.4	164.7	151.9	151.8	151.7	151.5	151.3	151.2	151.1
	5	188.6	183.9	178.9	176.8	174.6	172.3	170.0	168.8	167.6
	6	284.8	272.8	260.0	254.6	249.0	241.0	227.6	220.6	214.1
FS	1	56.9	52.5	47.5	45.1	42.2	38.3	31.5	24.4	8.4
	2	143.8	128.0	109.2	100.5	90.6	79.3	66.5	59.8	54.2
	3	163.3	161.7	160.0	159.3	158.5	157.6	156.7	156.2	155.8
	4	240.8	232.0	222.7	218.8	211.1	199.4	186.9	180.4	174.4
	5	278.4	256.7	232.6	222.1	214.7	210.5	206.2	204.0	201.9
	6	329.9	329.0	328.0	327.6	325.4	318.1	310.6	306.8	303.3
FC	1	61.6	56.9	51.1	48.2	44.6	39.6	31.3	23.6	8.0
	2	161.3	145.6	127.1	118.5	109.0	98.3	86.3	80.0	74.3
	3	165.1	163.4	161.5	160.6	159.8	158.8	157.8	157.2	156.7
	4	252.2	243.1	233.5	229.4	225.2	220.8	216.2	213.9	209.7
	5	306.0	285.3	262.6	252.8	242.6	232.0	225.5	215.0	211.7
	6	330.7	329.7	328.7	328.3	327.8	327.4	326.9	326.6	324.1

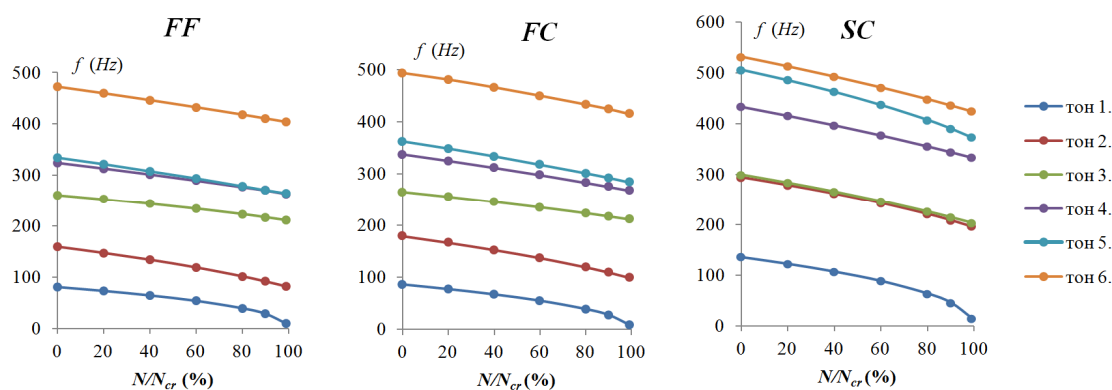


Слика 3.20 – Утицај једноаксијалног оптерећења у равни на сопствене фреквенције



Табела 3.14 - Првих шест сопствених фреквенција у (Hz) за квадратну плочу ( $a/b=1$ ) са једноступеном променом дебљине која је оптерећена константним двоаксијалним притиском ( $\xi_1=1$  и  $\xi_2=1$ ):  $E=30\text{ GPa}$ ,  $\rho=2500\text{ kg/m}^3$ ,  $\nu=0.3$ ,  $k=5/6$ ,  $2a=4\text{ m}$ ,  $b_1=1.2\text{ m}$ ,  $b_2=2.8\text{ m}$ ,  $t_1=0.4\text{ m}$ ,  $t_2=0.8\text{ m}$ .

ГУ	тон	$N/N_{cr}$ (%)						
		0	20%	40%	60%	80%	90%	99%
FS	1	81.2	73.5	64.6	53.9	39.3	28.5	9.2
	2	159.0	147.0	133.8	118.9	101.6	91.7	82.0
	3	260.8	252.5	243.7	233.9	223.0	216.8	210.9
	4	323.6	312.7	301.3	289.4	277.0	270.6	263.8
	5	334.1	321.4	308.1	294.0	279.0	271.1	264.8
	6	472.2	459.4	446.1	432.2	417.8	410.3	403.5
FC	1	85.9	77.0	66.9	54.8	38.8	27.5	8.7
	2	179.1	166.4	152.5	137.0	119.2	109.1	99.0
	3	264.9	255.5	245.5	234.9	223.4	217.2	211.3
	4	337.0	324.5	311.3	297.4	282.6	274.9	267.7
	5	361.9	347.9	333.1	317.5	300.9	292.2	284.0
	6	492.8	480.4	465.6	449.7	433.0	424.3	414.9
SC	1	135.5	122.2	106.9	88.4	63.5	45.4	14.5
	2	294.0	278.5	261.6	242.6	220.7	208.2	195.6
	3	299.0	282.8	265.4	246.3	225.3	213.9	203.0
	4	433.1	415.3	396.5	376.4	354.8	343.4	332.7
	5	505.5	485.3	462.7	437.0	407.0	389.9	373.0
	6	531.0	512.2	492.2	470.9	447.9	435.6	424.0



Слика 3.21 – Утицај двоаксијалног притиска на сопствене фреквенције

## 4 ТЕОРИЈА ТАНКИХ ЉУСКИ

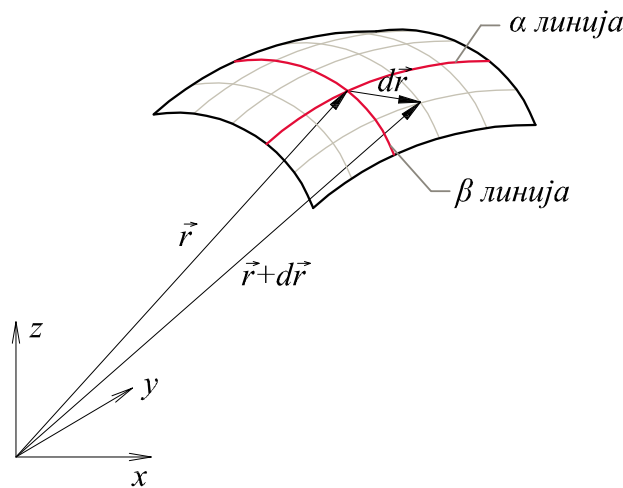
### 4.1 Основни појмови

Положај сваке тачке површи је дефинисан радијус вектором  $\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta)$  који је функција два независна параметра  $\alpha$  и  $\beta$ . Изводи радијус вектора  $\vec{r}$  у правцу тангенте на  $\alpha$ -линију ( $\beta = \text{const}$ ), односно  $\beta$ -линију ( $\alpha = \text{const}$ ), су вектори:

$$\vec{r}_{,\alpha} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \quad \vec{r}_{,\beta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \quad (4.1)$$

чији су интензитети једнаки:

$$|\vec{r}_{,\alpha}| = A \quad |\vec{r}_{,\beta}| = B \quad (4.2)$$



Слика 4.1 - Криволинијске координате

Јединични вектори у правцу тангенте на  $\alpha$ -линију, односно  $\beta$ -линију, су:

$$\hat{i}_\alpha = \frac{\vec{r}_{,\alpha}}{A} \quad \hat{i}_\beta = \frac{\vec{r}_{,\beta}}{B} \quad (4.3)$$

Угао између координатних линија, који је означен са  $\chi$ , и јединични вектор нормале, који је управан на векторе  $\hat{i}_\alpha$  и  $\hat{i}_\beta$ , су дефинисани са:

$$\hat{i}_\alpha \cdot \hat{i}_\beta = \cos(\chi) \quad \hat{i}_n = \frac{\hat{i}_\alpha \times \hat{i}_\beta}{\sin(\chi)} \quad (4.4)$$

## 4.2 Love-ова прва апроксимација (теорија танких љуски)

У класичну теорију танких љуски, за случај да су померања мала, Love (Love, 1892) је увео следеће претпоставке:

- 1) дебљина љуске  $h$  је мала у поређењу са другим димензијама (нпр. најмањим полупречником кривине средње површи љуске),
- 2) деформације и померања су довољно мала, тако да величине другог и вишег реда у кинематичким релацијама могу да се занемаре у односу на чланове првог реда,
- 3) нормални напон  $\sigma_z$  је мали у поређењу са друга два нормална напона и може да се занемари,
- 4) нормала на недеформисану средњу површ остаје права и нормална на средњу површ после деформације и не мења дужину.

Све ове четири претпоставке заједно чине оно што је Love назвао “прва апроксимација” теорије љуски и оне су прихваћене као основа од стране скоро свих истраживача приликом извођења различитих теорија танких љуски. У оквиру овог поглавља биће приказано извођење основних једначина *Donnell-Mushtari*-еве ((Donnell 1938), (Mushtari 1938)), и *Flügge*-ове (Flügge 1962) теорије танких љуски које ће се користити у анализи вибрација и избочавања у оквиру ове тезе. *Donnell-Mushtari*-ева теорија је најједноставнија, док се *Flügge*-ова теорија сматра једном од најтачнијих теорија танких љуски. И једна и друга теорија спадају у најчешће коришћене теорије танких љуски што за последицу има многобројне резултате добијене њиховом применом. На тај начин је омогућена лакша верификација резултата добијених применом динамичких матрица крутости, које ће бити изведене у оквиру тезе.

Претпоставка (1) дефинише основу теорије танких љуски. Из ње следи да виши степени израза  $z/R$  и  $h/R$  могу да се занемаре у поређењу са јединицом. Из претпоставке (2) следи да су сви прорачуни везани за почетну (недеформисану) конфигурацију, што за последицу има линеарне диференцијалне једначине. Претпоставка (4) је позната као *Kirchhoff*-ова хипотеза. Из ње, за линеарно еластичан материјал чије је понашање услед оптерећења дефинисано *Hook*-овим законом, следи да су смичући напони  $\tau_{\alpha z}$  и  $\tau_{\beta z}$  једнаки нули:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{\alpha z} = 0 \\ \gamma_{\beta z} = 0 \\ \varepsilon_z = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Hook-ов закон}} \begin{array}{l} \tau_{\alpha z} = 0 \\ \tau_{\beta z} = 0 \end{array} \quad (4.5)$$

У том случају, смичући напони се одређују из услова равнотеже, како је то показно у (Краус, 1967). Још једна несагласност постоји у *Love*-овој “првој апроксимацији” теорије љуски, а то је да на основу претпоставки (3) и (4) треба истовремено и напон  $\sigma_z$  и деформација  $\varepsilon_z$  да буду једнаки нули.

❖ Кинематичке релације у ортогоналним криволинијским координатама

Добро познати изрази за везу између деформација и померања у теорији љуски дати су следећим изразима (Leissa, 1973):

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha} \right) \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \left( \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\beta} \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{A(1+z/R_\alpha)}{B(1+z/R_\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{u}{A(1+z/R_\alpha)} \right] + \frac{B(1+z/R_\beta)}{A(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{v}{B(1+z/R_\beta)} \right] \\ \gamma_{\alpha z} &= \frac{1}{A(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + A(1+z/R_\alpha) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{u}{A(1+z/R_\alpha)} \right] \\ \gamma_{\beta z} &= \frac{1}{B(1+z/R_\beta)} \frac{\partial w}{\partial \beta} + B(1+z/R_\beta) \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{v}{B(1+z/R_\beta)} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

где су:

- $u$ ,  $v$  и  $w$  померања на растојању  $z$  од средње површи у правцу тангенте на  $\alpha$ , односно  $\beta$  линију, и у правцу нормале у посматраној тачки,
- $R_\alpha$  и  $R_\beta$  су полупречници кривине  $\alpha$ , односно  $\beta$  линије,
- $z$  је растојање у правцу нормале произвољне тачке љуске и њене одговарајуће тачке која лежи на средњој површи.

Да би се задовољила (4) претпоставка, компонентална померања су дефинисана следећим линеарним релацијама:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta, z) &= u^0(\alpha, \beta) + z \cdot \psi_\beta(\alpha, \beta) \\ v(\alpha, \beta, z) &= v^0(\alpha, \beta) + z \cdot \psi_\alpha(\alpha, \beta) \\ w(\alpha, \beta, z) &= w^0(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (4.7)$$

где су:

- $u^0$ ,  $v^0$  и  $w^0$  померања у средњој површи у правцу  $\alpha$ ,  $\beta$  и нормале,
- $\psi_\alpha$  и  $\psi_\beta$  ротације нормале средње површи око осе  $\alpha$ , односно око осе  $\beta$ .

Када се прве две једначине из (4.7) замене у изразе за клизања  $\gamma_{\alpha z}$  и  $\gamma_{\beta z}$ , једначина (4.6), која су на основу (4) претпоставке једнака нули, добијају се изрази за обртања у функцији компоненталних померања:

$$\psi_\alpha(\alpha, \beta) = \frac{v^0}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w^0}{\partial \beta} \quad \psi_\beta(\alpha, \beta) = \frac{u^0}{R_\alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial w^0}{\partial \alpha} \quad (4.8)$$

Заменом једначина (4.7) у изразе за  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$  и  $\gamma_{\alpha\beta}$ , једначина (4.6), добија се веза између деформација и померања која се користи у *Flügge*-овој теорији:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} (\varepsilon_\alpha^0 + z\kappa_\alpha) & \varepsilon_\beta &= \frac{1}{(1+z/R_\beta)} (\varepsilon_\beta^0 + z\kappa_\beta) \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{(1+z/R_\alpha)(1+z/R_\beta)} \left[ \left( 1 - \frac{z^2}{R_\alpha R_\beta} \right) \gamma_{\alpha\beta}^0 + z \left( 1 + \frac{z}{2R_\alpha} + \frac{z}{2R_\beta} \right) \kappa_{\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

где су  $\varepsilon_\alpha^0$ ,  $\varepsilon_\beta^0$  и  $\gamma_{\alpha\beta}^0$  дилатације и клизање у средњој површи који су дати изразима (4.10), док су  $\kappa_\alpha$  и  $\kappa_\beta$  промене кривина средње површи, односно  $\kappa_{\alpha\beta}$  је промена мешовите кривине средње површи и дефинисани су једначинама (4.11).

$$\varepsilon_\alpha^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u^0}{\partial \alpha} + \frac{v^0}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w^0}{R_\alpha} \quad \varepsilon_\beta^0 = \frac{u^0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v^0}{\partial \beta} + \frac{w^0}{R_\beta} \quad (4.10)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^0 = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u^0}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v^0}{B} \right)$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\psi_\alpha}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad \kappa_\beta = \frac{\psi_\beta}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \beta}$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\psi_\beta}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\psi_\alpha}{B} \right) + \frac{1}{R_\alpha} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u^0}{\partial \beta} - \frac{v^0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R_\beta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial v^0}{\partial \alpha} - \frac{u^0}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \quad (4.11)$$

Једначине (4.9), (4.10) и (4.11) дефинишу кинематичке релације у оквиру *Flügge*-ове теорије.

Занемаривањем чланова  $z/R_\alpha$  и  $z/R_\beta$  и њихових производа у (4.9), као малих величина у односу на јединицу, добија се веза између деформација и померања која се користи у *Donnell-Mushtari*-евој теорији:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^0 + z\kappa_\alpha \quad \varepsilon_\beta = \varepsilon_\beta^0 + z\kappa_\beta \quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^0 + z\kappa_{\alpha\beta} \quad (4.12)$$

где су деформације у средњој површи  $\varepsilon_\alpha^0$ ,  $\varepsilon_\beta^0$  и  $\gamma_{\alpha\beta}^0$  дефинисане једначином (4.10), док се изрази за промене кривина добијају када се у изразима (4.11) занемаре померања  $u$ ,  $v$  и њихови изводи:

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w^0}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial w^0}{\partial \beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} & \kappa_\beta &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w^0}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial w^0}{\partial \alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ \kappa_{\alpha\beta} &= -\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial w^0}{\partial \beta} \right) - \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial w^0}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Једначинама (4.9), (4.12) и (4.13) су дефинисане кинематичке релације по *Donnell-Mushtari*-евој теорији.

Деформација танке љуске је у потпуности одређена деформацијом средње површи  $u$ ,  $v$  у обе теорије, укупна деформација у било којој тачки састоји се од два дела: деформације у средњој површи и деформације услед савијања. Деформације у средњој површи су исте за обе теорије и дате су једначинама (4.10), док су изрази за промене кривина  $\kappa_\alpha$ ,  $\kappa_\beta$  и  $\kappa_{\alpha\beta}$  дате једначинама (4.11) у случају *Flügge*-ове теорије, односно једначинама (4.13) у случају *Donnell-Mushtari*-евој теорији. *Kraus* (*Kraus*, 1967) је показао да је *Flügge*-ова теорија конзистентна, тј. да се заменом израза који представљају померање љуске као крутог тела у кинематичке релације не добијају деформације, док је *Kadi* (*Kadi*, 1970) показао да *Donnell-Mushtari*-ева теорија то није.

#### ❖ Пресечне силе

На основу *Kirchhoff*-ове хипотезе, претпоставка (4), померања  $u$  и  $v$  су ограничена на она померања која су линеарна функција координате  $z$ . Као последица тога, у *Donnell-Mushtari*-евој теорији деформације су такође линеарне функције од  $z$ , једначина (4.12), док је у *Flügge*-овој теорији ова

веза, једначина (4.9), нешто компликованија, али је такође потпуно дефинисана у односу на  $z$  координату. Ако је дефинисана веза између напона и деформација, коју у случају линеарно еластичног и хомогеног материјала дефинише *Hook*-ов закон:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E} [\sigma_\alpha - \nu(\sigma_\beta + \sigma_z)] & \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\alpha\beta} \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{E} [\sigma_\beta - \nu(\sigma_\alpha + \sigma_z)] & \gamma_{\alpha z} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\alpha z} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)] & \gamma_{\beta z} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\beta z}\end{aligned}\quad (4.14)$$

онда може да се одреди редуковани момент и резултанта унутрашњих сила који делују на јединицу дужине елемента средње површи (Најдин 1989).

Из једначине (4.14), на основу *Kirchhoff*-ове хипотезе, претпоставка (4), следи да је:

$$\tau_{\alpha z} = \tau_{\beta z} = 0 \quad \sigma_z = \nu(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) \quad (4.15)$$

Једначина (4.15) садржи две противречности које се јављају у теорији танких љуски (Leissa, 1973). На основу *Love*-ове претпоставке (3) напон  $\sigma_z$  је занемарљиво мали, док на основу другог израза, једначина (4.15), он постоји и не може да се занемари. Друга противречност је да су напони  $\tau_{\alpha z}$  и  $\tau_{\beta z}$  једнаки нули, а они постоје јер њихове резултанте (смичуће силе) морају да задовоље услове равнотеже. Ипак, смичући напони  $\tau_{\alpha z}$  и  $\tau_{\beta z}$  су обично мали у односу на остале компоненталне напоне  $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$  и  $\tau_{\alpha\beta}$ . Ако се усвоји да је  $\sigma_z = 0$ , веза између деформација и напона, једначина (4.14), је дефинисана једначином (4.16), у случају да су деформације изражене у функцији напона, односно једначином (4.17), ако су напони изражени у функцији деформација.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E} (\sigma_\alpha - \nu\sigma_\beta) \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E} (\sigma_\beta - \nu\sigma_\alpha) \quad \gamma_{\alpha\beta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\alpha\beta} \quad (4.16)$$

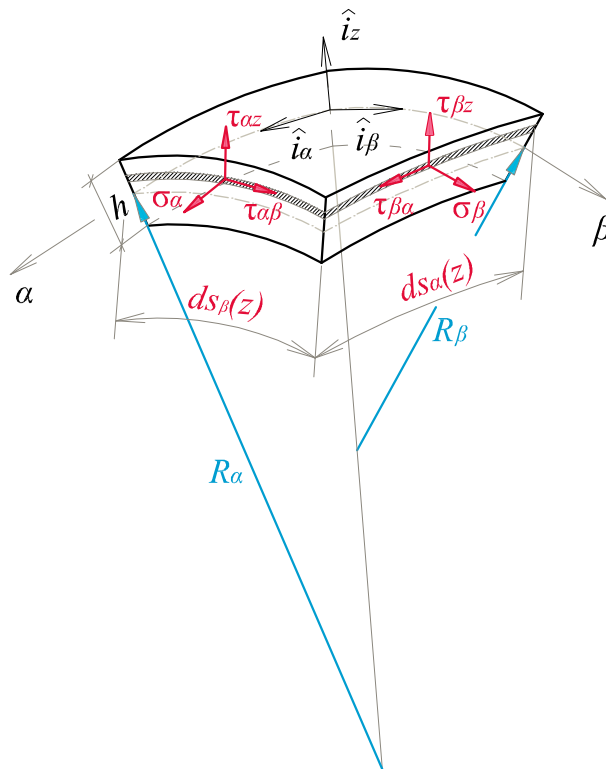
$$\sigma_\alpha = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta) \quad \sigma_\beta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha) \quad \tau_{\alpha\beta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\alpha\beta} \quad (4.17)$$

На Слици 4.2 је приказан диференцијално мали елемент љуске. На елементарну површину која је управна на  $\alpha$ -осу делују компонентални напони  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_{\alpha\beta}$  и  $\tau_{\alpha z}$ , док на површину која је управна на  $\beta$ -осу делују компонентални напони  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_{\beta\alpha}$  и  $\tau_{\beta z}$ . Дужине  $\alpha$  и  $\beta$  линија у средњој површи, односно на растојању  $z$  од средње површи, Слика 4.2, су једнаке:

$$\begin{aligned} ds_\alpha &= A d\alpha & ds_\beta &= B d\beta \\ ds_\alpha(z) &= A \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) d\alpha & ds_\beta(z) &= B \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) d\beta \end{aligned} \quad (4.18)$$

Компоненте редуccionог момента и резултанте унутрашњих сила у правцу координатних оса називају се пресечне силе и дефинисане су следећим изразима:

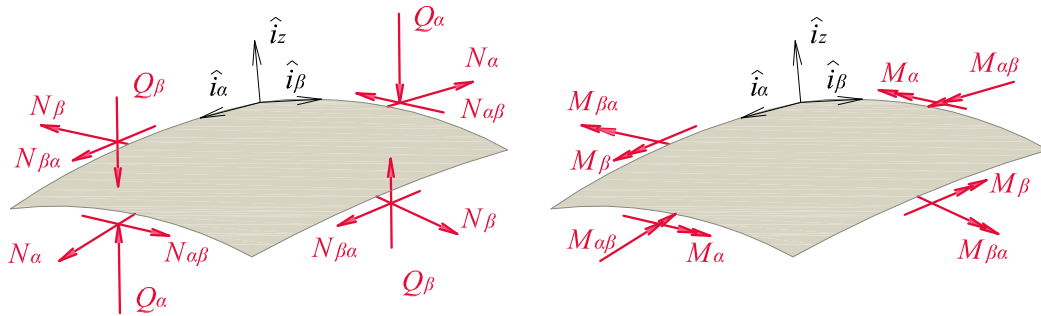
$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_\alpha \\ N_{\alpha\beta} \\ Q_\alpha \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\alpha z} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) dz & \begin{Bmatrix} M_\alpha \\ M_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\alpha \\ \tau_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) z dz \\ \begin{Bmatrix} N_\beta \\ N_{\beta\alpha} \\ Q_\beta \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\beta \\ \tau_{\beta\alpha} \\ \tau_{\beta z} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) dz & \begin{Bmatrix} M_\beta \\ M_{\beta\alpha} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\beta \\ \tau_{\beta\alpha} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) z dz \end{aligned} \quad (4.19)$$



Слика 4.2 - Конвенција о позитивним напонима



Позитивна конвенција за пресечне силе је дата на Слици 4.3. Иако су напони  $\tau_{\alpha\beta}$  и  $\tau_{\beta\alpha}$  једнаки, на основу става о коњугованости смичућих напона, из једначине (4.19) се види да смичуће силе и моменти торзије нису ( $N_{\alpha\beta} \neq N_{\beta\alpha}, M_{\alpha\beta} \neq M_{\beta\alpha}$ ).



Слика 4.3 - Конвенција о позитивним пресечним силама

Ако се у изразима за пресечне силе (4.19), напони изразе у функцији деформација, једначина (4.17), и занемаре чланови  $z/R_\alpha$  и  $z/R_\beta$ , добија се:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_\alpha \\ M_\alpha \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} (\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta) dz & \begin{Bmatrix} N_\beta \\ M_\beta \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} (\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha) dz \\ \begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} \\ M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \gamma_{\alpha\beta} dz \end{aligned} \quad (4.20)$$

Изрази за смичуће силе  $Q_\alpha$  и  $Q_\beta$  су изостављени, зато што, као што је већ раније речено, у теорији танких љуски они морају да се одреде из услова равнотеже. Заменом (4.12) у (4.20) добијају се изрази за пресечне силе који се користе у *Donnell-Mushtari*-евој теорији:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= D_1 (\varepsilon_\alpha^0 + \nu\varepsilon_\beta^0) & M_\alpha &= K (\kappa_\alpha + \nu\kappa_\beta) \\ N_\beta &= D_1 (\varepsilon_\beta^0 + \nu\varepsilon_\alpha^0) & M_\beta &= K (\kappa_\beta + \nu\kappa_\alpha) \\ N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} &= \frac{D_1(1-\nu)}{2} \gamma_{\alpha\beta}^0 & M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} &= \frac{K(1-\nu)}{2} \kappa_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.21)$$

где је  $D_1 = Eh/(1-\nu^2)$  крутост у “равни” љуске, а  $K = Eh^3/12(1-\nu^2)$  крутост љуске на савијање. Да би се добили изрази за пресечне силе у функцији компоненталних померања потребно је да се у једначини (4.21)  $\varepsilon_\alpha^0, \varepsilon_\beta^0, \gamma_{\alpha\beta}^0$  изразе помоћу једначине (4.10), а промене кривина  $\kappa_\alpha, \kappa_\beta$  и  $\kappa_{\alpha\beta}$  помоћу

једначине (4.13). У *Donnell-Mushtari*-евој теорији смичуће силе  $N_{\alpha\beta}$  и  $N_{\beta\alpha}$  су једнаке, што важи и за моменте торзије  $M_{\alpha\beta}$  и  $M_{\beta\alpha}$ .

Заменом (4.9) и (4.17) у (4.19) добијају се следећи изрази:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_\alpha \\ M_\alpha \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \left[ \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} (\varepsilon_\alpha^0 + z\kappa_\alpha) + \nu (\varepsilon_\beta^0 + z\kappa_\beta) \right] dz \\ \begin{Bmatrix} N_\beta \\ M_\beta \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \left[ \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} (\varepsilon_\beta^0 + z\kappa_\beta) + \nu (\varepsilon_\alpha^0 + z\kappa_\alpha) \right] dz \\ \begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)^{-1} \left[ \left(1 - \frac{z^2}{R_\alpha R_\beta}\right) \gamma_{\alpha\beta}^0 + z \left(1 + \frac{z}{2R_\alpha} + \frac{z}{2R_\beta}\right) \kappa_{\alpha\beta} \right] dz \\ \begin{Bmatrix} N_{\beta\alpha} \\ M_{\beta\alpha} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right)^{-1} \left[ \left(1 - \frac{z^2}{R_\alpha R_\beta}\right) \gamma_{\alpha\beta}^0 + z \left(1 + \frac{z}{2R_\alpha} + \frac{z}{2R_\beta}\right) \kappa_{\alpha\beta} \right] dz \end{aligned} \quad (4.22)$$

После интеграције једначина (4.22), при чему је израз  $1/(1+z/R_i)$ ,  $i = \alpha, \beta$ , развијен у *Taylor*-ов ред у околини  $z=0$  и задржани су чланови реда до трећег степена (Leissa, 1973), добијају се за изрази за пресечне силе који важе у *Flügge*-евој теорији:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= D_1 \left[ \varepsilon_\alpha^0 + \nu \varepsilon_\beta^0 - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) \left( \kappa_\alpha - \frac{\varepsilon_\alpha^0}{R_\alpha} \right) \right] \\ N_\beta &= D_1 \left[ \varepsilon_\beta^0 + \nu \varepsilon_\alpha^0 - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_\beta} - \frac{1}{R_\alpha} \right) \left( \kappa_\beta - \frac{\varepsilon_\beta^0}{R_\beta} \right) \right] \\ N_{\alpha\beta} &= \frac{D_1(1-\nu)}{2} \left[ \gamma_{\alpha\beta}^0 - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) \left( \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{2} - \frac{\gamma_{\alpha\beta}^0}{R_\alpha} \right) \right] \\ N_{\beta\alpha} &= \frac{D_1(1-\nu)}{2} \left[ \gamma_{\alpha\beta}^0 - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_\beta} - \frac{1}{R_\alpha} \right) \left( \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{2} - \frac{\gamma_{\alpha\beta}^0}{R_\beta} \right) \right] \\ M_\alpha &= K \left[ \kappa_\alpha + \nu \kappa_\beta - \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) \varepsilon_\alpha^0 \right] \\ M_\beta &= K \left[ \kappa_\beta + \nu \kappa_\alpha - \left( \frac{1}{R_\beta} - \frac{1}{R_\alpha} \right) \varepsilon_\beta^0 \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \kappa_{\alpha\beta} - \frac{\gamma_{\alpha\beta}^0}{R_\alpha} \right)$$

$$M_{\beta\alpha} = \frac{K(1-\nu)}{2} \left( \kappa_{\alpha\beta} - \frac{\gamma_{\alpha\beta}^0}{R_\beta} \right)$$

Изрази за деформације средње површи  $\varepsilon_\alpha^0$ ,  $\varepsilon_\beta^0$  и  $\gamma_{\alpha\beta}^0$  и промене кривина  $\kappa_\alpha$ ,  $\kappa_\beta$  и  $\kappa_{\alpha\beta}$  дефинисани у функцији компоненталних померања једначинама (4.10) и (4.11).

❖ Једначине кретања

Једначине кретања, које су изведене на основу *D'Alambert*-овог принципа, представљају услове равнотеже диференцијално малог елемента љуске услед дејства инерцијалних сила и дате су следећим једначинама (Leissa, 1973):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AN_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial\beta}N_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_\beta + \frac{AB}{R_\alpha}Q_\alpha + ABq_\alpha &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial\beta}(AN_\beta) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}N_\alpha + \frac{AB}{R_\beta}Q_\beta + ABq_\beta &= 0 \\ -\frac{AB}{R_\alpha}N_\alpha - \frac{AB}{R_\beta}N_\beta + \frac{\partial}{\partial\alpha}(BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AQ_\beta) + ABq_n &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AM_{\beta\alpha}) + \frac{\partial A}{\partial\beta}M_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_\beta - ABQ_\alpha + ABm_\beta &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial\beta}(AM_\beta) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(BM_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_\alpha - ABQ_\beta + ABm_\alpha &= 0 \\ N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} &= 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

где су:

$$q_\alpha = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad q_\beta = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad q_n = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.25}$$

Ротациона инерција може да буде укључена у анализу преко компоненти момената  $m_\alpha$  и  $m_\beta$ , али овај утицај постаје значајан тек код дебелих љуски ( $h/R > 1/10$ ,  $R$  је најмањи полупречник кривине средње површи љуски) код којих мора да се узме у обзир и утицај деформације смицања.

Ако се у шесту једначину (4.24) замене изрази (4.19), добија се:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{\alpha\beta} - \tau_{\beta\alpha}) \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) dz = 0 \quad (4.26)$$

Једначина (4.26) је идентички задовољена ако је  $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ .

Услови равнотеже (4.24) важе у *Flügge*-овој теорији.

Услови равнотеже у случају *Donnell-Mushtari*-еве теорије, који се добијају када се у прва два услова равнотеже, једначине (4.24), занемаре чланови  $Q_\alpha$  и  $Q_\beta$ , су:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + ABq_\alpha &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha + ABq_\beta &= 0 \\ -\frac{AB}{R_\alpha} N_\alpha - \frac{AB}{R_\beta} N_\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_\beta) + ABq_n &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_{\alpha\beta}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta - ABQ_\alpha + ABm_\beta &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_\beta) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_{\alpha\beta}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\alpha\beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha - ABQ_\beta + ABm_\alpha &= 0 \\ N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\alpha} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

#### ❖ Гранични услови

У случају да се контуре поклапају са координатним линијама, услови да је рад контурних сила на померањима контуре једнак нули за  $\alpha = \alpha_2$  контуру, односно  $\beta = \beta_2$  контуру, су дефинисани на следећи начин (Leissa, 1973):

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left( \vec{F}_\alpha \cdot \vec{u} + \vec{M}_\alpha \cdot \vec{\Omega} \right) \Big|_{\alpha=\alpha_2} B d\beta = 0 \\ W_2 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( \vec{F}_\beta \cdot \vec{u} + \vec{M}_\beta \cdot \vec{\Omega} \right) \Big|_{\beta=\beta_2} A d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

где је:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= u\hat{i}_\alpha + v\hat{i}_\beta + w\hat{i}_n \\ \vec{\Omega} &= -\psi_\alpha\hat{i}_\alpha + \psi_\beta\hat{i}_\beta \end{aligned} \quad (4.29)$$

$\vec{F}_\alpha$  и  $\vec{F}_\beta$  су резултанте сила, док су  $\vec{M}_\alpha$  и  $\vec{M}_\beta$  резултанте момената које делују у пресеку  $\alpha = const$ , односно  $\beta = const$ , и дате су следећим изразима:

$$\begin{aligned}\vec{F}_\alpha &= (N_\alpha \hat{i}_\alpha + N_{\alpha\beta} \hat{i}_\beta + Q_\alpha \hat{i}_n) B d\beta & \vec{M}_\alpha &= (-M_{\alpha\beta} \hat{i}_\alpha + M_\alpha \hat{i}_\beta) B d\beta \\ \vec{F}_\beta &= (N_{\beta\alpha} \hat{i}_\alpha + N_\beta \hat{i}_\beta + Q_\beta \hat{i}_n) A d\alpha & \vec{M}_\beta &= (-M_\beta \hat{i}_\alpha + M_{\beta\alpha} \hat{i}_\beta) A d\alpha\end{aligned}\quad (4.30)$$

Заменом израза (4.29), (4.30) и (4.8) у једначину (4.28) добија се:

$$\begin{aligned}W_1 &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left( N_\alpha u + N_{\alpha\beta} v + Q_\alpha w + M_{\alpha\beta} \left( \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + M_\alpha \psi_\beta \right) \Big|_{\alpha=\alpha_2} B d\beta = 0 \\ W_2 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left( N_{\beta\alpha} u + N_\beta v + Q_\beta w + M_{\beta\alpha} \psi_\alpha + M_{\beta\alpha} \left( \frac{u}{R_\alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right) \Big|_{\beta=\beta_2} A d\alpha = 0\end{aligned}\quad (4.31)$$

Након парцијалне интеграције:

$$\begin{aligned}\int_{\beta_1}^{\beta_2} M_{\alpha\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} d\beta &= M_{\alpha\beta} w \Big|_{\beta_1}^{\beta_2} - \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} w d\beta \\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M_{\beta\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} d\alpha &= M_{\beta\alpha} w \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} w d\alpha\end{aligned}\quad (4.32)$$

и замене израза (4.32) у једначину (4.31) добија се:

$$\begin{aligned}W_1 &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \left[ N_\alpha u + \left( N_{\alpha\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\beta} \right) v + \left( Q_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) w + M_\alpha \psi_\beta \right] \Big|_{\alpha=\alpha_2} B d\beta \\ &\quad - M_{\alpha\beta} w \Big|_{\beta_1}^{\beta_2} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = 0 \\ W_2 &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[ \left( N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\alpha} \right) u + N_\beta v + \left( Q_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} \right) w + M_{\beta\alpha} \psi_\alpha \right] \Big|_{\beta=\beta_2} A d\alpha \\ &\quad - M_{\beta\alpha} w \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Big|_{\beta=\beta_2} = 0\end{aligned}\quad (4.33)$$

Једначине (4.33) су задовољене ако је сваки члан под интегралом, као и други део израза (4.33) једнак нули, па су гранични услови на контурама  $\alpha = const$  и  $\beta = const$  дати по:

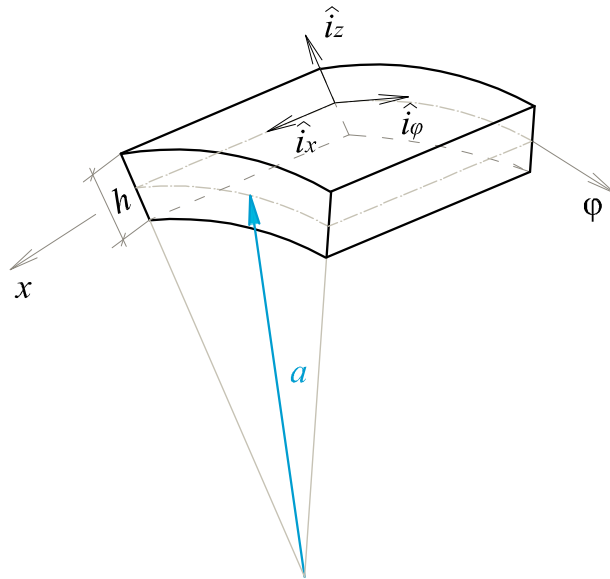
$$\begin{array}{ll}
 \underline{\alpha = const} & \underline{\beta = const} \\
 N_{\alpha} \quad \text{или} \quad u = 0 & N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\beta\alpha}}{R_{\alpha}} \quad \text{или} \quad u = 0 \\
 N_{\alpha\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_{\beta}} \quad \text{или} \quad v = 0 & N_{\beta} \quad \text{или} \quad v = 0 \\
 Q_{\alpha} + \frac{1}{B} \frac{M_{\alpha\beta}}{\partial\beta} \quad \text{или} \quad w = 0 & Q_{\beta} + \frac{1}{A} \frac{M_{\beta\alpha}}{\partial\alpha} \quad \text{или} \quad w = 0 \\
 M_{\alpha} \quad \text{или} \quad \psi_{\beta} = 0 & M_{\beta} \quad \text{или} \quad \psi_{\alpha} = 0 \\
 M_{\alpha\beta} w|_{\beta_1}^{\beta_2} = 0 & M_{\beta\alpha} w|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0
 \end{array} \tag{4.34}$$

Ако су  $\beta$  и  $\alpha$  криве затворене криве, онда су услови  $M_{\alpha\beta} w|_{\beta_1}^{\beta_2} = 0$  и  $M_{\beta\alpha} w|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = 0$  идентички задовољени.

### 4.3 Кружна цилиндрична љуска

У оквиру овог поглавља су основне једначине теорије танких љуски по *Donnell-Mushtari*-евој и *Flügge*-ове теорији, које су дате у Поглављу 4.2, сведене на једначине које важе у случају кружне цилиндричне љуске.

Код кружне цилиндричне љуске криволинијске координате су:  $\alpha = x$  и  $\beta = \varphi$ , главни полупречници кривина су:  $R_{\alpha} = \infty$  и  $R_{\beta} = a$ ,  $A = 1$ ,  $B = a$ , где је  $a$  полупречник кружне цилиндричне љуске, Слика 4.4.



Слика 4.4 - Кружна цилиндрична љуска

## 4.3.1 Donnell-Mushtari-ева теорија

Везе између деформација и померања су:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 + z\kappa_\varphi \quad \gamma_{x\varphi} = \gamma_{x\varphi}^0 + z\kappa_{x\varphi} \quad (4.35)$$

где су:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad \varepsilon_\varphi^0 = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} + w^0 \right) \quad \gamma_{x\varphi}^0 = \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \quad (4.36)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \quad \kappa_\varphi = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi^2} \quad \kappa_{x\varphi} = -\frac{2}{a} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \varphi} \quad (4.37)$$

Изрази за пресечне силе и једначине кретања су дати једначинама (4.38) и (4.39):

$$\begin{aligned} N_x &= D_1 \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\nu}{a} \left( w^0 + \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} \right) \right] & M_x &= -K \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi^2} \right) \\ N_\varphi &= D_1 \left[ \frac{1}{a} \left( w^0 + \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} \right) + \nu \frac{\partial u^0}{\partial x} \right] & M_\varphi &= -K \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \right) \\ N_{x\varphi} = N_{\varphi x} &= \frac{D_1(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) & M_{x\varphi} = M_{\varphi x} &= -\frac{K(1-\nu)}{a} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \varphi} \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \quad \dots(1) & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} - Q_x &= 0 \quad \dots(4) \\ \frac{1}{a} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \quad \dots(2) & \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - Q_\varphi &= 0 \quad \dots(5) \\ -\frac{N_\varphi}{a} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \quad \dots(3) & & \end{aligned} \quad (4.39)$$

Из четврте и пете једначине (4.39) могу да се одреде трансверзалне силе:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} \quad Q_\varphi = \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} \quad (4.40)$$

Када се изрази (4.40) замене у трећу једначину (4.39), једначине кретања се сведе на:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} - \rho h \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} &= 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \rho h \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} &= 0 \\
 -\frac{N_\varphi}{a} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{a} \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} - \rho h \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Заменом (4.38) у (4.41) добија се систем од три парцијалне диференцијалне једначине са три непознате  $u^0$ ,  $v^0$  и  $w^0$ , који дефинише проблем слободних вибрација кружне цилиндричне љуске по *Donnell-Mushtari*-евој теорији:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D_1 \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\nu}{a} \left( w^0 + \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} \right) \right] \right\} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{D_1(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) \right] - \rho h \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} &= 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ D_1 \left[ \frac{1}{a} \left( w^0 + \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} \right) + \nu \frac{\partial u^0}{\partial x} \right] \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{D_1(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) \right] - \rho h \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} &= 0 \\
 -\frac{1}{a} \left\{ D_1 \left[ \frac{1}{a} \left( w^0 + \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} \right) + \nu \frac{\partial u^0}{\partial x} \right] \right\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -K \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi^2} \right) \right] \\
 + \frac{2}{a} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \left( -K(1-\nu) \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \varphi} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left[ -K \left( \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \right) \right] - \rho h \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Запис једначине (4.42) у матричном облику, при чему су све једначине (4.42) подељене са  $D_1$ , док је трећа једначина и помножена са минус један да би се добила симетрична матрица, је:

$$\begin{bmatrix}
 \partial_x^2 + \frac{(1-\nu)}{2a^2} \partial_\varphi^2 - \frac{\rho h}{D_1} \partial_t^2 & \frac{(1+\nu)}{2a} \partial_x \partial_\varphi & \frac{\nu}{a} \partial_x \\
 \frac{(1+\nu)}{2a} \partial_x \partial_\varphi & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \partial_x^2 - \frac{\rho h}{D_1} \partial_t^2 & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi \\
 \frac{\nu}{a} \partial_x & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi & \frac{K}{D_1} \left( \partial_x^4 + \frac{2}{a^2} \partial_x^2 \partial_\varphi^2 + \frac{1}{a^4} \partial_\varphi^4 \right) + \frac{1}{a^2} + \frac{\rho h}{D_1} \partial_t^2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u^0 \\
 v^0 \\
 w^0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

где су:  $\partial_x = \partial/\partial x$ ,  $\partial_\varphi = \partial/\partial \varphi$  и  $\partial_t = \partial/\partial t$ .



### 4.3.2 Flügge-ова теорија

Да би се лакше уочила разлика у кинематичким релацијама, изразима за пресечне силе и у једначинама кретања између *Donnell-Mushtari*-еве и *Flügge*-ове теорија, чланови у боји у оквиру овог поглавља су они који не постоје у *Donnell-Mushtari*-евој, а јављају се у *Flügge*-овој теорији.

Везе између деформација и померања су:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= (\varepsilon_x^0 + z\kappa_x) & \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{(1+z/a)}(\varepsilon_\varphi^0 + z\kappa_\varphi) \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{1}{(1+z/a)} \left[ \gamma_{x\varphi}^0 + z \left( 1 + \frac{z}{2a} \right) \kappa_{x\varphi} \right]\end{aligned}\quad (4.44)$$

где су:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x} \quad \varepsilon_\varphi^0 = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} + w^0 \right) \quad \gamma_{x\varphi}^0 = \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \quad (4.45)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \quad \kappa_\varphi = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi^2} \right) \quad \kappa_{x\varphi} = \frac{2}{a} \left( \frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi \partial x} \right) \quad (4.46)$$

Изрази за пресечне силе су:

$$\begin{aligned}N_x &= D_1 \left[ \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\nu}{a} \left( w^0 + \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} \right) \right] - \frac{K}{a} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ N_\varphi &= D_1 \left[ \frac{1}{a} \left( w^0 + \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} \right) + \nu \frac{\partial u^0}{\partial x} \right] + \frac{K}{a^3} \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi^2} + w^0 \right) \\ N_{x\varphi} &= \frac{D_1(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) + \frac{K(1-\nu)}{2a^2} \left( \frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \varphi} \right) \\ N_{\varphi x} &= \frac{D_1(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) + \frac{K(1-\nu)}{2a^2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \varphi} \right) \\ M_x &= -K \left[ \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v^0}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial x} \right] \\ M_\varphi &= -K \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial \varphi^2} + w^0 \right) + \nu \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \right] \\ M_{x\varphi} &= -\frac{K(1-\nu)}{a} \left( \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) \\ M_{\varphi x} &= -\frac{K(1-\nu)}{2a} \left( 2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}\quad (4.47)$$

Једначине кретања су дате следећим изразима:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} - \rho h \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} &= 0 \quad \dots(1) & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} - Q_x &= 0 \quad \dots(4) \\
 \frac{1}{a} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{Q_\varphi}{a} - \rho h \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} &= 0 \quad \dots(2) & \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - Q_\varphi &= 0 \quad \dots(5) \quad (4.48) \\
 -\frac{N_\varphi}{a} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} - \rho h \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} &= 0 \quad \dots(3)
 \end{aligned}$$

Трансверзалне силе  $Q_x$  и  $Q_\varphi$ , изражене из (4) и (5) једначине (4.48), су једнаке:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} \quad Q_\varphi = \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} \quad (4.49)$$

На основу већ приказаног поступка, добија се систем од три парцијалне диференцијалне једначине, записан у матричном облику, којим је дефинисан проблем слободних вибрација у случају *Flügge*-ове теорије:

$$\begin{bmatrix}
 \partial_x^2 + \frac{(1-\nu)}{2a^2} \left( 1 + \frac{K}{D_1 a^2} \right) \partial_\varphi^2 - \frac{\rho h}{D_1} \partial_t^2 & \frac{(1+\nu)}{2a} \partial_x \partial_\varphi & \frac{\nu}{a} \partial_x - \frac{K}{D_1 a} \partial_x^3 + \frac{K}{D_1 a^3} \frac{(1-\nu)}{2} \partial_x \partial_\varphi^2 \\
 \frac{(1+\nu)}{2a} \partial_x \partial_\varphi & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left( 1 + \frac{3K}{D_1 a^2} \right) \partial_x^2 & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi - \frac{K}{D_1 a^2} \frac{(3-\nu)}{2} \partial_x^2 \partial_\varphi \\
 \frac{\nu}{a} \partial_x - \frac{K}{D_1 a} \partial_x^3 + \frac{K}{D_1 a^3} \frac{(1-\nu)}{2} \partial_x \partial_\varphi^2 & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi - \frac{K}{D_1 a^2} \frac{(3-\nu)}{2} \partial_x^2 \partial_\varphi & \frac{K}{D_1} \left( \partial_x^4 + \frac{2}{a^2} \partial_x^2 \partial_\varphi^2 + \frac{1}{a^4} \partial_\varphi^4 \right) + \frac{1}{a^2} + \frac{\rho h}{D_1} \partial_t^2 + \frac{2K}{D_1 a^4} \partial_\varphi^2 + \frac{K}{D_1 a^4}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u^0 \\
 v^0 \\
 w^0
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

## 5 КОНТИНУАЛНИ ЕЛЕМЕНТ ЗАТВОРЕНЕ КРУЖНЕ ЦИЛИНДРИЧНЕ ЉУСКЕ ЗА АНАЛИЗУ ВИБРАЦИЈА И ИЗБОЧАВАЊА

### 5.1 Опште решење проблема слободних вибрација затворене кружне цилиндричне љуске

Поступак за решавање проблема слободних вибрација затворене кружне цилиндричне љуске биће приказан прво за *Donnell-Mushtari*-еву теорију, а онда ће бити наведене само разлике које се јављају у случају *Flügge*-ове теорије. Надаље ће у тексту, ради једноставности, термин кружна цилиндрична љуска означавати затворену кружну цилиндричну љуску.

#### 5.1.1 Donnell-Mushtari-ева теорија

Решење система диференцијалних једначина (4.43) је претпостављено у облику производа две функције, при чему је једна функција просторних координата, а друга функција времена:

$$u^0(x, \varphi, t) = \hat{u}(x, \varphi)e^{i\omega t} \quad v^0(x, \varphi, t) = \hat{v}(x, \varphi)e^{i\omega t} \quad w^0(x, \varphi, t) = \hat{w}(x, \varphi)e^{i\omega t} \quad (5.1)$$

Заменом (5.1) у (4.43) добија се:

$$\begin{bmatrix} \partial_x^2 + \frac{(1-\nu)}{2a^2} \partial_\varphi^2 + \frac{\rho h \omega^2}{D_1} & \frac{(1+\nu)}{2a} \partial_x \partial_\varphi & \frac{\nu}{a} \partial_x \\ \frac{(1+\nu)}{2a} \partial_x \partial_\varphi & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \partial_x^2 + \frac{\rho h \omega^2}{D_1} & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi \\ \frac{\nu}{a} \partial_x & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi & \frac{K}{D_1} \left( \partial_x^4 + \frac{2}{a^2} \partial_x^2 \partial_\varphi^2 + \frac{1}{a^4} \partial_\varphi^4 \right) + \frac{1}{a^2} - \frac{\rho h \omega^2}{D_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

За кружну цилиндричну љуску компонентална померања  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  и  $\hat{w}$  морају да задовољавају услов периодичности у тангенцијалном правцу, па је решење система (5.2) усвојено у облику бесконачног *Fourier*-овог реда:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(x) \sin(m\varphi) \\ \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_m(x) \sin(m\varphi) + \sum_{m=0}^{\infty} V_m(x) \cos(m\varphi) \\ \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} W_m(x) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x) \sin(m\varphi) \end{aligned} \quad (5.3)$$

где  $m$  представља цео број.

У случају да гранични услови нису константи по обиму, решење проблема слободних вибрација би зависило од свих хармоника у једначини (5.3). У оквиру тезе биће приказано решење за случај кад гранични услови не зависе од координате  $\varphi$ . Тада су решења за поједине хармонике независна, па уместо решења у облику суме (*Fourier*-ов ред) може да се посматра само  $m$ -ти хармоник.

### 5.1.1.1 Асиметричне вибрације $m \geq 1$

Избор тригонометријских функција у 1. делу решења, једначина (5.3), омогућава трансформацију система једначина (5.2) у систем три обичне диференцијалне једначине:

$$\begin{bmatrix} \partial_x^2 - \frac{(1-\nu)m^2}{2a^2} + \frac{\rho h \omega^2}{D_1} & \frac{(1+\nu)m}{2a} \partial_x & \frac{\nu}{a} \partial_x \\ -\frac{(1+\nu)m}{2a} \partial_x & \frac{(1-\nu)}{2} \partial_x^2 - \frac{m^2}{a^2} + \frac{\rho h \omega^2}{D_1} & -\frac{m}{a^2} \\ \frac{\nu}{a} \partial_x & \frac{m}{a^2} & \frac{K}{D_1} \left( \partial_x^4 - \frac{2m^2}{a^2} \partial_x^2 + \frac{m^4}{a^4} \right) + \frac{1}{a^2} - \frac{\rho h \omega^2}{D_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m(x) \\ V_m(x) \\ W_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Исто важи и за 2. део решења (5.3). У раду је приказан поступак за решење проблема слободних вибрација за 1. део решења, док се решење за 2. део одређују на идентичан начин. На крају, сопствене вредности добијене применом и једног и другог дела су исте, што значи да су код кружне цилиндричне љуске све сопствене фреквенције двоструке.

Систем једначина (5.4) може да се запише у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} c_{1,m} \partial_x^2 + c_{2,m} & c_{3,m} \partial_x & c_{4,m} \partial_x \\ -c_{3,m} \partial_x & c_{5,m} \partial_x^2 + c_{6,m} & c_{7,m} \\ c_{4,m} \partial_x & -c_{7,m} & c_{8,m} \partial_x^4 + c_{9,m} \partial_x^2 + c_{10,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m(x) \\ V_m(x) \\ W_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

где су:

$$\begin{aligned} c_{1,m} &= 1 & c_{6,m} &= -m^2/a^2 + \rho h \omega^2 / D_1 \\ c_{2,m} &= -(1-\nu)m^2 / 2a^2 + \rho h \omega^2 / D_1 & c_{7,m} &= -m/a^2 \\ c_{3,m} &= (1+\nu)m / 2a & c_{8,m} &= K / D_1 \\ c_{4,m} &= \nu/a & c_{9,m} &= -2Km^2 / Da^2 \\ c_{5,m} &= (1-\nu)/2 & c_{10,m} &= Km^4 / Da^4 + 1/a^2 - \rho h \omega^2 / D_1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Развојем детерминанте, систем једначина (5.5) се своди на једну једначину осмог реда која важи за све три функције:

$$\left(\partial_x^8 + a_{1,m}\partial_x^6 + a_{2,m}\partial_x^4 + a_{3,m}\partial_x^2 + a_{4,m}\right)\Psi = 0 \quad (5.7)$$

где је  $\Psi = U_m(x)$  или  $V_m(x)$  или  $W_m(x)$  и:

$$\begin{aligned} a_{1,m} &= \frac{c_{3,m}^2 + c_{2,m}c_{5,m} + c_{1,m}c_{6,m}}{c_{1,m}c_{5,m}} + \frac{c_{9,m}}{c_{8,m}} \\ a_{2,m} &= \frac{c_{1,m}c_{10,m}c_{5,m} - c_{4,m}^2c_{5,m} + c_{2,m}c_{6,m}c_{8,m} + c_{9,m}(c_{3,m}^2 + c_{2,m}c_{5,m} + c_{1,m}c_{6,m})}{c_{1,m}c_{5,m}c_{8,m}} \\ a_{3,m} &= \frac{c_{6,m}(c_{2,m}c_{9,m} - c_{4,m}^2) + c_{10,m}(c_{3,m}^2 + c_{2,m}c_{5,m} + c_{1,m}c_{6,m}) + 2c_{3,m}c_{4,m}c_{7,m} + c_{1,m}c_{7,m}^2}{c_{1,m}c_{5,m}c_{8,m}} \\ a_{4,m} &= \frac{c_{2,m}(c_{10,m}c_{6,m} + c_{7,m}^2)}{c_{1,m}c_{5,m}c_{8,m}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Решење једначине (5.7) се усваја у облику  $\Psi = e^{rx}$  и добија се карактеристична једначина:

$$r^8 + a_{1,m}r^6 + a_{2,m}r^4 + a_{3,m}r^2 + a_{4,m} = 0 \quad (5.9)$$

Помоћу смене  $\mu = r^2$  једначина (5.9) се редукује на следећу једначину четвртог степена:

$$\mu^4 + a_{1,m}\mu^3 + a_{2,m}\mu^2 + a_{3,m}\mu + a_{4,m} = 0 \quad (5.10)$$

чији су корени означени са:  $r_{1,m} = \sqrt{\mu_{1,m}}$ ,  $r_{2,m} = -\sqrt{\mu_{1,m}}$ ,  $r_{3,m} = \sqrt{\mu_{2,m}}$ ,  $r_{4,m} = -\sqrt{\mu_{2,m}}$ ,  $r_{5,m} = \sqrt{\mu_{3,m}}$ ,  $r_{6,m} = -\sqrt{\mu_{3,m}}$ ,  $r_{7,m} = \sqrt{\mu_{4,m}}$  и  $r_{8,m} = -\sqrt{\mu_{4,m}}$ .

Решења за непознате функције су:

$$U_m(x) = \sum_{i=1}^8 A_{i,m} e^{r_{i,m}x} \quad V_m(x) = \sum_{i=1}^8 B_{i,m} e^{r_{i,m}x} \quad W_m(x) = \sum_{i=1}^8 C_{i,m} e^{r_{i,m}x} \quad (5.11)$$

Само осам интеграционих константи од укупно 24 ( $A_{i,m}, B_{i,m}, C_{i,m}$ ), једначина (5.11), су међусобно независне. Интеграционе константе  $A_{i,m}$ ,  $B_{i,m}$  су изражене у функцији  $C_{i,m}$ :

$$A_{i,m} = \delta_{i,m} C_{i,m} \quad B_{i,m} = \gamma_{i,m} C_{i,m} \quad (5.12)$$

$\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$  су коефицијенти који представљају однос амплитуда аксијалног  $u$  и радијалног  $w$ , односно тангенцијалног  $v$  и радијалног  $w$  померања, и дати су следећим изразима:

$$\begin{aligned}\delta_{i,m} &= -\frac{-c_{7,m}^2 - (c_{6,m} + c_{5,m}r_{i,m}^2)(c_{10,m} + c_{9,m}r_{i,m}^2 + c_{8,m}r_{i,m}^4)}{c_{3,m}c_{7,m}r_{i,m} - c_{4,m}r_{i,m}(c_{6,m} + c_{5,m}r_{i,m}^2)} \\ \gamma_{i,m} &= \frac{c_{4,m}c_{7,m} + c_{3,m}(c_{10,m} + c_{9,m}r_{i,m}^2 + c_{8,m}r_{i,m}^4)}{c_{3,m}c_{7,m} - c_{4,m}(c_{6,m} + c_{5,m}r_{i,m}^2)} \\ i &= 1, \dots, 8\end{aligned}\quad (5.13)$$

Коначно, аналитички изрази за померања кружне цилиндричне љуске су:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \delta_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m}x} \right) \cos(m\varphi) \\ \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \gamma_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m}x} \right) \sin(m\varphi) \\ \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} e^{r_{i,m}x} \right) \cos(m\varphi)\end{aligned}\quad (5.14)$$

Заменом израза (5.14) у једначину (4.38) и (4.40) добијају се изрази за пресечне силе који важе у *Donnell-Mushtari*-евој теорији.

### 5.1.1.2 Ротационо-симетричне вибрације $m = 0$

Слободне вибрације које не зависи од координате  $\varphi$  се називају ротационо-симетричне вибрације и њима одговара решење за  $m = 0$  у једначини (5.3). За случај ротационо-симетричних вибрација, систем једначина (5.2) се раздваја на два независна система једначина:

$$\begin{bmatrix} d_x^2 + \frac{\rho h \omega^2}{D_1} & \frac{\nu}{a} d_x \\ \frac{\nu}{a} d_x & \frac{K}{D_1} d_x^4 + \frac{1}{a^2} - \frac{\rho h \omega^2}{D_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0(x) \\ W_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (5.15)$$

$$\frac{(1-\nu)}{2} \frac{d^2 V_0(x)}{dx^2} + \frac{\rho h \omega^2}{D_1} V_0(x) = 0\quad (5.16)$$

где је  $d_x = d/dx$ . У једначини (5.15) спрегнути су радијално померање  $w$  и аксијално померање  $u$ , док у једначини (5.16) фигурише само тангенцијално померање  $v$ , па се ове вибрације називају још и ротационо-симетричне торзионе вибрације.

- ❖ Решење проблема ротационо-симетричних вибрације за случај спрегнутог померања  $u$  и  $w$

Систем једначина (5.15) записан у матричном облику је:

$$\begin{bmatrix} c_1 d_x^2 + c_2 & c_3 d_x \\ c_3 d_x & c_4 d_x^4 + c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0(x) \\ W_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

где су:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 & c_4 &= K/D_1 \\ c_2 &= \rho h \omega^2 / D_1 & c_5 &= 1/a^2 - \rho h \omega^2 / D_1 \\ c_3 &= \nu / a \end{aligned} \quad (5.18)$$

Развојем детерминанте систем једначина (5.17) се свде на једну једначину шестог реда:

$$(d_x^6 + a_1 d_x^4 + a_2 d_x^2 + a_3) \Psi = 0 \quad (5.19)$$

где је:  $\Psi = U_0(x)$  или  $W_0(x)$ , и чија је карактеристична једначина:

$$r^6 + a_1 r^4 + a_2 r^2 + a_3 = 0 \quad (5.20)$$

Коефицијенти карактеристичне једначине (5.20) су дефинисани следећим изразима:

$$\begin{aligned} a_1 &= c_2 / c_1 \\ a_2 &= (-c_3^2 + c_1 c_5) / c_1 c_4 \\ a_3 &= c_2 c_5 / c_1 c_4 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Коначни изрази за померања су:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= \sum_{i=1}^6 \delta_i C_i e^{r_i x} \\ \hat{w}(x) &= \sum_{i=1}^6 C_i e^{r_i x} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Коефицијенти  $\delta_i$ , који представљају однос амплитуде померања  $u$  и  $w$ , су једнаки:

$$\delta_i = -\frac{c_3 r_i}{c_1 r_i^2 + c_2}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (5.23)$$

Заменом израза (5.22) у једначине (4.38) и (4.40) добијају се изрази за пресечне силе, при чему је  $M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = Q_{\varphi} = 0$ .

❖ Решење проблема торзионих ротационо-симетричних вибрација  
Решење за померање  $v$  у случај торзионих ротационо-симетричних  
вибрација је:

$$\hat{v}(x) = \sum_{i=1}^2 B_i e^{r_i x} \quad (5.24)$$

где је:

$$r_1 = -r_2 = \sqrt{2\rho h\omega^2 / (D_1(1-\nu))} \quad (5.25)$$

Заменом израза (5.24) у једначине (4.38) и (4.40) добијају се изрази за пресечне силе, при чему су све силе осим  $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$  једнаке нули.

## 5.1.2 Flügge-ова теорија

### 5.1.2.1 Асиметричне вибрације $m \geq 1$

Код Flügge-ове теорије заменом усвојеног решења, једначине (5.1) и (5.3) (1. део), у (4.50) добија се:

$$\begin{bmatrix} c_{1,m}\partial_x^2 + c_{2,m} & c_{3,m}\partial_x & c_{4,m}\partial_x^3 + c_{5,m}\partial_x \\ -c_{3,m}\partial_x & c_{6,m}\partial_x^2 + c_{7,m} & c_{8,m}\partial_x^2 + c_{9,m} \\ c_{4,m}\partial_x^3 + c_{5,m}\partial_x & -c_{8,m}\partial_x^2 - c_{9,m} & c_{10,m}\partial_x^4 + c_{11,m}\partial_x^2 + c_{12,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_m(x) \\ V_m(x) \\ W_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

где су:

$$\begin{aligned} c_{1,m} &= 1 & c_{7,m} &= -\frac{m^2}{a^2} + \frac{\rho h\omega^2}{D_1} \\ c_{2,m} &= -\frac{(1-\nu)}{2a^2} m^2 \left(1 + \frac{K}{D_1 a^2}\right) + \frac{\rho h\omega^2}{D_1} & c_{8,m} &= -\frac{K}{D_1 a} \frac{(3-\nu)m}{2a} \\ c_{3,m} &= -\frac{(1+\nu)}{2a} m & c_{9,m} &= \frac{m}{a^2} \\ c_{4,m} &= -\frac{K}{D_1 a} & c_{10,m} &= \frac{K}{D_1} \\ c_{5,m} &= \frac{\nu}{a} - \frac{K}{D_1 a^3} \frac{(1-\nu)}{2} m^2 & c_{11,m} &= -2 \frac{K}{D_1} \frac{m^2}{a^2} \\ c_{6,m} &= \frac{(1-\nu)}{2} \left(1 + \frac{3K}{D_1 a^2}\right) & c_{12,m} &= \frac{K}{D_1} \left(\frac{m^4}{a^4} - 2\frac{m^2}{a^4} + \frac{1}{a^4}\right) + \frac{1}{a^2} - \frac{\rho h\omega^2}{D_1} \end{aligned} \quad (5.27)$$



Поступак за одређивање израза за померања је исти као у случају *Donnell-Mushtari*-еве теорије. Разлика је једино у изразима за коефицијенте карактеристичне једначине и коефицијенте  $\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$  који су сада једнаки:

$$\begin{aligned}
 a_{1,m} &= \frac{c_{10,m}c_{3,m}^2 + c_{1,m}c_{11,m}c_{6,m} + c_{10,m}c_{2,m}c_{6,m} + c_{1,m}c_{10,m}c_{7,m} - c_{4,m}^2c_{7,m} + c_{1,m}c_{8,m}^2}{c_{1,m}c_{10,m}c_{6,m} - c_{4,m}^2c_{6,m}} \\
 &\quad + 2 \frac{c_{3,m}c_{4,m}c_{8,m} - c_{4,m}c_{5,m}c_{6,m}}{c_{1,m}c_{10,m}c_{6,m} - c_{4,m}^2c_{6,m}} \\
 a_{2,m} &= \frac{c_{1,m}c_{10,m}c_{5,m} + c_{11,m}(c_{3,m}^2 + c_{2,m}c_{6,m} + c_{1,m}c_{7,m}) - c_{5,m}^2c_{6,m} + c_{2,m}c_{7,m}c_{10,m}}{c_{1,m}c_{10,m}c_{6,m} - c_{4,m}^2c_{6,m}} \\
 &\quad + 2 \frac{c_{3,m}(c_{5,m}c_{8,m} + c_{4,m}c_{9,m}) + (c_{1,m}c_{8,m}c_{9,m} - c_{4,m}c_{5,m}c_{7,m}) + c_{2,m}c_{8,m}^2}{c_{1,m}c_{10,m}c_{6,m} - c_{4,m}^2c_{6,m}} \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{3,m} &= \frac{-c_{5,m}^2c_{7,m} + c_{12,m}(c_{3,m}^2 + c_{2,m}c_{6,m} + c_{1,m}c_{7,m}) + 2c_{3,m}c_{5,m}c_{9,m}}{c_{1,m}c_{10,m}c_{6,m} - c_{4,m}^2c_{6,m}} \\
 &\quad + \frac{c_{1,m}c_{9,m}^2 + 2c_{2,m}c_{8,m}c_{9,m} + c_{2,m}c_{11,m}c_{7,m}}{c_{1,m}c_{10,m}c_{6,m} - c_{4,m}^2c_{6,m}} \\
 a_{4,m} &= \frac{c_{2,m}(c_{12,m}c_{7,m} + c_{9,m}^2)}{c_{6,m}(c_{1,m}c_{10,m} - c_{4,m}^2)} \\
 \delta_{i,m} &= \frac{(c_{9,m} + c_{8,m}r_{i,m}^2)^2 + (c_{7,m} + c_{6,m}r_{i,m}^2)(c_{12,m} + c_{11,m}r_{i,m}^2 + c_{10,m}r_{i,m}^4)}{r_{i,m}(c_{5,m} + c_{4,m}r_{i,m}^2)(c_{7,m} + c_{6,m}r_{i,m}^2) - c_{3,m}r_{i,m}(c_{9,m} + c_{8,m}r_{i,m}^2)} \\
 \gamma_{i,m} &= \frac{c_{12,m}c_{3,m} + c_{5,m}c_{9,m} + (c_{11,m}c_{3,m} + c_{5,m}c_{8,m} + c_{4,m}c_{9,m})r_{i,m}^2}{c_{5,m}c_{7,m} - c_{3,m}c_{9,m} + (c_{5,m}c_{6,m} + c_{4,m}c_{7,m} - c_{3,m}c_{8,m})r_{i,m}^2 + c_{4,m}c_{6,m}r_{i,m}^4} \tag{5.29} \\
 &\quad + \frac{(c_{10,m}c_{3,m} + c_{4,m}c_{8,m})r_{i,m}^4}{c_{5,m}c_{7,m} - c_{3,m}c_{9,m} + (c_{5,m}c_{6,m} + c_{4,m}c_{7,m} - c_{3,m}c_{8,m})r_{i,m}^2 + c_{4,m}c_{6,m}r_{i,m}^4}
 \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, 8.$

Заменом израза (5.14) у једначину (4.47) и (4.49) добијају се изрази за пресечне силе који важе у *Flügge*-овој теорији.

### 5.1.2.2 Ротационо-симетричне вибрације $m = 0$

- ❖ Решење проблема ротационо-симетричних вибрације за случај спрегнутог померања  $u$  и  $w$

Запис система диференцијалних једначина којима је дефинисан проблем слободних вибрација у матричном облику је:

$$\begin{bmatrix} d_x^2 + \frac{\rho h \omega^2}{D_1} & \frac{\nu}{a} d_x - \frac{K}{D_1 a} d_x^3 \\ \frac{\nu}{a} d_x - \frac{K}{D_1 a} d_x^3 & \frac{K}{D_1} d_x^4 + \frac{1}{a^2} - \frac{\rho h \omega^2}{D_1} + \frac{K}{D_1 a^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0(x) \\ W_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 d_x^2 + c_2 & c_3 d_x^3 + c_4 d_x \\ c_3 d_x^3 + c_4 d_x & c_5 d_x^4 + c_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0(x) \\ W_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

где су:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 & c_4 &= \nu/a \\ c_2 &= \rho h \omega^2 / D_1 & c_5 &= K/D_1 \\ c_3 &= -K/D_1 a & c_6 &= K/D_1 a^4 + 1/a^2 - \rho h \omega^2 / D_1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Као и за случај  $m \geq 1$ , и овде је поступак за одређивање решење за непозната померање исти као у случају *Donnell-Mushtari*-еве теорије. Једина разлика је у изразима за коефицијенте карактеристичне једначине и коефицијенте  $\delta_i$ , који су сада једнаки:

$$\begin{aligned} a_1 &= (2c_3 c_4 - c_2 c_5) / (c_3^2 - c_1 c_5) \\ a_2 &= (c_4^2 + c_1 c_6) / (c_3^2 - c_1 c_5) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= c_2 c_6 / (c_1 c_5 - c_3^2) \\ \delta_i &= -\frac{c_3 r_i^3 + c_4 r_i}{c_1 r_i^2 + c_2}, \quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Заменом израза (5.22) у једначине (4.47) и (4.49) добијају се изрази за пресечне силе који важе у *Flügge*-овој теорији.

❖ Решење проблема торзионих ротационо-симетричних вибрација Диференцијална једначина којом је дефинисан проблем је:

$$\frac{(1-\nu)}{2} \left( 1 + \frac{3K}{D_1 a^2} \right) \frac{d^2 V_0(x)}{dx^2} + \frac{\rho h \omega^2}{D_1} V_0(x) = 0 \quad (5.35)$$

Решење за померање  $\nu$  је дато једначином (5.24), при чему су корени карактеристичне једначине дефинисани следећим изразом:

$$r_1 = -r_2 = \sqrt{2\rho h \omega^2 a^2 / [(1-\nu)(D_1 a^2 + 3K)]} \quad (5.36)$$

Заменом израза (5.24) у једначину (4.47) и (4.49) добијају се изрази за пресечне силе који важе у случају *Flügge*-ове теорије.

### 5.1.3 Динамичка матрица крутости кружне цилиндричне љуске $\mathbf{K}_{Dm}$

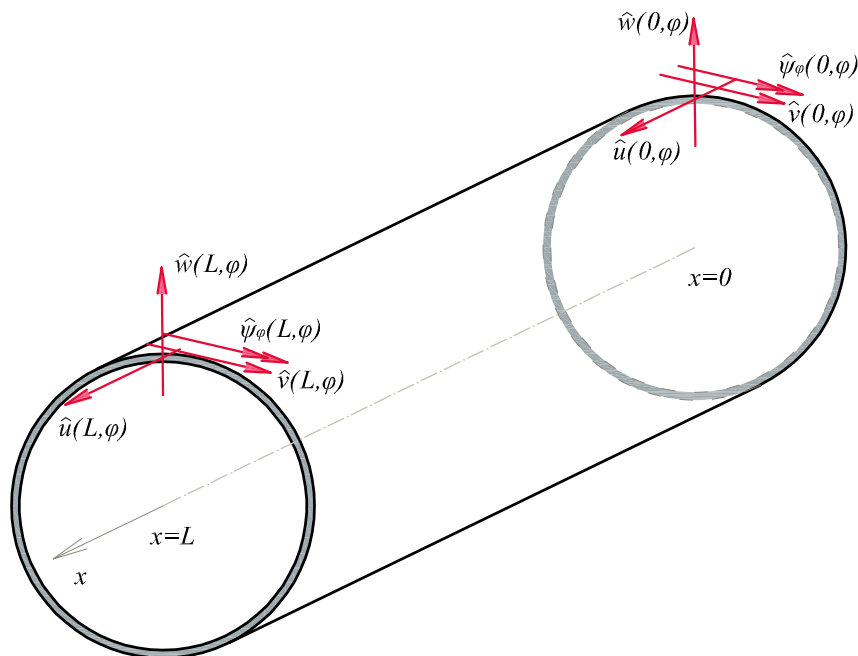
У оквиру овог поглавља биће дефинисани вектор померања и вектор сила, чије су компоненте померања, односно ротације, и пресечне силе на контурама  $x=0$  и  $x=L$ . Веза између вектора померања и вектора сила биће успостављена преко динамичке матрице крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$ , за  $m \geq 1$ , односно преко матрица  $\mathbf{K}_{D0}^S$  и  $\mathbf{K}_{D0}^A$  за случај ротационо-симетричних вибрација.

#### 5.1.3.1 Асиметричне вибрације $m \geq 1$

##### ❖ Вектор померања $\hat{\mathbf{q}}$

Вектор померања  $\hat{\mathbf{q}}$  садржи померања и ротације контура љуске  $x=0$  и  $x=L$ :

$$\hat{\mathbf{q}}^T = \begin{bmatrix} \hat{u}(0, \varphi) & \hat{v}(0, \varphi) & \hat{w}(0, \varphi) & \hat{\psi}_\varphi(0, \varphi) & \dots \\ \dots & \hat{u}(L, \varphi) & \hat{v}(L, \varphi) & \hat{w}(L, \varphi) & \hat{\psi}_\varphi(L, \varphi) \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (5.37)$$



Слика 5.1 - Компоненте вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}$

Компоненте вектора  $\hat{\mathbf{q}}$ , које су у правцу  $x$ -осе, тангенте и нормале у свакој тачки контуре, приказане су на Сlici 5.1 и за  $m$ -ти хармоник су једнаке:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(0, \varphi) &= U_m(0) \cos(m\varphi) & \hat{u}(L, \varphi) &= U_m(L) \cos(m\varphi) \\
 \hat{v}(0, \varphi) &= V_m(0) \sin(m\varphi) & \hat{v}(L, \varphi) &= V_m(L) \sin(m\varphi) \\
 \hat{w}(0, \varphi) &= W_m(0) \cos(m\varphi) & \hat{w}(L, \varphi) &= W_m(L) \cos(m\varphi) \\
 \hat{\psi}_\varphi(0, \varphi) &= \Psi_{\varphi m}(0) \cos(m\varphi) & \hat{\psi}_\varphi(L, \varphi) &= \Psi_{\varphi m}(L) \cos(m\varphi)
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Уводи се нови вектор померања  $\hat{\mathbf{q}}_m$ , који садржи амплитуде померања и ротација за  $x = 0$  и  $x = L$ :

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{q}}_m)^T &= [U_m(0) \quad V_m(0) \quad W_m(0) \quad \Psi_{\varphi m}(0) \quad \dots \\
 &\quad \dots \quad U_m(L) \quad V_m(L) \quad W_m(L) \quad \Psi_{\varphi m}(L)]_{8 \times 1}
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Веза између вектора  $\hat{\mathbf{q}}_m$ , чије су компоненте дефинисане једначином (5.14), и вектора интеграционих константи  $\mathbf{C}_m$  је успостављена преко матрице  $\mathbf{D}_m$  реда 8, на основу следећег израза:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} U_m(0) \\ V_m(0) \\ W_m(0) \\ \Psi_{\varphi m}(0) \\ U_m(L) \\ V_m(L) \\ W_m(L) \\ \Psi_{\varphi m}(L) \end{bmatrix}_{8 \times 1} &= \begin{bmatrix} \delta_{1,m} & \dots & \delta_{8,m} \\ \gamma_{1,m} & \dots & \gamma_{8,m} \\ 1 & \dots & 1 \\ -r_{1,m} & \dots & -r_{8,m} \\ \delta_{1,m} \cdot e^{r_{1,m}L} & \dots & \delta_{8,m} \cdot e^{r_{8,m}L} \\ \gamma_{1,m} \cdot e^{r_{1,m}L} & \dots & \gamma_{8,m} \cdot e^{r_{8,m}L} \\ e^{r_{1,m}L} & \dots & e^{r_{8,m}L} \\ -r_{1,m} \cdot e^{r_{1,m}L} & \dots & -r_{8,m} \cdot e^{r_{8,m}L} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} C_{1,m} \\ C_{2,m} \\ C_{3,m} \\ C_{4,m} \\ C_{5,m} \\ C_{6,m} \\ C_{7,m} \\ C_{8,m} \end{bmatrix}_{8 \times 1}
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

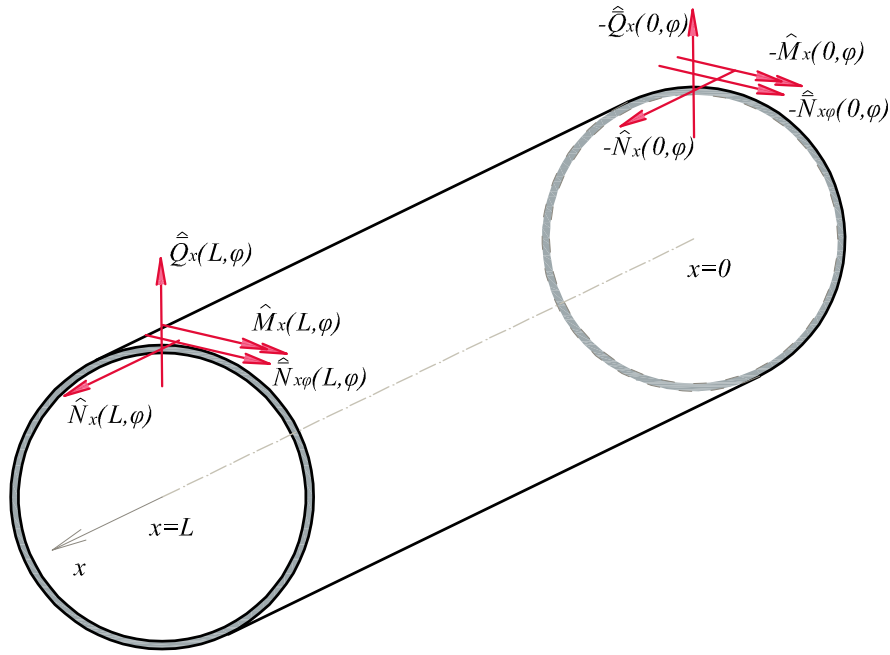
Једначина (5.40) записана у скраћеном облику је:

$$\hat{\mathbf{q}}_m = \mathbf{D}_m \mathbf{C}_m \tag{5.41}$$

#### ❖ Вектор сила $\hat{\mathbf{Q}}$

Вектора сила  $\hat{\mathbf{Q}}$ , чије су компоненте силе и моменти на контурама љуске  $x = 0$  и  $x = L$  (Слика 5.2), је дефинисан на следећи начин:

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{Q}})^T &= \left[ -\hat{N}_x(0, \varphi) \quad -\hat{N}_{x\varphi}(0, \varphi) \quad -\hat{Q}_x(0, \varphi) \quad -\hat{M}_x(0, \varphi) \quad \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots \quad \hat{N}_x(L, \varphi) \quad \hat{N}_{x\varphi}(L, \varphi) \quad \hat{Q}_x(L, \varphi) \quad \hat{M}_x(L, \varphi) \right]_{8 \times 1}
 \end{aligned} \tag{5.42}$$



Слика 5.2 - Компоненте вектора сила  $\hat{\mathbf{Q}}$

Компоненте вектора  $\hat{\mathbf{Q}}$ , за  $m$ -ти хармоник, су:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_x(x, \varphi) &= \hat{N}_{xm}(x) \cos(m\varphi) = \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} N_{xi,m} e^{r_{i,m}x} \right) \cos(m\varphi) \\
 \hat{N}_{x\varphi}(x, \varphi) &= \hat{N}_{x\varphi} + \frac{\hat{M}_{x\varphi}}{a} = \hat{N}_{x\varphi m}(x) \sin(m\varphi) = \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} \bar{N}_{x\varphi i,m} e^{r_{i,m}x} \right) \sin(m\varphi) \\
 \hat{Q}_x(x, \varphi) &= \hat{Q}_x + \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{M}_{x\varphi}}{\partial \varphi} = \hat{Q}_{xm}(x) \cos(m\varphi) = \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} \bar{Q}_{xi,m} e^{r_{i,m}x} \right) \cos(m\varphi) \\
 \hat{M}_x(x, \varphi) &= \hat{M}_{xm}(x) \cos(m\varphi) = \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} M_{xi,m} e^{r_{i,m}x} \right) \cos(m\varphi)
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

где су изрази за “амплитуде” пресечних сила по *Donnell-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији дате једначинама (5.44), односно једначинама (5.45):

$$\begin{aligned}
 N_{xi,m} &= D_1 \left[ r_{i,m} \delta_{i,m} + \frac{\nu}{a} (1 + m\gamma_{i,m}) \right] \\
 \bar{N}_{x\varphi i,m} &= \frac{[aD_1 (ar_{i,m}\gamma_{i,m} - m\delta_{i,m}) + 2Kr_{i,m}m]}{2a^2} (1-\nu) \\
 \bar{Q}_{xi,m} &= Kr_{i,m} \left[ (2-\nu) \frac{m^2}{a^2} - r_{i,m}^2 \right] \\
 M_{xi,m} &= -K \left( r_{i,m}^2 - \nu \frac{m^2}{a^2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
 N_{xi,m} &= \frac{D_1 \nu (1 + m \gamma_{i,m}) + a D_1 r_{i,m} \delta_{i,m} - K r_{i,m}^2}{a} \\
 \bar{N}_{x\varphi i,m} &= \frac{(1-\nu) \left[ -a D_1 \delta_{i,m} m + a^2 D_1 \gamma_{i,m} r_{i,m} + 3 K r_{i,m} (\gamma_{i,m} + m) \right]}{2a^2} \\
 \bar{Q}_{xi,m} &= \frac{K \left[ (1-\nu) \delta_{i,m} m^2 + 2a^2 r_{i,m}^2 (\delta_{i,m} - a r_{i,m}) \right]}{2a^3} \\
 &\quad + \frac{K m r_{i,m} \left[ (3-\nu) \gamma_{i,m} + 2m(2-\nu) \right]}{2a^2} \\
 M_{xi,m} &= \frac{K \left[ m \nu (\gamma_{i,m} + m) + a r_{i,m} \delta_{i,m} - a^2 r_{i,m}^2 \right]}{a^2}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Уводи се нови вектор померања  $\hat{\mathbf{Q}}_m$ , који садржи “амплитуде” компоненти вектора  $\hat{\mathbf{Q}}$ , и дефинисан је на следећи начин:

$$\begin{aligned}
 \left( \hat{\mathbf{Q}}_m \right)^T &= \left[ -\hat{N}_{xm}(0) \quad -\hat{N}_{x\varphi m}(0) \quad -\hat{Q}_{xm}(0) \quad -\hat{M}_{xm}(0) \quad \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots \quad \hat{N}_{xm}(L) \quad \hat{N}_{x\varphi m}(L) \quad \hat{Q}_{xm}(L) \quad \hat{M}_{xm}(L) \right]_{8 \times 1}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Веза између вектора  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  и вектора интеграционих константи  $\mathbf{C}_m$ , на основу израза (5.43), је успостављена преко матрице  $\mathbf{F}_m$  реда 8 и дата је следећом релацијом:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} -\hat{N}_{xm}(0) \\ -\hat{N}_{x\varphi m}(0) \\ -\hat{Q}_{xm}(0) \\ -\hat{M}_{xm}(0) \\ \hat{N}_{xm}(L) \\ \hat{N}_{x\varphi m}(L) \\ \hat{Q}_{xm}(L) \\ \hat{M}_{xm}(L) \end{bmatrix}_{8 \times 1} &= \begin{bmatrix} -N_{x1,m} & \dots & -N_{x8,m} \\ -\bar{N}_{x\varphi 1,m} & \dots & -\bar{N}_{x\varphi 8,m} \\ -\bar{Q}_{x1,m} & \dots & -\bar{Q}_{x8,m} \\ -M_{x1,m} & \dots & -M_{x8,m} \\ N_{x1,m} \cdot e^{r_{1,m}L} & \dots & N_{x8,m} \cdot e^{r_{8,m}L} \\ \bar{N}_{x\varphi 1,m} \cdot e^{r_{1,m}L} & \dots & \bar{N}_{x\varphi 8,m} \cdot e^{r_{8,m}L} \\ \bar{Q}_{x1,m} \cdot e^{r_{1,m}L} & \dots & \bar{Q}_{x8,m} \cdot e^{r_{8,m}L} \\ M_{x1,m} \cdot e^{r_{1,m}L} & \dots & M_{x8,m} \cdot e^{r_{8,m}L} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} C_{1,m} \\ C_{2,m} \\ C_{3,m} \\ C_{4,m} \\ C_{5,m} \\ C_{6,m} \\ C_{7,m} \\ C_{8,m} \end{bmatrix}_{8 \times 1}
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Запис једначине (5.47) у скраћеном облику је:

$$\hat{\mathbf{Q}}_m = \mathbf{F}_m \mathbf{C}_m \tag{5.48}$$

Коришћењем једначина (5.41) и (5.48) може да се успостави веза између вектора  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  и вектора  $\hat{\mathbf{q}}_m$ :

$$\hat{\mathbf{Q}}_m = \mathbf{K}_{Dm} \hat{\mathbf{q}}_m \quad (5.49)$$

где је  $\mathbf{K}_{Dm}$  динамичка матрица крутости кружне цилиндричне љуске за  $m$ -ти хармоник. Ред матрице  $\mathbf{K}_{Dm}$  је 8.

### 5.1.3.2 Ротационо-симетричне вибрације $m = 0$

❖ Случај спрегнутог аксијалног  $u$  и радијалног  $w$  померања

За случај спрегнутог аксијалног  $u$  и радијалног  $w$  померања вектор померања је означен са  $\hat{\mathbf{q}}_0^S$  и дефинисан је на следећи начин:

$$\left(\hat{\mathbf{q}}_0^S\right)^T = \left[\hat{u}(0) \quad \hat{w}(0) \quad \hat{\psi}_\varphi(0) \quad \hat{u}(L) \quad \hat{w}(L) \quad \hat{\psi}_\varphi(L)\right]_{6 \times 1} \quad (5.50)$$

Веза између вектора  $\hat{\mathbf{q}}_0^S$ , чије су компоненте дефинисане једначинама (5.22), и вектора интеграционих константи  $\mathbf{C}$ , се успоставља преко матрице  $\mathbf{D}_0^S$  реда 6:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}(0) \\ \hat{w}(0) \\ \hat{\psi}_\varphi(0) \\ \hat{u}(L) \\ \hat{w}(L) \\ \hat{\psi}_\varphi(L) \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_6 \\ 1 & \dots & 1 \\ -r_1 & \dots & -r_6 \\ \delta_1 \cdot e^{r_1 L} & \dots & \delta_6 \cdot e^{r_6 L} \\ e^{r_1 L} & \dots & e^{r_6 L} \\ -r_1 \cdot e^{r_1 L} & \dots & -r_6 \cdot e^{r_6 L} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (5.51)$$

Компоненте вектора сила  $\hat{\mathbf{Q}}_0^S$  су:

$$\left(\hat{\mathbf{Q}}_0^S\right)^T = \left[-\hat{N}_x(0) \quad -\hat{Q}_x(0) \quad -\hat{M}_x(0) \quad \hat{N}_x(L) \quad \hat{Q}_x(L) \quad \hat{M}_x(L)\right]_{6 \times 1} \quad (5.52)$$

и могу да се одреде на основу следећих израза:

$$\hat{N}_x(x) = \sum_{i=1}^6 C_i N_{xi} e^{r_i x} \quad \hat{Q}_x(x) = \sum_{i=1}^6 C_i Q_{xi} e^{r_i x} \quad \hat{M}_x(x) = \sum_{i=1}^6 C_i M_{xi} e^{r_i x} \quad (5.53)$$

“Амплитуде” пресечних сила по *Donnell-Mushtari*-евој теорији дате једначином (5.54), односно по *Flügge*-евој теорији једначином (5.55):

$$N_{xi} = D_1 \left( r_i \delta_i + \frac{v}{a} \right) \quad Q_{xi} = -Kr_i^3 \quad M_{xi} = -Kr_i^2 \quad (5.54)$$

$$N_{xi} = \frac{vD_1 + aD_1 r_i \delta_i - Kr_i^2}{a} \quad Q_{xi} = \frac{Kr_i^2 (\delta_i - ar_i)}{a} \quad M_{xi} = \frac{Kr_i (\delta_i - ar_i)}{a} \quad (5.55)$$

Веза између вектора  $\hat{\mathbf{Q}}_0^S$  и вектора интеграционих константи  $\mathbf{C}$  се успоставља преко матрице  $\mathbf{F}_0^S$  реда 6:

$$\begin{bmatrix} -\hat{N}_x(0) \\ -\hat{Q}_{x\varphi}(0) \\ -\hat{M}_x(0) \\ \hat{N}_x(L) \\ \hat{Q}_{x\varphi}(L) \\ \hat{M}_x(L) \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} -N_{x1} & \dots & -N_{x6} \\ -Q_{x1} & \dots & -\bar{Q}_{x6} \\ -M_{x1} & \dots & -M_{x6} \\ N_{x1} \cdot e^{r_1 L} & \dots & N_{x6} \cdot e^{r_6 L} \\ Q_{x1} \cdot e^{r_1 L} & \dots & Q_{x6} \cdot e^{r_6 L} \\ M_{x1} \cdot e^{r_1 L} & \dots & M_{x6} \cdot e^{r_6 L} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (5.56)$$

Динамичка матрица крутости  $\mathbf{K}_{D0}^S$  за ротационо симетричне вибрације за случај спрегнутог аксијалног  $u$  и радијалног померања  $w$  је дефинисана следећим изразом:

$$\mathbf{K}_{D0}^S = \mathbf{F}_0^S (\mathbf{D}_0^S)^{-1} \quad (5.57)$$

Ред матрице  $\mathbf{K}_{D0}^S$  је 6.

❖ Ротационо-симетричне торзионе вибрације

Вектор померања за случај торзионих ротационо-симетричних вибрација је означен са  $\hat{\mathbf{q}}_0^A$  и садржи тангенцијално померање  $v$  контура љуске  $x = 0$  и  $x = L$ :

$$(\hat{\mathbf{q}}_0^A)^T = [\hat{v}(0) \quad \hat{v}(L)]_{2 \times 1} \quad (5.58)$$

Веза између вектора  $\hat{\mathbf{q}}_0^A$ , чије су компоненте дефинисане једначином (5.24), и вектора интеграционих константи  $\mathbf{B}$  се успоставља преко матрице  $\mathbf{D}_0^A$  на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} \hat{v}(0) \\ \hat{v}(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{r_1 L} & e^{r_2 L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Компоненте вектора сила  $\hat{\mathbf{Q}}_0^A$  су замењујуће смичуће силе на контурама љуске  $x = 0$  и  $x = L$ :

$$(\hat{\mathbf{Q}}_0^A)^T = \begin{bmatrix} -\hat{N}_{x\varphi}(0) & \hat{N}_{x\varphi}(L) \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad (5.60)$$

и могу да се одреде на основу следећих израза:



$$\hat{N}_{x\varphi}(x) = \hat{N}_{x\varphi} + \frac{\hat{M}_{x\varphi}}{a} = \sum_{i=1}^2 B_i \bar{N}_{x\varphi i} e^{r_i x} \quad (5.61)$$

“Амплитуда” замењујуће смичуће силе по *Donnell-Mushtari*-евој теорији дата једначином (5.62), односно по *Flügge*-овој теорији једначином (5.63):

$$\bar{N}_{x\varphi i} = \frac{D_1 r_i (1-\nu)}{2} \quad (5.62)$$

$$\bar{N}_{x\varphi i} = \frac{r_i (1-\nu)(a^2 D_1 + 3K)}{2a^2} \quad (5.63)$$

Веза између вектора  $\hat{Q}_0^A$  и вектора интеграционих константи  $\mathbf{B}$  се успоставља преко матрице  $\mathbf{F}_0^A$ :

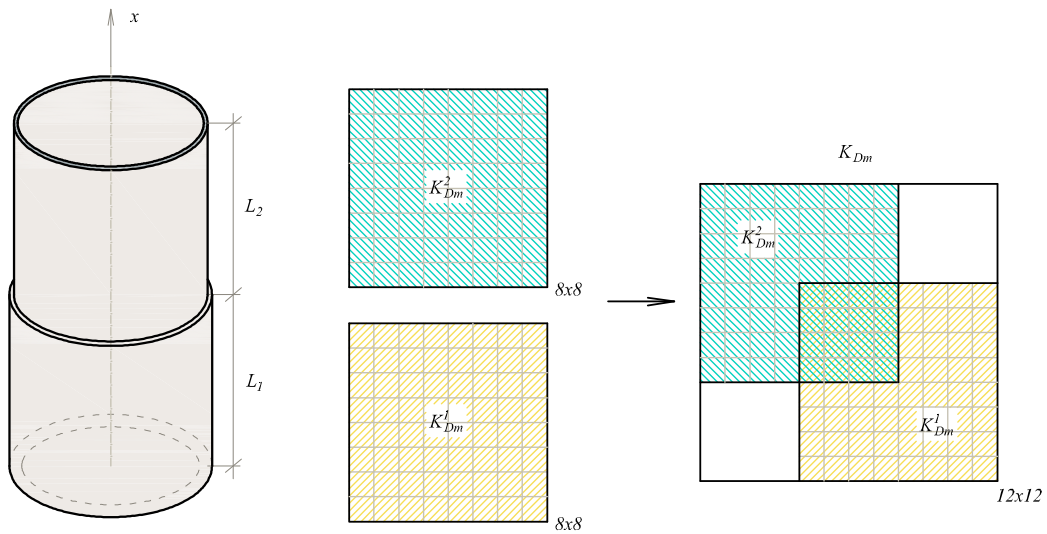
$$\begin{bmatrix} -\hat{N}_{x\varphi m}(0) \\ \hat{N}_{x\varphi m}(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{N}_{x\varphi 1} & -\bar{N}_{x\varphi 2} \\ \bar{N}_{x\varphi 1} \cdot e^{r_1 L} & \bar{N}_{x\varphi 2} \cdot e^{r_2 L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Динамичка матрица крутости  $\mathbf{K}_{D0}^A$  за торзионе ротационо-симетричне вибрације је реда 2 и може да се одреди на основу следећег израза:

$$\mathbf{K}_{D0}^A = \mathbf{F}_0^A (\mathbf{D}_0^A)^{-1} \quad (5.65)$$

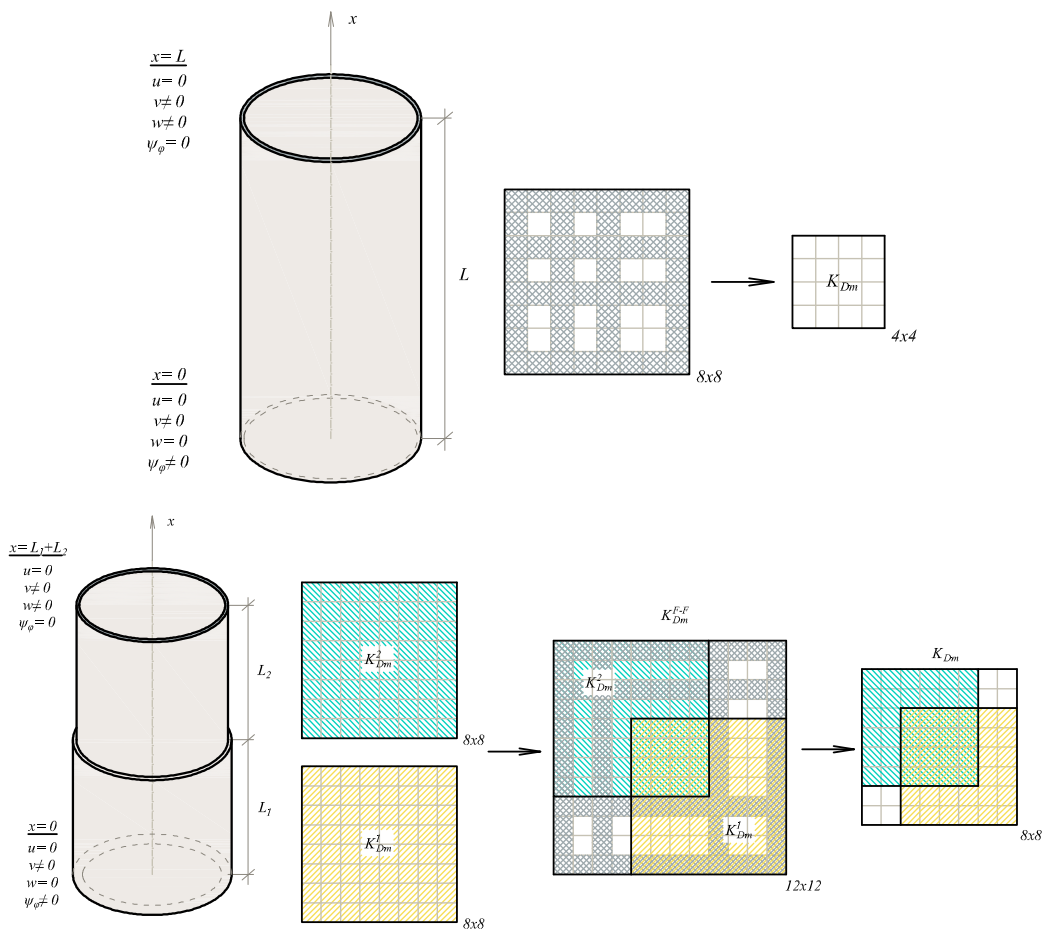
#### 5.1.4 Формирање глобалне динамичке матрице крутости, гранични услови, сопствене фреквенције и облици осциловања

Динамичка матрица крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$ , за свако  $m \geq 1$ , континуалног елемента облика кружне цилиндричне љуске је реда 8. За случај ротационо-симетричних вибрација (спрегнута померања  $u$  и  $w$ ) динамичка матрица крутости елемента  $\mathbf{K}_0^S$  је реда 6, односно за случај торзионих ротационо-симетричних вибрација динамичка матрица крутости  $\mathbf{K}_0^A$  је реда 2. Глобална динамичка матрица крутости система се формира на сличан начин као у *МКЕ*, само што се елементи међусобно спајају дуж контура, а не у чворовима. На Слици 5.3 је приказано, за случај  $m \geq 1$ , формирање глобалне динамичке матрице система који се састоји од два континуална елемента кружне цилиндричне љуске.



Слика 5.3 - Формирање глобалне динамичке матрице крутости матрице  $\mathbf{K}_{Dm}$

Када је одређена динамичка матрица крутости система, гранични услови се аплицирају кроз брисање врста и колона које одговарају спреченим померањима (Слика 5.4).



Слика 5.4 - Аплицирање граничних услова

У нумеричким примерима ће бити приказана решења само за најчешће коришћене граничне услове, који су дефинисани на следећи начин:

- слободна контура  $F$ : сва три компонентална померања и ротација су различити од нуле,
- *shear diaphragm*  $SD$ :  $v = w = 0$ ,
- укљештена контура  $C$ :  $u = v = w = \psi_\phi = 0$ .

За случај кружне цилиндричне љуске са  $CC$  граничним условима дошло би до брисања свих врста и колона у матрици  $\mathbf{K}_{Dm}$ , па зато за ову комбинацију граничних услова морају да се користе минимум два континуална елемента.

Иако теоријски један континуални елемент може да се користи за моделирање кружне цилиндричне љуске константних геометријских и материјалних карактеристика, код веома дугих љуски долази до нумеричке нестабилности па је потребно моделирање помоћу два или више континуалних елемената.

Сопствене фреквенције одговарају фреквенцијама за које је  $\det(\mathbf{K}_{Dm}) = 0$ . Уместо нула детерминанте матрице крутости, траже се пикови израза  $1/\log\det(\mathbf{K}_{Dm})$ . За ту сврху је написан код у програму *Matlab*.

Када су одређене сопствене фреквенције, облици осциловања могу да се одреде на основу добро познатог поступка који је објашњен у Поглављу 3.1.6. Облици осциловања љуски немају праве чворне линије (линије на површи дуж којих су сва три померања  $u$ ,  $v$  и  $w$  једнака нули), него имају линије дуж којих су два померања једнака нули, а треће је максимално. У случају ротационо симетричних вибрација аксијално  $u$ , торзионо  $v$  и радијално  $w$  померање се раздвајају дајући независне чворне линије.

### 5.1.5 Нумерички примери

Верификација изведених тачних динамичких матрица крутости по *Donnell-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији извршена је упоређивањем сопствених фреквенција добијених применом *Matlab* програма у који су ове матрице имплементирани са решењима доступним у литератури. У свим примерима усвојена вредност *Poisson*-овог коефицијента је  $\nu = 0.3$ .

**Пример 5.1**

У Табели 5.1 су упоређена решења за бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за љуску са *SD-SD* граничним условима добијена применом ДМК по *Donnell-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији са тачним решењима датим у књизи (Leissa, 1973). За *SD-SD* граничне услове облик решења за функције померања  $u$ ,  $v$  и  $w$ , које *a priori* задовољава граничне услове, је познат и зависи од  $m$  ( $2m$  је број полуталаса у тангенцијалном правцу) и  $n$  (броја полуталаса у правцу  $x$ -оце). У Табели 5.1 су приказана решења за односе  $a/h = 20$  и  $500$  и  $m = 0, 1, 2, 3$  и  $4$ . Однос  $L/a$  и  $n$  су приказани кроз коефицијент  $L/(n \cdot a)$  зато што љуска са *SD-SD* граничним условима, која је два пута дужа и има два пута већи број  $n$ , осцилује истим фреквенцијама као претходна, јер се чворне линије дуплирају. У Табели 5.1 није одређена најнижа фреквенција за усвојен број полуталаса у тангенцијалном правцу, као ни апсолутно најнижа фреквенција за било које  $m$  и  $n$ .

**Пример 5.2**

У оквиру овог примера су одређене бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega}$  за кружну цилиндричну љуску са *SD-F* и *SD-C* граничним условима ( $L/a = 10$ ,  $h/a = 0.01$ ). У Табели 5.2 су приказани резултати добијени применом ДМК по *Donnell-Mushtari*-евој теорији, решења од *Xing*-а (Xing, 2013), као и релативна разлика у процентима између ова два тачна решења (разлика не прелази 1%). У свом раду *Xing* је за сваку комбинацију граничних услова (*SD-F* и *SD-C*) написао фреквентну једначину чијим је решавањем, уз помоћ *Newton*-ове методе, одредио сопствене фреквенције. *Xing* је, што је и приказано у Табели 5.2, за усвојено  $m$  одредио прве четири сопствене фреквенције (ротационо симетричне вибрације није разматрао), али није одредио најнижу (основну) сопствену фреквенцију. Зато су у Табели 5.2 додата решења за првих дванаест сопствених фреквенција која су добијена применом ДМК и за њих је приказано одговарајуће  $m$  и  $n$ . Првих дванаест облика осциловања за *SD-F* граничне услове је приказано на Слици 5.5.

Табела 5.1 - Бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за кружну цилиндричну љуску са *SD-SD* граничним условима:  $\nu = 0.3$ .

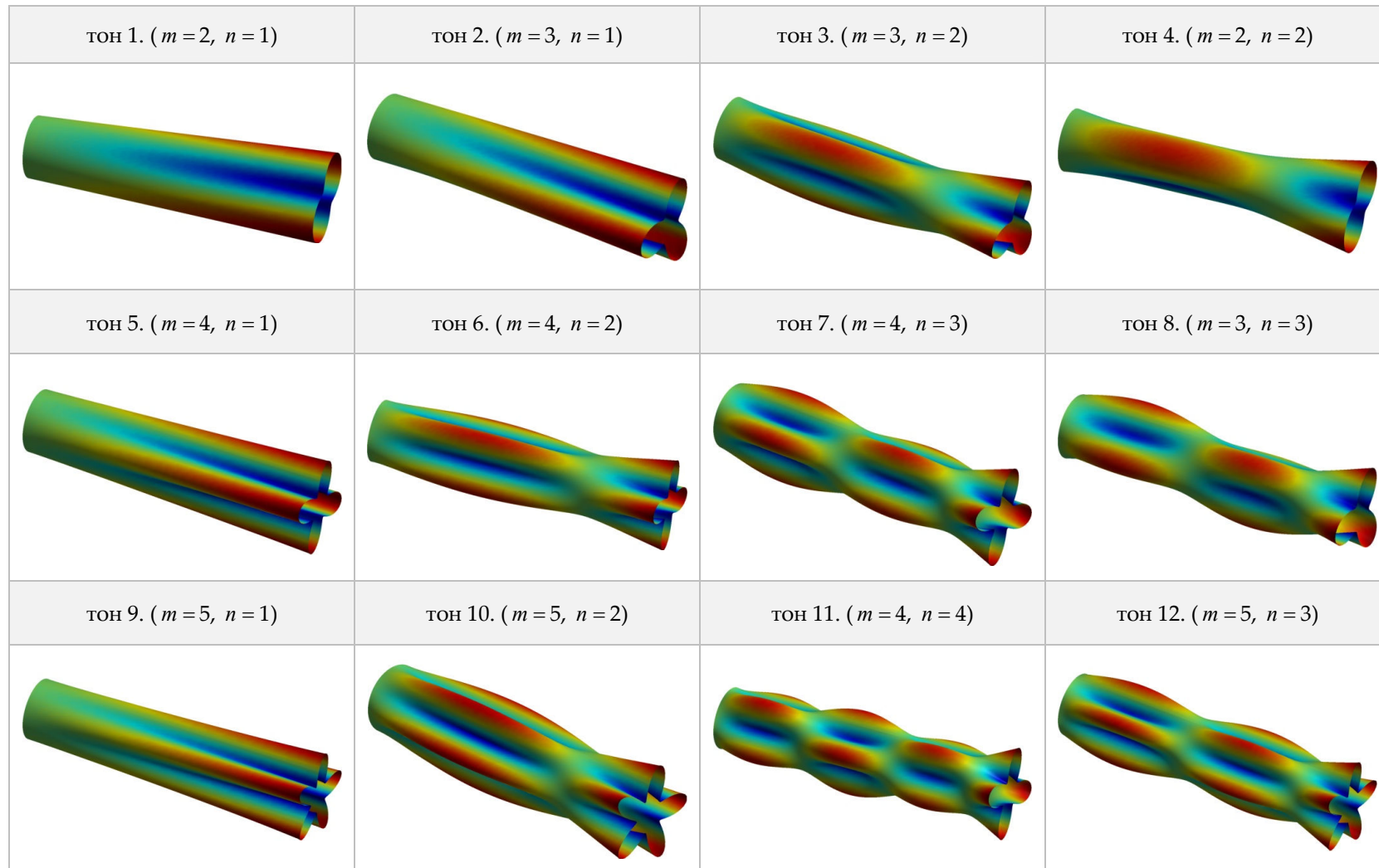
теорија	$\frac{a}{h}$	$m$	$L/(n \cdot a)$									
			0.1		0.25		1		4		20	
			(Leissa, 1973)	ΔМК	(Leissa, 1973)	ΔМК	(Leissa, 1973)	ΔМК	(Leissa, 1973)	ΔМК	(Leissa, 1973)	ΔМК
<i>Flügge</i>	20	0	14.2634387	14.2765000	2.4655690	2.4701700	0.9587537	0.9596980	0.4646015	0.4646010	0.0929296	0.0928740
		1	14.2780347	14.2834240	2.4759277	2.4766407	0.8570135	0.8574675	0.2568825	0.2570208	0.0160982	0.0160566
		2	14.3197119	14.3261650	2.5081312	2.5089849	0.6761615	0.6768021	0.1213460	0.1214062	0.0392803	0.0392751
		3	14.3906914	14.3977840	2.5635285	2.5644320	0.5409658	0.5414186	0.1304005	0.1305319	0.1097835	0.1098547
		4	14.4900233	14.4971270	2.6439210	2.6441374	0.4958386	0.4962523	0.2205002	0.2206336	0.2101993	0.2103527
	500	0	1.1110300	1.1110200	0.9579940	0.9580810	0.9492030	0.9491860	0.4646480	0.4646010	0.0929296	0.0928740
		1	1.1104900	1.1105608	0.9519930	0.9519588	0.8449520	0.8449919	0.2568830	0.2569053	0.0161011	0.0160566
		2	1.1089000	1.1089436	0.9344620	0.9344005	0.6521480	0.6520819	0.1126890	0.1126271	0.0054535	0.0054292
		3	1.1063000	1.1062867	0.9067340	0.9066769	0.4810280	0.4810043	0.0580087	0.0579885	0.0050418	0.0050827
		4	1.1027600	1.1027058	0.8707650	0.8707517	0.3541180	0.3540533	0.0353927	0.0353476	0.0085341	0.0085481
<i>Donnell-Mushtari</i>	20	0	14.2770349	14.2764935	2.4701391	2.4701700	0.9597117	0.9596980	0.4646480	0.4646010	0.0929296	0.0928740
		1	14.29065951	14.2915000	2.4809741	2.4812600	0.8585550	0.8585530	0.2573965	0.2573790	0.0191488	0.0191524
		2	14.33343507	14.3343000	2.5137002	2.5136100	0.6796740	0.6796900	0.1271296	0.1271240	0.0521684	0.0521666
		3	14.4054370	14.4047000	2.5699166	2.5702100	0.5477609	0.5477370	0.1433237	0.1433310	0.1235667	0.1235660
		4	14.5048491	14.5052000	2.6514611	2.6510700	0.5068179	0.5067990	0.2348292	0.2348190	0.2243492	0.2243530
	500	0	1.1110300	1.1111400	0.9579940	0.9580810	0.9492030	0.9491860	0.4646480	0.4646010	0.0929296	0.0928740
		1	1.1104900	1.1112500	0.9519930	0.9518430	0.8449520	0.8449920	0.2570110	0.2569050	0.0161059	0.0161028
		2	1.1089000	1.1089400	0.9344620	0.9345160	0.6521480	0.6521970	0.1127003	0.1127430	0.0054535	0.0056233
		3	1.1063000	1.1066300	0.9067340	0.9067920	0.4810280	0.4810040	0.0580609	0.0579885	0.0055264	0.0055216
		4	1.1027600	1.1031700	0.8707650	0.8709830	0.3541534	0.3541690	0.0353396	0.0355786	0.0090871	0.0090910

Табела 5.2 – Прве четири бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  кружне цилиндричне љуске за усвојено  $m$  и првих дванаест бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega}$  за које је приказано одговарајуће  $m$  и  $n$ :  $L/a = 10$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $\nu = 0.3$ .

ГУ	$m$	тон	(Xing, 2013)	ДМК- Donnell- Mushtari	$\Delta$ %	тон	ДМК- Donnell- Mushtari	$(m, n)$
SD-F	1	1	30.616	30.616	0.00	1	3.5843	(2,1)
		2	77.648	77.649	0.00	2	8.5471	(3,1)
		3	126.220	126.217	0.00	3	10.1954	(3,2)
		4	169.580	169.582	0.00	4	11.6040	(2,2)
	3	1	8.545	8.547	-0.03	5	15.5239	(4,1)
		2	10.197	10.195	0.02	6	16.0034	(4,2)
		3	18.856	18.856	0.00	7	18.7905	(4,3)
		4	34.013	34.015	0.00	8	18.8564	(3,3)
	5	1	24.504	24.503	0.01	9	24.5026	(5,1)
		2	24.775	24.772	0.01	10	24.7723	(5,2)
		3	25.870	25.869	0.00	11	25.7553	(4,4)
		4	28.752	28.752	0.00	12	25.8691	(5,3)
SD-C	1	1	27.473	27.470	0.01	1	10.0755	(3,1)
		2	69.284	69.282	0.00	2	11.1664	(2,1)
		3	115.290	115.290	0.00	3	15.9195	(4,1)
		4	159.640	159.644	0.00	4	18.3170	(3,2)
	5	1	24.700	24.700	0.00	5	18.5627	(4,2)
		2	25.698	25.695	0.01	6	24.7004	(5,1)
		3	28.435	28.434	0.00	7	25.2098	(4,3)
		4	33.586	33.583	0.01	8	25.6953	(5,2)
	10	1	99.606	99.605	0.00	9	27.4695	(1,1)
		2	99.919	99.916	-0.31	10	28.4345	(5,3)
		3	100.460	100.462	-0.54	11	31.0957	(2,2)
		4	101.260	101.265	-0.80	12	32.6601	(3,3)

$2m$  је број полуталаса у тангенцијалном правцу

$n$  је број полуталаса у правцу  $x$ -осе



Слика 5.5 – Првих дванаест облика осциловања за кружну цилиндричну љуску са  $SD-F$  граничним условима:  $L/a = 10, h/a = 0.01$ .

**Пример 5.3**

У Табели 5.3 је приказано првих девет сопствених фреквенција у (Hz) за љуску са C-C граничним условима:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $L = 20 \text{ m}$ ,  $a = 1 \text{ m}$  и  $h = 0.01 \text{ m}$ . Приказана су решења из чланка (Zhang X. M., 2001), решења добијена применом ДМК по *Donnell-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији, као и решења добијена помоћу програма *Abaqus*. Zhang је користио *Love-Timoshenko*-ву теорију танких љуски ((Love, 1888), (Timoshenko, 1959)) и метод простирања таласа (*wave propagation approach*). Таласни број у правцу у  $x$ -осе одредио апроксимативно као таласни број одговарајуће греде са сличним граничним условима. За прорачун у програму *Abaqus* су коришћена два различита типа коначног елемента: *STR13* (раван коначни елемент са 6 чворова по *Kirchhoff*-овој теорији танких љуски) и *S4R* (коначни елемент љуске са 4 чвора који узима у обзир деформацију смицања, чији утицај постаје веома мали како се смањује дебелина и тежи *Kirchhoff*-овој теорији танких љуски). Из Табеле 5.3 се види да решења по *Donnell-Mushtari*-евој теорији дају нешто више сопствене фреквенције у односу на *Flügge*-ову и *Love-Timoshenko*-ву теорију, као и у односу на решења заснована на примени *МКЕ*.

Табела 5.3 - Првих девет сопствених фреквенција у (Hz) за кружну цилиндричну љуску са C-C граничним условима:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $L = 20 \text{ m}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $h = 0.01 \text{ m}$ .

тон	(Zhang X. M., 2001)	ДМК-Flügge	ДМК-Donnell-Mushtari	Abaqus	
				S4R	STR13
1	12.17	12.00	13.38	12.00	12.01
2	19.61	19.56	21.86	19.60	19.57
3	23.28	23.10	25.11	23.13	23.12
4	28.06	27.16	27.82	27.16	27.19
5	-	28.30	28.35	28.30	28.30
6	31.98	31.47	33.01	31.50	31.52
7	36.47	36.42	38.83	36.59	36.43
8	37.37	37.28	39.66	37.43	37.27
9	39.78	39.59	41.86	39.74	39.62



**Пример 5.4**

У Табели 5.4 су приказане најниже бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega}$  за кружну цилиндричну љуску са  $F-F$  граничним условима ( $L/a = 20$ ,  $h/a = 0.05$ ) за усвојено  $m = 1, 2, 3, 4, 5$  и  $6$ . Резултати добијени применом ДМК по *Donnell-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији су упоређени са резултатима из чланка (Zhang L., 2006), као и са решењима добијеним помоћу програма *Abaqus*. У Табели 5.4 је такође приказана и релативна разлика у процентима између решења добијених помоћу програма *Abaqus*, где је кружна цилиндрична љуска полупречника  $a = 1\text{ m}$  моделирана са 101052 *STR13* коначних елемента, и тачних (аналитичких) решења. Zhang је у свом раду за решење проблема слободних вибрација користио *Goldenveizer-Novozhilov*-у теорију танких љуски ((Goldenveizear, 1961), (Novozhilov, 1964.)) и *state-space* метод за добијање хомогених диференцијалних једначина. Из Табеле 5.4 се види добро слагања резултата по *Goldenveizer-Novozhilov*-ој и *Flügge*-овој теорији са резултатима добијеним помоћу *MKE*, док резултати по *Donnell-Mushtari*-евој теорији су и до 33% већи. *Donnell-Mushtari*-ева теорија као најједноставнија теорија танких љуски, не рачунајући теорију плитких љуски, зависно од граничних услова, односа  $L/a$ ,  $h/a$  и  $m$  може да да резултате који се значајно разликују од резултата добијених применом неких тачнијих теорија танких љуски и о томе треба водити рачуна приликом њене примене.

Табела 5.4 - Најнижа бездимензионална сопствена фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за усвојено  $m$  за кружну цилиндричну љуску са  $F-F$  граничним условима:  $L/a = 20$ ,  $h/a = 0.05$ ,  $\nu = 0.3$ .

$m$	(Zhang L., 2006)	$\Delta\%$ (Zhang L., 2006) и <i>Abaqus</i>	ДМК- <i>Flügge</i>	$\Delta\%$ ДМК- <i>Flügge</i> и <i>Abaqus</i>	ДМК- <i>Donnell-Mushtari</i>	$\Delta\%$ ДМК- <i>Donnell-Mushtari</i> и <i>Abaqus</i>	<i>Abaqus</i> ( <i>STR13</i> коначни елемент)
1	0.035424	0.25	0.035522	-0.03	0.037010	-4.22	0.035512
2	0.038683	0.03	0.038688	0.01	0.051544	-33.21	0.038694
3	0.109366	-0.02	0.109387	-0.04	0.123004	-12.49	0.109343
4	0.209644	-0.09	0.209690	-0.12	0.223583	-6.75	0.209447
5	0.340330	-0.60	0.339078	-0.23	0.353093	-4.37	0.338317
6	0.498824	-0.64	0.497362	-0.35	0.511463	-3.19	0.495631

Метода динамичке крутости може да се користи за решавање проблема слободних вибрација љуски са скоковитом променом материјалних и геометријских карактеристика. Кроз следећа два примера је приказана њена примена код одређивања сопствених фреквенција љуски са скоковитом променом дебљине.

#### **Пример 5.5**

У првом примеру, Табела 5.5, су за усвојено  $m$  одређене прве четири бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega}$  кружне цилиндричне љуске са једно-степеном променом дебљине и  $C-F$ ,  $C-SD$  и  $C-C$  граничним условима. Решења добијена применом ДМК по *Flügge*-овој теорији су упоређена са решењима из чланка (Zhang L., 2007). За љуску са  $C-F$  граничним условима приказана су решења за однос  $L/a=1$  и  $m=1$  и 2, за љуску са  $C-SD$  граничним условима је  $L/a=10$  и  $m=3$  и 4, односно за љуску са  $C-C$  граничним условима  $L/a=5$  и  $m=5$  и 6. За све љуске је:  $h_1/a=0.01$ ,  $h_2/h_1=0.5$  и  $L_1/L=0.5$ , где су  $h_1$  и  $L_1$  дебљина и дужина првог сегмента љуске редом,  $h_2$ -је дебљина другог сегмента и  $L$  је укупна дужина љуске. Zhang је користио *Flügge*-ову теорију танких љуски, *state-space* метод за добијање хомогених диференцијалних једначина за сегмент и метод декомпозиције домена (*domain decomposition method*) да би поставио услове равнотеже и компатибилности на споју два сегмента. У Табели 5.5 су, такође, приказане и релативне разлике у процентима између ова два решења, које не прелазе 0.01%.

#### **Пример 5.6**

У другом примеру, који се бави љускама са скоковитом променом дебљине, за усвојено  $m=1, 2, 3$  и 4 су одређене прве четири бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega}$  кружне цилиндричне љуске са  $SD-SD$  граничним условима и једно-степеном, дво-степеном и тро-степеном променом дебљине. У Табели 5.6 су приказани резултати добијеним применом ДМК за *Flügge*-ову теорију, као и резултати из чланка (Zhang L., 2007). Коришћена су два различита односа дужине и полупречника љуске:  $L/a=1$  и 5,  $L$  је укупна дужина љуске, док је за однос  $h_1/a$  изабрана вредност 0.01. Све љуске из овог примера имају сегменте

једнаке дужине, што нпр. за љуску са тро-степеном променом дебљине значи да је  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L/4$ , где су  $L_1, L_2, L_3$  и  $L_4$  дужине првог, другог, трећег и четвртог сегмента редом. За љуску са једностапеном променом дебљине је  $h_2/h_1 = 0.5$ , у случају двостепене променом дебљине  $h_2/h_1 = 3$  и  $h_3/h_1 = 1$ , док је за љуску са тро-степеном променом дебљине  $h_2/h_1 = 2$ ,  $h_3/h_1 = 3$  и  $h_4/h_1 = 4$ . Релативна разлика у процентима између ова два решења, која не прелази 0.01%, је такође приказана у табели. За одређивање  $\bar{\omega}$  применом динамичких матрица крутости је коришћен корак  $df = 0.01 \text{ Hz}$ .

Табела 5.5 - Прве четири бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за усвојено  $m$  за кружну цилиндричну љуску са једностапеном променом дебљине:  $h_1/a = 0.01, h_2/h_1 = 0.5, L_1/L = 1/2, \nu = 0.3$ .

	тон	(Zhang L., 2007)	ΔМК-Flügge	Δ% (Zhang L., 2007) и ΔМК Flügge	(Zhang L., 2006)	ΔМК-Flügge	Δ% (Zhang L., 2007) и ΔМК Flügge
		$m = 1$			$m = 2$		
$C-F$ $\frac{L}{a} = 1$	1	0.637349	0.637356	0.00	0.409444	0.409447	0.00
	2	0.899615	0.899611	0.00	0.766426	0.766433	0.00
	3	0.948341	0.948335	0.00	0.911952	0.911948	0.00
	4	0.973919	0.973926	0.00	0.954440	0.954443	0.00
		$m = 3$			$m = 4$		
$C-SD$ $\frac{L}{a} = 10$	1	0.073550	0.073553	0.00	0.057247	0.057254	-0.01
	2	0.169777	0.169773	0.00	0.117799	0.117796	0.00
	3	0.275089	0.275093	0.00	0.194529	0.194532	0.00
	4	0.388211	0.388217	0.00	0.283104	0.283104	0.00
		$m = 5$			$m = 5$		
$C-C$ $\frac{L}{a} = 5$	1	0.038185	0.038187	-0.01	0.051992	0.051994	0.00
	2	0.057617	0.057618	0.00	0.064715	0.064712	0.01
	3	0.071696	0.071702	-0.01	0.089501	0.089506	-0.01
	4	0.085486	0.085492	-0.01	0.102022	0.102016	0.01

Табела 5.6 - Прве четири бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за усвојено за  $m$  кружне цилиндричне љуске са  $SD$ - $SD$  граничним условима и скоковитом променом дебљине:  $h_i/a = 0.01$ ,  $\nu = 0.3$ .

	$\frac{L}{a}$	ТОН	$m = 1$			$m = 2$			$m = 3$			$m = 4$		
			(Zhang L., 2007)	ΔМК-Flügge	Δ%	(Zhang L., 2007)	ΔМК-Flügge	Δ%	(Zhang L., 2007)	ΔМК-Flügge	Δ%	(Zhang L., 2007)	ΔМК-Flügge	Δ%
једно-степенa промена дебљине $L_1 = L_2 = \frac{L}{2}$ $h_2/h_1 = 0.5$	$\frac{L}{a} = 1$	1	0.549340	0.549338	0.00	0.622435	0.622442	0.00	0.461341	0.461338	0.00	0.342826	0.342832	0.00
		2	0.852379	0.852375	0.00	0.866342	0.866338	0.00	0.777164	0.777161	0.00	0.682271	0.682274	0.00
		3	0.931840	0.931846	0.00	0.929986	0.929977	0.00	0.887397	0.887396	0.00	0.835280	0.835280	0.00
		4	0.958827	0.9588204	0.00	0.982615	0.982611	0.00	0.959382	0.959391	0.00	0.930105	0.930098	0.00
	$\frac{L}{a} = 5$	1	0.176590	0.176590	0.00	0.072978	0.072982	-0.01	0.041137	0.041128	0.02	0.041535	0.041526	0.02
		2	0.459537	0.459538	0.00	0.241848	0.241855	0.00	0.137338	0.137330	0.01	0.091429	0.091427	0.00
		3	0.581714	0.581712	0.00	0.404736	0.404741	0.00	0.253553	0.253551	0.00	0.170766	0.170759	0.00
		4	0.670022	0.670024	0.00	0.549270	0.549269	0.00	0.377266	0.377265	0.00	0.266358	0.266355	0.00
дво-степенa промена дебљине $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{L}{3}$ $h_2/h_1 = 3$ $h_3/h_1 = 1$	$\frac{L}{a} = 1$	1	0.517542	0.517536	0.00	0.505186	0.505182	0.00	0.369360	0.369357	0.00	0.296891	0.296894	0.00
		2	0.722939	0.722935	0.00	0.862676	0.862670	0.00	0.810485	0.810486	0.00	0.741740	0.741743	0.00
		3	0.945073	0.945065	0.00	0.997603	0.997595	0.00	0.961980	0.961987	0.00	0.920945	0.920945	0.00
		4	1.021771	1.021767	0.00	1.046677	1.046683	0.00	1.053025	1.053033	0.00	1.040086	1.040091	0.00
	$\frac{L}{a} = 5$	1	0.144796	0.144788	0.01	0.066942	0.066944	0.00	0.068069	0.068068	0.00	0.110912	0.110909	0.00
		2	0.406223	0.406229	0.00	0.235771	0.235764	0.00	0.140607	0.140600	0.00	0.120957	0.120962	0.00
		3	0.626946	0.626940	0.00	0.413989	0.413981	0.00	0.266796	0.266788	0.00	0.196154	0.196159	0.00
		4	0.663870	0.663864	0.00	0.507014	0.507016	0.00	0.354791	0.354789	0.00	0.269685	0.269677	0.00

5. Континуални елемент кружне цилиндричне љуске за анализу вибрација и избочавања

	$\frac{L}{a}$	ТОН	$m = 1$			$m = 2$			$m = 3$			$m = 4$		
			(Zhang L., 2007)	ΔМК-Flügge	Δ%	(Zhang L., 2007)	ΔМК-Flügge	Δ%	(Zhang L., 2007)	ΔМК-Flügge	Δ%	(Zhang L., 2007)	ΔМК-Flügge	Δ%
тро-степенa промена дебљине $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = \frac{L}{4}$	$\frac{L}{a} = 1$	1	0.501100	0.501099	0.00	0.574534	0.574531	0.00	0.442315	0.442322	0.00	0.363088	0.363094	0.00
		2	0.856108	0.856113	0.00	0.904135	0.904127	0.00	0.832518	0.832512	0.00	0.766221	0.766226	0.00
		3	0.959588	0.959582	0.00	1.078523	1.078519	0.00	1.060339	1.060335	0.00	1.045075	1.045074	0.00
		4	1.093752	1.093746	0.00	1.140371	1.140376	0.00	1.319586	1.319579	0.00	1.324191	1.324198	0.00
$h_2/h_1 = 2$	$\frac{L}{a} = 5$	1	0.165713	0.165706	0.00	0.074674	0.074678	-0.01	0.070909	0.070906	0.00	0.100470	0.100476	-0.01
$h_3/h_1 = 3$		2	0.452733	0.452738	0.00	0.239237	0.239242	0.00	0.151120	0.151120	0.00	0.155030	0.155031	0.00
$h_4/h_1 = 4$		3	0.597712	0.597716	0.00	0.414403	0.414396	0.00	0.271633	0.271633	0.00	0.222936	0.222943	0.00
		4	0.668250	0.668242	0.00	0.552346	0.552349	0.00	0.388570	0.388563	0.00	0.302990	0.302985	0.00

**Пример 5.7**

У последњем примеру, Табела 5.7, су одређене најниже бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega}$  за љуске са *SD-SD*, *C-C* и *F-F* граничним условима које имају два, односно три, прстенаста међуослонца. Међуослонци се налазе на једнаким међусобним растојањима. На месту прстенастог међуослонца спречено је радијално померање, тј.  $w=0$ . За однос  $L/a$  је усвојена вредност 5 и 10, док је  $h/a=0.05$  и  $0.005$ . Резултати добијени применом ДМК по *Flügge*-овој теорији су упоређени са резултатима из чланка (Xiang Y., 2002). *Xiang* је користио *Goldenveizer-Novozhilov*-у теорију танких љуски, *state-space* метод за добијање хомогених диференцијалних једначина за појединачне сегменте и метод декомпозиције домена да би поставио услове равнотеже и компатибилности на споју два сегмента. У Табели 5.7 је дата и релативна разлика између ова два решења, која је  $\leq 1.18\%$ , као и  $m$  које одговара основној сопственој фреквенцији.

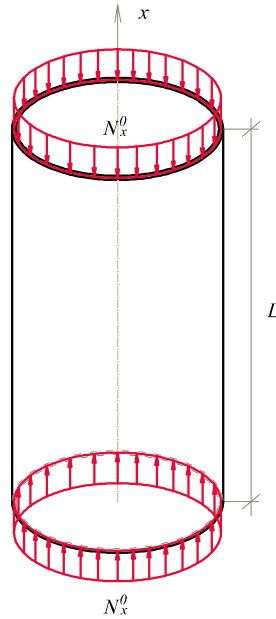
Табела 5.7 - Најниже бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за кружну цилиндричну љуску са прстенастим међуослонцима ( $w=0$ ) на једнаким међусобним растојањима:  $\nu = 0.3$ .

ГУ	$\frac{L}{a}$	$\frac{h}{a}$	два међуослонца				три међуослонца			
			(Xiang Y., 2002)	ДМК- <i>Flügge</i>	$\Delta\%$	$m$	(Xiang Y., 2002)	ДМК- <i>Flügge</i>	$\Delta\%$	$m$
<i>SD-SD</i>	5	0.005	0.09733410	0.09736141	-0.03	(7)	0.13052900	0.13056499	-0.03	(8)
		0.05	0.30662900	0.30744889	-0.27	(4)	0.39346800	0.39311378	0.09	(1)
	10	0.005	0.04757610	0.04758199	-0.01	(5)	0.06529310	0.06529980	-0.01	(6)
		0.05	0.14468164	0.14504722	-0.25	(3)	0.18596200	0.18648681	-0.28	(3)
<i>C-C</i>	5	0.005	0.10608300	0.10609919	-0.02	(7)	0.13655000	0.13658628	-0.03	(8)
		0.05	0.31320200	0.31385083	-0.21	(3)	0.40571000	0.40674818	-0.26	(4)
	10	0.005	0.05294030	0.05294578	-0.01	(5)	0.06864620	0.06865649	-0.01	(6)
		0.05	0.15388300	0.15425217	-0.24	(3)	0.19404800	0.19454980	-0.26	(3)
<i>F-F</i>	5	0.005	0.04372600	0.04367161	0.12	(5)	0.06023600	0.06017825	0.10	(5)
		0.05	0.11563700	0.11540796	0.20	(1)	0.17655500	0.17631291	0.14	(1)
	10	0.005	0.02093890	0.02091878	0.10	(3)	0.02938180	0.02934511	0.12	(4)
		0.05	0.05515220	0.05450301	1.18	(2)	0.11356600	0.11343547	0.11	(1)

## 5.2 Опште решење проблема избочавања затворене кружне цилиндричне љуски услед константне аксијалне силе притиска

Систем диференцијалних једначина којима је дефинисан проблем еластичне стабилности кружне цилиндричне љуске по *Flügge*-овој теорији услед константног аксијалног притиска, Слика 5.6, је (Leissa, 1973):

$$\begin{bmatrix} \partial_x^2 \left( 1 - \frac{N_x^0}{D_1} \right) + \frac{(1-\nu)}{2a^2} \left( 1 + \frac{K}{D_1 a^2} \right) \partial_\varphi^2 & \frac{(1+\nu)}{2a} \partial_x \partial_\varphi & \frac{\nu}{a} \partial_x - \frac{K}{D_1 a} \partial_x^3 + \frac{K}{D_1 a^3} \frac{(1-\nu)}{2} \partial_x \partial_\varphi^2 \\ \frac{(1+\nu)}{2a} \partial_x \partial_\varphi & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi^2 \left( 1 - \frac{N_x^0}{D_1} \right) + \frac{(1-\nu)}{2} \left( 1 + \frac{3K}{D_1 a^2} \right) \partial_x^2 & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi - \frac{K}{D_1 a^2} \frac{(3-\nu)}{2} \partial_x^2 \partial_\varphi \\ \frac{\nu}{a} \partial_x - \frac{K}{D_1 a} \partial_x^3 + \frac{K}{D_1 a^3} \frac{(1-\nu)}{2} \partial_x \partial_\varphi^2 & \frac{1}{a^2} \partial_\varphi - \frac{K}{D_1 a^2} \frac{(3-\nu)}{2} \partial_x^2 \partial_\varphi & \frac{K}{D_1} \left( \partial_x^4 + \frac{2}{a^2} \partial_x^2 \partial_\varphi^2 + \frac{1}{a^4} \partial_\varphi^4 \right) + \frac{1}{a^2} + \frac{2K}{D_1 a^4} \partial_\varphi^2 + \frac{K}{D_1 a^4} + \frac{N_x^0}{D_1} \partial_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$



Слика 5.6 – Кружна цилиндрична љуска оптерећена константном силом  $N_x^0$

У једначини (5.66), за разлику од једначине (4.50) којом је дефинисан проблем слободних вибрација кружне цилиндричне љуске по *Flügge*-овој теорији, нема чланова који потичу од инерцијалних сила, али су додати чланови који потичу од константне аксијалне силе притиска  $N_x^0$ . Такође, у

анализи еластичне стабилности непозната компонентална померања  $u^0$ ,  $v^0$  и  $w^0$  су функције само просториних координата. Запис једначина (5.66) у матричном облику, који је исти као за случај слободних вибрација, је дат једначином (5.26), али се сад изрази за коефицијенте, једначина (5.27), разликују у следећем:

- коефицијенти  $c_{2,m}$ ,  $c_{7,m}$  и  $c_{12,m}$  су без члана  $\rho h \omega^2 / D_1$  који потиче од инерцијалних сила,
- коефицијенти  $c_{1,m}$  и  $c_{6,m}$  имају додатни члан  $-N_x^o / D_1$ , односно коефицијент  $c_{11,m}$  члан  $+N_x^o / D_1$ ,
- сви остали коефицијенти си исти као у једначини (5.27).

Све остало што се тиче поступка решавања система једначина (5.66), карактеристичне једначине и њених коефицијената, коефицијената  $\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$ , израза за померања и пресечне силе је исто као у случају слободних вибрација.

### 5.2.1 Матрица крутости за избочавање затворене кружне цилиндричне љуске $K_m$

❖ Вектор померања  $\hat{\mathbf{q}}_m$

Вектор померања  $\hat{\mathbf{q}}_m$  и матрица  $\mathbf{D}_m$  су исти као за случај слободних вибрација и дати су једначинама (5.39) и (5.40).

❖ Вектор сила  $\hat{\mathbf{Q}}_m$

Вектора сила  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  се разликују од вектора сила за случај вибрација, који је дат једначином (5.42), у следећем: уместо чланова  $-\hat{Q}_x(0, \varphi)$  и  $\hat{Q}_x(L, \varphi)$  су чланови  $-\hat{\hat{Q}}_x(0, \varphi)$  и  $\hat{\hat{Q}}_x(L, \varphi)$ , који могу да се одреде на основу следећег израза:

$$\begin{aligned} \hat{\hat{Q}}_x(x, \varphi) &= \hat{Q}_x + \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{M}_{x\varphi}}{\partial \varphi} - N_x^o \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} = \\ &= \sum_{m=1}^M \hat{\hat{Q}}_{xm}(x) \cos(m\varphi) = \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} \bar{Q}_{xi,m} e^{i,mx} \right) \cos(m\varphi) \end{aligned} \quad (5.67)$$



На овај начин је узета у обзир компонента константне аксијалне силе притиска  $N_x^0$  на правац нормале на средњу површ у благо деформисаном положају. Усвојена је претпоставка да сила  $N_x^0$  током деформације не мења правац. Израз за “амплитуду” пресечне силе  $\hat{\bar{Q}}_x(x, \varphi)$  је:

$$\hat{\bar{Q}}_{xi,m} = \frac{K \left[ (1-\nu) \delta_{i,m} m^2 + 2a^2 r_{i,m}^2 (\delta_{i,m} - a r_{i,m}) \right]}{2a^3} + \frac{K m r_{i,m} \left[ (3-\nu) \gamma_{i,m} + 2m(2-\nu) \right]}{2a^2} - N_x^0 r_{i,m}, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (5.68)$$

Разлика између “амплитуда” пресечних сила  $\hat{\bar{Q}}_{xi,m}$  и  $\bar{Q}_{xi,m}$  је у члану  $N_x^0 r_{i,m}$ . Као последица, и вектор  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  и матрица  $\mathbf{F}_m$  се такође разликују од вектора  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  и матрице  $\mathbf{F}_m$  за случај слободних вибрација, једначине (5.46) и (5.47). Уместо компоненти  $-\hat{\bar{Q}}_{xm}(0)$  и  $\hat{\bar{Q}}_{xm}(L)$  у вектору  $\hat{\mathbf{Q}}_m$  су чланови  $-\hat{\bar{Q}}_{xm}(0)$  и  $\hat{\bar{Q}}_{xm}(L)$ , док у матрици  $\mathbf{F}_m$  уместо чланова  $\bar{Q}_{xi,m}$  су  $\hat{\bar{Q}}_{xi,m}$ ,  $i = 1, \dots, 8$ . Матрица крутости за избочавање за  $m$ -ти хармоник  $\mathbf{K}_{lm}$ ,  $m \geq 1$ , је као и у случају слободних вибрација реда 8.

## 5.2.2 Нумерички примери

Применом матрица крутости за избочавање  $\mathbf{K}_{lm}$  по *Flügge*-овој теорији одређени су критични фактори избочавања  $\lambda = N_x^0 a \sqrt{3(1-\nu^2)} / (Eh^2)$  за кружну цилиндричну љуску са и без прстенстих међуослонаца. Резултати су упоређена са резултатима из чланка (Xiang Y., 2005). *Xiang* је за решење проблема еластичне стабилности по *Flügge*-овој теорији користио *state-space* метод, док је за спајање сегмената на месту међуослонаца користио *метод декомпозиције домена*. У примерима су коришћена два типа међуослонаца:

- Тип 1:  $w = 0$ ,
- Тип 2:  $u = 0$ ,  $v = 0$  и  $w = 0$ .

За одређивање критичног фактора избочавања  $\lambda$  је усвојен корак  $d\lambda = 0.000001$ . У табелама је приказана и релативна разлика у % између ова два решења, као и  $m$  које одговара критичном фактору избочавања  $\lambda$ . У свим примерима је коришћена вредност *Poisson*-овог коефицијента  $\nu = 0.3$ .

**Пример 5.8**

У првом примеру, Табела 5.8, је одређен критични фактор избочавања  $\lambda$  за кружну цилиндричну љуску са *SD-SD* граничним условима. Однос  $h/a$  је 100 и 500, док су за однос  $L/a$  усвојене вредности 1, 5 и 10. Слагање између приказаних резултата је потпуно.

Табела 5.8 – Критични фактор избочавања  $\lambda = N_x^0 a \sqrt{3(1-\nu^2)} / (Eh^2)$  за кружну цилиндричну љуску са *SD-SD* граничним условима:  $\nu = 0.3$ .

$h/a$	$L/a$	(Xiang Y., 2005)	МКИ-Flügge	$\Delta \%$	$m$
	1	0.960713	0.960713	0.00	(7)
1/100	5	0.901542	0.901542	0.00	(3)
	10	0.883810	0.883810	0.00	(4)
	1	0.984007	0.984007	0.00	(11)
1/500	5	0.923693	0.923693	0.00	(5)
	10	0.923693	0.923693	0.00	(3)

**Пример 5.9**

У другом примеру, Табела 5.9, су приказани резултати за критични фактор избочавања  $\lambda$  за кружну цилиндричну љуску без међуослонаца, као и са једним прстенастим међуослонцем *Тип 2*. Изабрана је *C-F* комбинација граничних услова и следеће геометријске карактеристике:  $h/a = 1/100$  и  $L/a = 1$  и 2. Међуослонац се налази на  $0.3L$  од слободног краја. Решења приказана у табели се апсолутно поклапају.

Табела 5.9 – Критични фактор избочавања  $\lambda = N_x^0 a \sqrt{3(1-\nu^2)} / (Eh^2)$  за кружну цилиндричну љуску са *C-F* граничним условима:  $h/a = 1/100$ ,  $\nu = 0.3$ .

случај	$L/a$	(Xiang Y., 2005)	МКИ Flügge	$\Delta \%$	$m$
без међуослонаца	1	0.395477	0.395477	0.00	(7)
	2	0.379531	0.379531	0.00	(6)
са једним међуослонцем <i>Тип 2</i> ( $u = v = w = 0$ )	1	0.478700	0.478700	0.00	(8)
	2	0.419251	0.419251	0.00	(7)

### **Пример 5.10**

У трећем примеру, Табела 5.10, су приказани резултати за критични фактор избочавања  $\lambda$  за кружну цилиндричну љуску са једним међуослонцем *Тип 1*, односно *Тип 2*. Изабране су *C-C* и *SD-SD* комбинације граничних услова, као и следеће геометријске карактеристике:  $h/a = 1/100$  и  $1/500$ ,  $L/a = 1$  и  $5$ . Положај међуослонаца је на  $0.1L$ ,  $0.3L$  и  $0.5L$ , где је  $L$  укупна дужина кружне цилиндричне љуске. Релативна разлика у резултатима је  $\Delta \leq 1\%$ .

### **Пример 5.11**

У последњем примеру, Табела 5.11, је за кружну цилиндричну љуску ( $L/a = 5$ ,  $h/a = 1/100$ ) са *C-F*, *C-C* и *SD-SD* комбинацијом граничних услова и два, три, четири, пет и шест међуослонаца одређен критични фактор избочавања  $\lambda$ . Резултати су приказани и за ослонац *Тип 1*, као и за ослонац *Тип 2*. Ослонци се налазе на истом међусобном растојању. Из Табеле 5.11 може да се закључи да повећање броја прстенастих међуослонаца на подједнаким растојањима не доводи обавезно и до повећања отпорности љуске на избочавање. Исто тако, ослонац *Тип 2* доводи до нешто већег повећања отпорности на избочавање љуске у односу на ослонац *Тип 1*.

Табела 5.10 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_x^0 a \sqrt{3(1-\nu^2)} / (Eh^2)$  за кружну цилиндричну љуску са једним прстенастим међуослонцем:  $\nu = 0.3$ .

ГУ	тип међуослонца	$\frac{h}{a}$	$\frac{L}{a}$	положај прстенастог међуослонца											
				0.1L				0.3L				0.5L			
				(Xiang Y., 2005)	МКИ-Flügge	$\Delta\%$	$m$	(Xiang Y., 2005)	МКИ-Flügge	$\Delta\%$	$m$	(Xiang Y., 2005)	МКИ-Flügge	$\Delta\%$	$m$
SD-SD	Tun 1 ( $w = 0$ )	1/100	1	0.977900	0.977900	0.00	(7)	0.986175	0.986175	0.00	(9)	0.983691	0.983691	0.00	(9)
			5	0.966988	0.966988	0.00	(6)	0.968040	0.968040	0.00	(6)	0.953476	0.953476	0.00	(5)
		1/500	1	0.996802	0.996802	0.00	(20)	0.995612	0.995612	0.00	(17)	0.993178	0.993178	0.00	(15)
			5	0.990678	0.990678	0.00	(14)	0.992840	0.992840	0.00	(3)	0.960152	0.960152	0.00	(7)
	Tun 2 ( $u = v = w = 0$ )	1/100	1	0.988424	0.988424	0.00	(9)	0.990753	0.990753	0.00	(9)	0.993493	0.993493	0.00	(8)
			5	0.969472	0.969472	0.00	(7)	0.975415	0.975415	0.00	(7)	0.979404	0.979404	0.00	(8)
		1/500	1	0.997089	0.997089	0.00	(20)	0.997388	0.997388	0.00	(20)	0.997898	0.997898	0.00	(20)
			5	0.993617	0.993616	0.00	(15)	0.994779	0.994779	0.00	(17)	0.995811	0.995810	0.00	(19)
C-C	Tun 1 ( $w = 0$ )	1/100	1	1.001100	1.011003	-0.99	(9)	1.008950	1.008953	0.00	(9)	1.011180	1.011177	0.00	(9)
			5	0.979449	0.979449	0.00	(8)	0.979449	0.979449	0.00	(8)	0.979449	0.979449	0.00	(8)
		1/500	1	0.998224	0.998224	0.00	(20)	0.998176	0.998176	0.00	(20)	0.998112	0.998111	0.00	(20)
			5	0.995748	0.995748	0.00	(18)	0.995748	0.995748	0.00	(18)	0.995748	0.995748	0.00	(18)
	Tun 2 ( $u = v = w = 0$ )	1/100	1	1.016830	1.016829	0.00	(9)	1.022790	1.022792	0.00	(8)	1.022580	1.022581	0.00	(8)
			5	0.982656	0.982655	0.00	(9)	0.981191	0.986771	-0.57	(8)	0.985070	0.983504	0.16	(9)
		1/500	1	0.998575	0.998575	0.00	(20)	0.999991	0.999991	0.00	(20)	1.001220	1.001218	0.00	(19)
			5	0.997707	0.996395	0.13	(20)	0.997284	0.996496	0.08	(20)	0.996705	0.996496	0.02	(20)

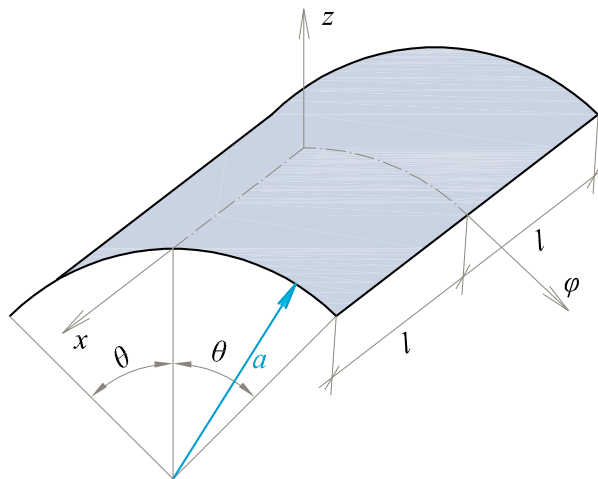
Табела 5.11 - Критични фактор избочавања  $\lambda = N_x^0 a \sqrt{3(1-\nu^2)} / (Eh^2)$  за кружну цилиндричну љуску са прстенастим ослонцима на једнаким међусобним растојањима:  $L/a = 5$ ,  $h/a = 1/100$ ,  $\nu = 0.3$ .

Број ослонца	ГУ	Тип међуослонца							
		Тун 1 ( $w = 0$ )				Тун 2 ( $u = v = w = 0$ )			
		(Xiang Y., 2005)	МКИ-Flügge	$\Delta\%$	$m$	(Xiang Y., 2005)	МКИ-Flügge	$\Delta\%$	$m$
2	<i>SD-SD</i>	0.976738	0.976738	0.00	(6)	0.987063	0.983709	0.34	(9)
	<i>C-C</i>	0.982568	0.982568	0.00	(9)	0.987388	0.987386	0.00	(9)
	<i>C-F</i>	0.382016	0.382016	0.00	(6)	0.384103	0.384103	0.00	(6)
3	<i>SD-SD</i>	0.960525	0.960525	0.00	(6)	0.989141	0.985289	0.39	(9)
	<i>C-C</i>	0.980057	0.980057	0.00	(8)	0.989309	0.989309	0.00	(9)
	<i>C-F</i>	0.389143	0.389143	0.00	(6)	0.390561	0.390561	0.00	(7)
4	<i>SD-SD</i>	0.960713	0.960713	0.00	(7)	0.993492	0.993492	0.00	(8)
	<i>C-C</i>	0.98522	0.985220	0.00	(9)	0.993655	0.993654	0.00	(9)
	<i>C-F</i>	0.38812	0.38812	0.00	(6)	0.39529	0.39529	0.00	(7)
5	<i>SD-SD</i>	0.976795	0.976795	0.00	(7)	0.992470	0.992470	0.00	(9)
	<i>C-C</i>	0.982598	0.982598	0.00	(9)	0.992486	0.992485	0.00	(9)
	<i>C-F</i>	0.385778	0.385778	0.00	(6)	0.400358	0.400358	0.00	(7)
6	<i>SD-SD</i>	0.972828	0.972828	0.00	(8)	0.992622	0.992622	0.00	(8)
	<i>C-C</i>	0.982036	0.982036	0.00	(8)	0.993549	0.993549	0.00	(8)
	<i>C-F</i>	0.386754	0.386754	0.00	(6)	0.407265	0.407265	0.00	(7)

## 6 КОНТИНУАЛНИ ЕЛЕМЕНТ СЕГМЕНТА КРУЖНЕ ЦИЛИНДРИЧНЕ ЉУСКЕ ЗА АНАЛИЗУ ВИБРАЦИЈА

Сегменти кружне цилиндричне љуске често се јављају у инжењерској пракси као делови различитих типова конструкција (кровне конструкције великог распона у грађевинарству, делови конструкција авиона и бродова у аероинжењерству и бродоградњи и сл.). Током животног века, односно током њихове примене, ове конструкције су изложене сложеним условима окружења који подразумевају најразличитије граничне услове и оптерећења, као што су нпр. силовити динамички утицаји који могу да доведу до колапса конструкције. Стога, потпуно познавање динамичких карактеристика ових конструктивних елемената је од велике важности да би се обезбедило сигурно, успешно и економски исплативо пројектовање. У оквиру овог поглавља биће изведена динамичка матрица крутости сегмента кружне цилиндричне љуске, која ће бити примењена у анализи слободних вибрација система састављених од једног или више сегмената са произвољним граничним условима.

### 6.1 Опште решење проблема слободних вибрација



Слика 6.1 – Сегмент кружне цилиндричне љуске

Системи парцијалних диференцијалних једначина, којима је дефинисан проблем слободних вибрација сегмента кружне цилиндричне љуске у случају *Donnell-Mushtari*-еве и *Flügge*-ове теорије, дати су у Поглављу 4 (једначине (4.43) и (4.50)). Произвољна деформација сегмента кружне

цилиндричне љуске приказаног на Слици 6.1 је, на основу метода суперпозиције, представљена као збир четири деформације:

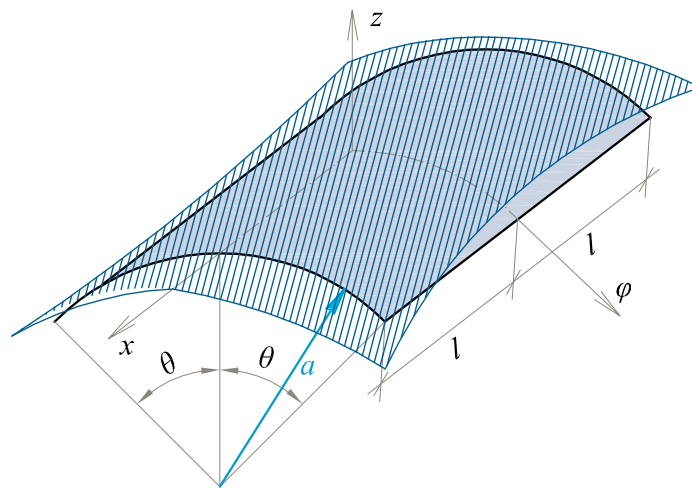
- симетричне и око  $x$ -осе и око  $\varphi$ -осе -  $SS$ ,
- симетричне око  $x$ -осе, а антисиметричне око  $\varphi$ -осе -  $SA$ ,
- антисиметричне око  $x$ -осе, а симетричне око  $\varphi$ -осе -  $AS$ ,
- антисиметричне и око  $x$  и око  $\varphi$ -осе -  $AA$ .

Изрази за компонентална померања  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  и  $\hat{w}$  се усвајају у следећем облику:

$$\begin{aligned}\hat{w}(x, \varphi) &= \hat{w}^{SS}(x, \varphi) + \hat{w}^{SA}(x, \varphi) + \hat{w}^{AS}(x, \varphi) + \hat{w}^{AA}(x, \varphi) \\ \hat{u}(x, \varphi) &= \hat{u}^{SS}(x, \varphi) + \hat{u}^{SA}(x, \varphi) + \hat{u}^{AS}(x, \varphi) + \hat{u}^{AA}(x, \varphi) \\ \hat{v}(x, \varphi) &= \hat{v}^{SS}(x, \varphi) + \hat{v}^{SA}(x, \varphi) + \hat{v}^{AS}(x, \varphi) + \hat{v}^{AA}(x, \varphi)\end{aligned}\quad (6.1)$$

На овај начин је омогућена анализа само четвртине сегмента кружне цилиндричне љуске и самим тим је смањен ред динамичких матрица крутости које одговарају сваком појединачном случају симетрије. У оквиру тезе су дата решења за  $SS$ ,  $SA$  и  $AA$  случај симетрије. Решење за  $AS$  допринос може да се добије из решења за  $SA$  део када координате  $x$  и  $\varphi$ , као и померања  $\hat{u}$  и  $\hat{v}$ , замене места.

### 6.1.1 Двострука симетрија $SS$



Слика 6.2 –  $SS$  деформација сегмента кружне цилиндричне љуске

Компонентална померања за случај двоструко симетричне деформације, приказане на Слици 6.2, су:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^M \overset{SS1}{^1U_m^{SS}(x) \cos(\alpha_m \varphi)} + \sum_{m=1}^M \overset{SS2}{^2U_m^{SS}(\varphi) \sin(\beta_m x)} \\
 \hat{v}^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \overset{SS1}{^1V_m^{SS}(x) \sin(\alpha_m \varphi)} + \sum_{m=0}^M \overset{SS2}{^2V_m^{SS}(\varphi) \cos(\beta_m x)} \\
 \hat{w}^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^M \overset{SS1}{^1W_m^{SS}(x) \cos(\alpha_m \varphi)} + \sum_{m=0}^M \overset{SS2}{^2W_m^{SS}(\varphi) \cos(\beta_m x)}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

где је  $\alpha_m = m\pi / \theta$  и  $\beta_m = m\pi / l$ . На основу скицираног деформисаног облика, Слика 6.2, може да се закључи да  $^1W_m^{SS}(x)$ ,  $^2W_m^{SS}(\varphi)$ ,  $^1V_m^{SS}(x)$  и  $^2U_m^{SS}(\varphi)$  треба да буду парне, односно  $^1U_m^{SS}(x)$  и  $^2V_m^{SS}(\varphi)$  непарне функције. Избор тригонометријских функција у једначини (6.2) омогућава трансформацију система три парцијалне диференцијалне једначине, којима је дефинисан проблем слободних вибрација, у систем три обичне диференцијалне једначине.

❖ Donnell-Mushtari-ева теорија

Заменом SS1 дела једначине (6.2) у једначину (5.2) добија се:

$$\begin{bmatrix}
 ^1c_{1,m}^{SS} \partial_x^2 + ^1c_{2,m}^{SS} & ^1c_{3,m}^{SS} \partial_x & ^1c_{4,m}^{SS} \partial_x & \\
 -^1c_{3,m}^{SS} \partial_x & ^1c_{5,m}^{SS} \partial_x^2 + ^1c_{6,m}^{SS} & ^1c_{7,m}^{SS} & \\
 ^1c_{4,m}^{SS} \partial_x & -^1c_{7,m}^{SS} & ^1c_{8,m}^{SS} \partial_x^4 + ^1c_{9,m}^{SS} \partial_x^2 + ^1c_{10,m}^{SS} & 
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 ^1U_m^{SS}(x) \\
 ^1V_m^{SS}(x) \\
 ^1W_m^{SS}(x)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

где су:

$$\begin{aligned}
 ^1c_{1,m}^{SS} &= 1 & ^1c_{6,m}^{SS} &= -\alpha_m^2 / a^2 + \rho h \omega^2 / D_1 \\
 ^1c_{2,m}^{SS} &= -(1-\nu) \alpha_m^2 / 2a^2 + \rho h \omega^2 / D_1 & ^1c_{7,m}^{SS} &= -\alpha_m / a^2 \\
 ^1c_{3,m}^{SS} &= (1+\nu) \alpha_m / 2a & ^1c_{8,m}^{SS} &= K / D_1 \\
 ^1c_{4,m}^{SS} &= \nu / a & ^1c_{9,m}^{SS} &= -2K \alpha_m^2 / D_1 a^2 \\
 ^1c_{5,m}^{SS} &= (1-\nu) / 2 & ^1c_{10,m}^{SS} &= K \alpha_m^4 / D_1 a^4 + 1/a^2 - \rho h \omega^2 / D_1
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Детерминантна једначина система (6.3) је:

$$\left( \partial_x^8 + ^1a_{1,m}^{SS} \partial_x^6 + ^1a_{2,m}^{SS} \partial_x^4 + ^1a_{3,m}^{SS} \partial_x^2 + ^1a_{4,m}^{SS} \right) \Psi = 0 \tag{6.5}$$

где је  $\Psi = ^1U_m^{SS}(x)$  или  $^1V_m^{SS}(x)$  или  $^1W_m^{SS}(x)$ . Изрази за коефицијенте карактеристичне једначине су:



$$\begin{aligned}
 {}^1a_{1,m}^{SS} &= \frac{\left({}^1c_{3,m}^{SS}\right)^2 + {}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS} + {}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} + \frac{{}^1c_{9,m}^{SS}}{{}^1c_{8,m}^{SS}}}{\frac{{}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS}}{}} + \frac{{}^1c_{9,m}^{SS}}{1c_{8,m}^{SS}} \\
 {}^1a_{2,m}^{SS} &= \frac{{}^1c_{10,m}^{SS}}{1c_{8,m}^{SS}} + \frac{{}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS} - \left({}^1c_{4,m}^{SS}\right)^2 {}^1c_{5,m}^{SS} + {}^1c_{9,m}^{SS} \left(\left({}^1c_{3,m}^{SS}\right)^2 + {}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS} + {}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS}\right)}{1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS}} \\
 {}^1a_{3,m}^{SS} &= \frac{{}^1c_{10,m}^{SS} \left(\left({}^1c_{3,m}^{SS}\right)^2 + {}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS}\right) - \left({}^1c_{4,m}^{SS}\right)^2 {}^1c_{6,m}^{SS} + 2 {}^1c_{3,m}^{SS} {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} + {}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} {}^1c_{9,m}^{SS}}{1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS}} \quad (6.6) \\
 &+ \frac{{}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} + \left({}^1c_{7,m}^{SS}\right)^2}{1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS}} \\
 {}^1a_{4,m}^{SS} &= \frac{{}^1c_{2,m}^{SS} \left({}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} + \left({}^1c_{7,m}^{SS}\right)^2\right)}{1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS}}
 \end{aligned}$$

Корени карактеристичне једначине диференцијалне једначине (6.5) су означени са  ${}^1r_{i,m}^{SS}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Решења за непознате функције су:

$$\begin{aligned}
 {}^1U_m^{SS}(x) &= \sum_{i=1}^4 {}^1A_{i,m}^{SS} \sinh\left({}^1r_{i,m}^{SS}x\right) \\
 {}^1V_m^{SS}(x) &= \sum_{i=1}^4 {}^1B_{i,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{i,m}^{SS}x\right) \quad (6.7) \\
 {}^1W_m^{SS}(x) &= \sum_{i=1}^4 {}^1C_{i,m}^{SS} \cosh\left({}^1r_{i,m}^{SS}x\right)
 \end{aligned}$$

Код функције  ${}^1U_m^{SS}(x)$  је задржан непарни део решења, односно код функција  ${}^1V_m^{SS}(x)$  и  ${}^1W_m^{SS}(x)$  парни део решења. Само четири, од укупно дванаест интеграционих константи  $({}^1A_{i,m}^{SS}, {}^1B_{i,m}^{SS}, {}^1C_{i,m}^{SS})$ , су међусобно независне. Константе  ${}^1A_{i,m}^{SS}$  и  ${}^1B_{i,m}^{SS}$  су изражене у функцији константи  ${}^1C_{i,m}^{SS}$  на следећи начин:

$${}^1A_{i,m}^{SS} = {}^1\delta_{i,m}^{SS} {}^1C_{i,m}^{SS} \quad {}^1B_{i,m}^{SS} = {}^1\gamma_{i,m}^{SS} {}^1C_{i,m}^{SS} \quad (6.8)$$

где су:

$${}^1\delta_{i,m}^{SS} = -\frac{{}^1r_{i,m}^{SS} \left[ -{}^1c_{3,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} + {}^1c_{4,m}^{SS} \left( {}^1c_{6,m}^{SS} + {}^1c_{5,m}^{SS} \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \right) \right]}{\left( {}^1c_{3,m}^{SS} \right)^2 \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 + \left( {}^1c_{2,m}^{SS} + {}^1c_{1,m}^{SS} \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \right) \left( {}^1c_{6,m}^{SS} + {}^1c_{5,m}^{SS} \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \right)} \quad (6.9)$$

$${}^1\gamma_{i,m}^{SS} = -\frac{{}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} + ({}^1c_{3,m}^{SS} {}^1c_{4,m}^{SS} + {}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS}) ({}^1r_{i,m}^{SS})^2}{\left( {}^1c_{3,m}^{SS} \right)^2 \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 + \left( {}^1c_{2,m}^{SS} + {}^1c_{1,m}^{SS} \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \right) \left( {}^1c_{6,m}^{SS} + {}^1c_{5,m}^{SS} \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \right)}$$

$i = 1, 2, 3, 4.$

Решење (6.7) важи за случај када је  $m \geq 1$ . Када је  $m = 0$ , систем једначина (5.2) се трансформише у:

$$\begin{bmatrix} {}^1c_{1,0}^{SS} d_x^2 + {}^1c_{2,0}^{SS} & {}^1c_{3,0}^{SS} d_x \\ {}^1c_{3,0}^{SS} d_x & {}^1c_{4,0}^{SS} d_x^4 + {}^1c_{5,0}^{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1U_0^{SS}(x) \\ {}^1W_0^{SS}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

где су:

$$\begin{aligned} {}^1c_{1,0}^{SS} &= 1 & {}^1c_{4,0}^{SS} &= K/D_1 \\ {}^1c_{2,0}^{SS} &= \rho h \omega^2 / D_1 & {}^1c_{5,0}^{SS} &= 1/a^2 - \rho h \omega^2 / D_1 \\ {}^1c_{3,0}^{SS} &= \nu / a \end{aligned} \quad (6.11)$$

Детерминантна једначина система (6.10) је:

$$\left( d_x^6 + {}^1a_{1,0}^{SS} d_x^4 + {}^1a_{2,0}^{SS} d_x^2 + {}^1a_{3,0}^{SS} \right) \Psi = 0 \quad (6.12)$$

где је  $\Psi = {}^1U_0^{SS}(x)$  или  ${}^1W_0^{SS}(x)$ . Изрази за коефицијенте карактеристичне једначине су:

$$\begin{aligned} {}^1a_{1,0}^{SS} &= {}^1c_{2,0}^{SS} / {}^1c_{1,0}^{SS} \\ {}^1a_{2,0}^{SS} &= \left( -\left( {}^1c_{3,0}^{SS} \right)^2 + {}^1c_{1,0}^{SS} {}^1c_{5,0}^{SS} \right) / {}^1c_{1,0}^{SS} {}^1c_{4,0}^{SS} \\ {}^1a_{3,0}^{SS} &= {}^1c_{2,0}^{SS} {}^1c_{5,0}^{SS} / {}^1c_{1,0}^{SS} {}^1c_{4,0}^{SS} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Корени карактеристичне једначине, која одговара диференцијалној једначини (6.12), су означени са  ${}^1r_{i,0}^{SS}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Решење за непознате функције за случај  $m = 0$  је:

$$\begin{aligned} {}^1U_0^{SS}(x) &= \sum_{i=1}^3 {}^1\delta_{i,0}^{SS} {}^1C_{i,0}^{SS} \sinh\left( {}^1r_{i,0}^{SS} x \right) \\ {}^1W_0^{SS}(x) &= \sum_{i=1}^3 {}^1C_{i,0}^{SS} \cosh\left( {}^1r_{i,0}^{SS} x \right) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Коефицијент  ${}^1\delta_{i,0}^{SS}$  представља однос амплитуде померања у правцу  $x$ -осе и радијалног померања и дефинисан је следећим изразом:

$${}^1\delta_{i,0}^{SS} = -{}^1c_{3,0}^{SS} {}^1r_{i,0}^{SS} / \left( {}^1c_{2,0}^{SS} + {}^1c_{1,0}^{SS} \left( {}^1r_{i,0}^{SS} \right)^2 \right) \quad (6.15)$$

$i = 1, 2, 3.$

Да би се добило укупно решење за  $SS$  допринос,  $SS2$  део решења (6.2) мора да се узме у обзир. Поступак за одређивање непознатих компоненталних померања за  $SS2$  део је исти као и за  $SS1$  део, па ће бити само укратко приказан.

Заменом  $SS2$  дела једначине (6.2) у једначину (5.2) добија се:

$$\begin{bmatrix} {}^2c_{1,m}^{SS} \partial_\varphi^2 + {}^2c_{2,m}^{SS} & {}^2c_{3,m}^{SS} \partial_\varphi & {}^2c_{4,m}^{SS} \\ -{}^2c_{3,m}^{SS} \partial_\varphi & {}^2c_{5,m}^{SS} \partial_\varphi^2 + {}^2c_{6,m}^{SS} & {}^2c_{5,m}^{SS} \partial_\varphi \\ {}^2c_{4,m}^{SS} & {}^2c_{5,m}^{SS} \partial_\varphi & {}^2c_{7,m}^{SS} \partial_\varphi^4 + {}^2c_{8,m}^{SS} \partial_\varphi^2 + {}^2c_{9,m}^{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2U_m^{SS}(\varphi) \\ {}^2V_m^{SS}(\varphi) \\ {}^2W_m^{SS}(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

где су:

$$\begin{aligned} {}^2c_{1,m}^{SS} &= (1-\nu)/2a^2 & {}^2c_{6,m}^{SS} &= -\beta_m^2(1-\nu)/2 + \rho h \omega^2 / D_1 \\ {}^2c_{2,m}^{SS} &= -\beta_m^2 + \rho h \omega^2 / D_1 & {}^2c_{7,m}^{SS} &= K / D_1 a^4 \\ {}^2c_{3,m}^{SS} &= -\beta_m(1+\nu)/2a & {}^2c_{8,m}^{SS} &= -2\beta_m^2 K / a^2 D_1 \\ {}^2c_{4,m}^{SS} &= -\nu \beta_m / a & {}^2c_{9,m}^{SS} &= K \beta_m^4 / D + 1/a^2 - \rho h \omega^2 / D_1 \\ {}^2c_{5,m}^{SS} &= 1/a^2 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Детерминантна једначина система (6.16) је:

$$\left( \partial_\varphi^8 + {}^2a_{1,m}^{SS} \partial_\varphi^6 + {}^2a_{2,m}^{SS} \partial_\varphi^4 + {}^2a_{3,m}^{SS} \partial_\varphi^2 + {}^2a_{4,m}^{SS} \right) \Psi = 0 \quad (6.18)$$

где је:  $\Psi = {}^2U_m^{SS}(\varphi)$  или  ${}^2V_m^{SS}(\varphi)$  или  ${}^2W_m^{SS}(\varphi)$ , док су коефицијенти једначине (6.18) једнаки:

$$\begin{aligned} {}^2a_{1,m}^{SS} &= \frac{\left( {}^2c_{3,m}^{SS} \right)^2 + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS}}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS}} + \frac{{}^2c_{8,m}^{SS}}{{}^2c_{7,m}^{SS}} \\ {}^2a_{2,m}^{SS} &= \frac{{}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS} + \left( {}^2c_{3,m}^{SS} \right)^2 {}^2c_{8,m}^{SS} + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} {}^2c_{8,m}^{SS}}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS}} \\ &+ \frac{{}^2c_{1,m}^{SS} \left[ {}^2c_{6,m}^{SS} {}^2c_{8,m}^{SS} + {}^2c_{5,m}^{SS} \left( -{}^2c_{5,m}^{SS} + {}^2c_{9,m}^{SS} \right) \right]}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS}} \\ {}^2a_{3,m}^{SS} &= \frac{-{}^2c_{3,m}^{SS} {}^2c_{4,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} + {}^2c_{4,m}^{SS} \left( {}^2c_{5,m}^{SS} \right)^2 - {}^2c_{2,m}^{SS} \left( {}^2c_{5,m}^{SS} \right)^2}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS}} \\ &+ \frac{{}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} {}^2c_{8,m}^{SS} + {}^2c_{9,m}^{SS} \left( \left( {}^2c_{3,m}^{SS} \right)^2 + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} \right)}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS}} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$${}^2a_{4,m}^{SS} = \frac{{}^2c_{6,m}^{SS} \left( ({}^2c_{4,m}^{SS})^2 + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{9,m}^{SS} \right)}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS}}$$

Коефицијенти, који представљају однос амплитуда померања, за SS2 део су:

$$\begin{aligned} {}^2\delta_{i,m}^{SS} &= \frac{-{}^2c_{4,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} + ({}^2c_{3,m}^{SS} - {}^2c_{4,m}^{SS}) {}^2c_{5,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2}{\left( {}^2c_{3,m}^{SS} {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2 + \left( {}^2c_{2,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right) \left( {}^2c_{6,m}^{SS} + {}^2c_{5,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right)} \\ {}^2\gamma_{i,m}^{SS} &= -\frac{{}^2r_{i,m}^{SS} \left[ {}^2c_{3,m}^{SS} {}^2c_{4,m}^{SS} + {}^2c_{5,m}^{SS} \left( {}^2c_{2,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right) \right]}{\left( {}^2c_{3,m}^{SS} {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2 + \left( {}^2c_{2,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right) \left( {}^2c_{6,m}^{SS} + {}^2c_{5,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right)} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Са  ${}^2r_{i,m}^{SS}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , су означени корени карактеристичне једначине која одговара диференцијалној једначини (6.18).

Када је  $m = 0$ , систем једначина (5.2) постаје:

$$\begin{bmatrix} {}^2c_{1,0}^{SS} d_\varphi^2 + {}^2c_{2,0}^{SS} & {}^2c_{1,0}^{SS} d_\varphi \\ {}^2c_{1,0}^{SS} d_\varphi & {}^2c_{3,0}^{SS} d_\varphi^4 + {}^2c_{4,0}^{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2V_0^{SS}(\varphi) \\ {}^2W_0^{SS}(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

где је  $d_\varphi = d/d\varphi$  и:

$$\begin{aligned} {}^2c_{1,0}^{SS} &= 1/a^2 & {}^2c_{3,0}^{SS} &= K/D_1 a^4 \\ {}^2c_{2,0}^{SS} &= \rho h \omega^2 / D_1 & {}^2c_{4,0}^{SS} &= 1/a^2 - \rho h \omega^2 / D_1 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Детерминантна једначина система и њени коефицијенти су:

$$\left( d_\varphi^6 + {}^2a_{1,0}^{SS} d_\varphi^4 + {}^2a_{2,0}^{SS} d_\varphi^2 + {}^2a_{3,0}^{SS} \right) \Psi = 0 \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} {}^2a_{1,0}^{SS} &= {}^2c_{2,0}^{SS} / {}^2c_{1,0}^{SS} \\ {}^2a_{2,0}^{SS} &= \left( -{}^2c_{1,0}^{SS} + {}^2c_{4,0}^{SS} \right) / {}^2c_{3,0}^{SS} \\ {}^2a_{3,0}^{SS} &= {}^2c_{2,0}^{SS} {}^2c_{4,0}^{SS} / \left( {}^2c_{1,0}^{SS} {}^2c_{3,0}^{SS} \right) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Изрази за непознате функције и коефицијент  ${}^2\gamma_{i,0}^{SS}$  су:

$${}^2V_0^{SS}(\varphi) = \sum_{i=1}^3 {}^2\gamma_{i,0}^{SS} {}^2C_{i,0}^{SS} \sinh({}^2r_{i,0}^{SS} \varphi) \quad {}^2W_0^{SS}(\varphi) = \sum_{i=1}^3 {}^2C_{i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} \varphi) \quad (6.25)$$

$${}^2\gamma_{i,0}^{SS} = -{}^2c_{1,0}^{SS} {}^2r_{i,0}^{SS} / \left( {}^2c_{2,0}^{SS} + {}^2c_{1,0}^{SS} ({}^2r_{i,0}^{SS})^2 \right) \quad (6.26)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Са  ${}^2r_{i,0}^{SS}$ ,  $i=1,2,3$ , су означени корени карактеристичне једначине која одговара диференцијалној једначини (6.23). Коначно, укупно решење за  $SS$  део је:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^1\delta_{i,0}^{SS} {}^1C_{i,0}^{SS} \sinh({}^1r_{i,0}^{SS} x) + \\
 &\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1\delta_{i,m}^{SS} {}^1C_{i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} x) \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \right. \\
 &\left. \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2\delta_{i,m}^{SS} {}^2C_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} \varphi) \right] \sin(\beta_m x) \right\} \\
 \hat{v}^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^2\gamma_{i,0}^{SS} {}^2C_{i,0}^{SS} \sinh({}^2r_{i,0}^{SS} \varphi) + \\
 &\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1\gamma_{i,m}^{SS} {}^1C_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} x) \right] \sin(\alpha_m \varphi) + \right. \\
 &\left. \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2\gamma_{i,m}^{SS} {}^2C_{i,m}^{SS} \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} \varphi) \right] \cos(\beta_m x) \right\} \\
 \hat{w}^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^1C_{i,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} x) + \sum_{i=1}^3 {}^2C_{i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} \varphi) + \\
 &\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1C_{i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} x) \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \right. \\
 &\left. \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2C_{i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} \varphi) \right] \cos(\beta_m x) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Заменом израза (6.27) у једначине (4.38) и (4.40) добијају се изрази за пресечне силе за  $SS$  допринос:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_x^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 \left[ {}^1N_{xi,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} x) {}^1C_{i,0}^{SS} + {}^2N_{xi,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} \varphi) {}^2C_{i,0}^{SS} \right] + \\
 &\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1N_{xi,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} x) {}^1C_{i,m}^{SS} \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \right. \\
 &\left. \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2N_{xi,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SS} \right] \cos(\beta_m x) \right\} \\
 \hat{N}_\varphi^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 \left[ {}^1N_{\varphi i,0}^{SS} \cosh({}^1r_{i,0}^{SS} x) {}^1C_{i,0}^{SS} + {}^2N_{\varphi i,0}^{SS} \cosh({}^2r_{i,0}^{SS} \varphi) {}^2C_{i,0}^{SS} \right] + \\
 &\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1N_{\varphi i,m}^{SS} \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} x) {}^1C_{i,m}^{SS} \right] \cos(\alpha_m \varphi) \right. \\
 &\left. \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2N_{\varphi i,m}^{SS} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SS} \right] \cos(\beta_m x) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_{x\varphi}^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1N_{x\varphi i, m}^{SS} \sinh({}^1r_{i, m}^{SS} x) {}^1C_{i, m}^{SS} \right] \sin(\alpha_m \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2N_{x\varphi i, m}^{SS} \sinh({}^2r_{i, m}^{SS} \varphi) {}^2C_{i, m}^{SS} \right] \sin(\beta_m x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{Q}_x^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^1Q_{xi, 0}^{SS} \sinh({}^1r_{i, 0}^{SS} x) {}^1C_{i, 0}^{SS} + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1Q_{xi, m}^{SS} \sinh({}^1r_{i, m}^{SS} x) {}^1C_{i, m}^{SS} \right] \cos(\alpha_m \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2Q_{xi, m}^{SS} \cosh({}^2r_{i, m}^{SS} \varphi) {}^2C_{i, m}^{SS} \right] \sin(\beta_m x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{Q}_\varphi^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^2Q_{\varphi i, 0}^{SS} \sinh({}^2r_{i, 0}^{SS} \varphi) {}^2C_{i, 0}^{SS} + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1Q_{\varphi i, m}^{SS} \cosh({}^1r_{i, m}^{SS} x) {}^1C_{i, m}^{SS} \right] \sin(\alpha_m \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2Q_{\varphi i, m}^{SS} \sinh({}^2r_{i, m}^{SS} \varphi) {}^2C_{i, m}^{SS} \right] \cos(\beta_m x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{M}_x^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 \left[ {}^1M_{xi, 0}^{SS} \cosh({}^1r_{i, 0}^{SS} x) {}^1C_{i, 0}^{SS} + {}^2M_{xi, 0}^{SS} \cosh({}^2r_{i, 0}^{SS} \varphi) {}^2C_{i, 0}^{SS} \right] + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1M_{xi, m}^{SS} \cosh({}^1r_{i, m}^{SS} x) {}^1C_{i, m}^{SS} \right] \cos(\alpha_m \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2M_{xi, m}^{SS} \cosh({}^2r_{i, m}^{SS} \varphi) {}^2C_{i, m}^{SS} \right] \cos(\beta_m x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{M}_\varphi^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 \left[ {}^1M_{\varphi i, 0}^{SS} \cosh({}^1r_{i, 0}^{SS} x) {}^1C_{i, 0}^{SS} + {}^2M_{\varphi i, 0}^{SS} \cosh({}^2r_{i, 0}^{SS} \varphi) {}^2C_{i, 0}^{SS} \right] + \\
 &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1M_{\varphi i, m}^{SS} \cosh({}^1r_{i, m}^{SS} x) {}^1C_{i, m}^{SS} \right] \cos(\alpha_m \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2M_{\varphi i, m}^{SS} \cosh({}^2r_{i, m}^{SS} \varphi) {}^2C_{i, m}^{SS} \right] \cos(\beta_m x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{M}_{x\varphi}^{SS}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1M_{x\varphi i, m}^{SS} \sinh({}^1r_{i, m}^{SS} x) {}^1C_{i, m}^{SS} \right] \sin(\alpha_m \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2M_{x\varphi i, m}^{SS} \sinh({}^2r_{i, m}^{SS} \varphi) {}^2C_{i, m}^{SS} \right] \sin(\beta_m x) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

где су:

$$\begin{aligned}
 {}^1N_{xi,0}^{SS} &= D_1 \left( {}^1r_{i,0}^{SS} \delta_{i,0}^{SS} + \frac{\nu}{a} \right) & {}^2N_{xi,0}^{SS} &= D_1 \frac{\nu}{a} \left( 1 + {}^2r_{i,0}^{SS} {}^2\gamma_{i,0}^{SS} \right) \\
 {}^1N_{xi,m}^{SS} &= D_1 \left[ {}^1r_{i,m}^{SS} \delta_{i,m}^{SS} + \frac{\nu}{a} \left( 1 + \alpha_m {}^1\gamma_{i,m}^{SS} \right) \right] \\
 {}^2N_{xi,m}^{SS} &= D_1 \left[ \frac{\nu}{a} \left( 1 + {}^2r_{i,m}^{SS} {}^2\gamma_{i,m}^{SS} \right) + \beta_m {}^2\delta_{i,m}^{SS} \right] \\
 {}^1N_{\phi i,0}^{SS} &= D_1 \left( \nu {}^1r_{i,0}^{SS} \delta_{i,0}^{SS} + \frac{1}{a} \right) & {}^2N_{\phi i,0}^{SS} &= \frac{D_1}{a} \left( 1 + {}^2r_{i,0}^{SS} {}^2\gamma_{i,0}^{SS} \right) \\
 {}^1N_{\phi i,m}^{SS} &= D_1 \left[ \nu {}^1r_{i,m}^{SS} \delta_{i,m}^{SS} + \frac{1}{a} \left( 1 + \alpha_m {}^1\gamma_{i,m}^{SS} \right) \right] \\
 {}^2N_{\phi i,m}^{SS} &= D_1 \left[ \nu \beta_m {}^2\delta_{i,m}^{SS} + \frac{1}{a} \left( 1 + {}^2r_{i,m}^{SS} {}^2\gamma_{i,m}^{SS} \right) \right] \\
 {}^1N_{x\phi i,m}^{SS} &= -\frac{D_1(1-\nu)}{2a} \left( \alpha_m {}^1\delta_{i,m}^{SS} - a {}^1\gamma_{i,m}^{SS} {}^1r_{i,m}^{SS} \right) \\
 {}^2N_{x\phi i,m}^{SS} &= -\frac{D_1(1-\nu)}{2a} \left( a \beta_m {}^2\gamma_{i,m}^{SS} - {}^2\delta_{i,m}^{SS} {}^2r_{i,m}^{SS} \right) \\
 {}^1Q_{xi,0}^{SS} &= -K \left( {}^1r_{i,0}^{SS} \right)^3 \\
 {}^1Q_{xi,m}^{SS} &= K {}^1r_{i,m}^{SS} \left[ \frac{\alpha_m^2}{a^2} - \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \right] & {}^2Q_{xi,m}^{SS} &= K \beta_m \left[ \frac{\left( {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2}{a^2} - \beta_m^2 \right] \\
 {}^1Q_{\phi i,m}^{SS} &= K \frac{\alpha_m}{a} \left[ \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 - \frac{\alpha_m^2}{a^2} \right] & {}^2Q_{\phi i,m}^{SS} &= K \frac{{}^2r_{i,m}^{SS}}{a} \left[ \beta_m^2 - \frac{\left( {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2}{a^2} \right] \\
 {}^1M_{xi,0}^{SS} &= -K \left( {}^1r_{i,0}^{SS} \right)^2 & {}^2M_{xi,0}^{SS} &= -\nu K \left( {}^2r_{i,0}^{SS} / a \right)^2 \\
 {}^1M_{xi,m}^{SS} &= K \left[ \nu \frac{\alpha_m^2}{a^2} - \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \right] & {}^2M_{xi,m}^{SS} &= K \left[ \beta_m^2 - \nu \frac{\left( {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2}{a^2} \right] \\
 {}^1M_{\phi i,0}^{SS} &= -\nu K \left( {}^1r_{i,0}^{SS} \right)^2 & {}^2M_{\phi i,0}^{SS} &= -K \frac{\left( {}^2r_{i,0}^{SS} \right)^2}{a^2} \\
 {}^1M_{\phi i,m}^{SS} &= K \left[ \frac{\alpha_m^2}{a^2} - \nu \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \right] & {}^2M_{\phi i,m}^{SS} &= K \left[ \nu \beta_m^2 - \frac{\left( {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2}{a^2} \right] \\
 {}^1M_{x\phi i,m}^{SS} &= \frac{K(1-\nu)}{a} \alpha_m {}^1r_{i,m}^{SS} & {}^2M_{x\phi i,m}^{SS} &= \frac{K(1-\nu)}{a} \beta_m {}^2r_{i,m}^{SS} \\
 i &= 1, 2, 3, (4).
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

❖ Flügge-ова теорија

Решење по Flügge-овој теорији, у односу на решење по Donnell-Mushtari-евој теорији, разликује се у следећем:

- заменом једначине (5.1) и SS1 дела једначине (6.2) у једначину (4.50) добија се:

$$\begin{bmatrix} {}^1c_{1,m}^{SS} \partial_x^2 + {}^1c_{2,m}^{SS} & {}^1c_{3,m}^{SS} \partial_x & {}^1c_{4,m}^{SS} \partial_x^3 + {}^1c_{5,m}^{SS} \partial_x \\ -{}^1c_{3,m}^{SS} \partial_x & {}^1c_{6,m}^{SS} \partial_x^2 + {}^1c_{7,m}^{SS} & {}^1c_{8,m}^{SS} \partial_x^2 + {}^1c_{9,m}^{SS} \\ {}^1c_{4,m}^{SS} \partial_x^3 + {}^1c_{5,m}^{SS} \partial_x & -{}^1c_{8,m}^{SS} \partial_x^2 - {}^1c_{9,m}^{SS} & {}^1c_{10,m}^{SS} \partial_x^4 + {}^1c_{11,m}^{SS} \partial_x^2 + {}^1c_{12,m}^{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1U_m^{SS}(x) \\ {}^1V_m^{SS}(x) \\ {}^1W_m^{SS}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

где су:

$$\begin{aligned} {}^1c_{1,m}^{SS} &= 1 & {}^1c_{7,m}^{SS} &= -\alpha_m^2/a^2 + \rho h \omega^2/D_1 \\ {}^1c_{2,m}^{SS} &= -(1-\nu)\alpha_m^2(1+K/D_1 a^2)/(2a^2) & {}^1c_{8,m}^{SS} &= K(3-\nu)\alpha_m/(2D_1 a^2) \\ & & & + \rho h \omega^2/D_1 \\ {}^1c_{3,m}^{SS} &= (1+\nu)\alpha_m/(2a) & {}^1c_{9,m}^{SS} &= -\alpha_m/a^2 \\ {}^1c_{4,m}^{SS} &= -K/(D_1 a) & {}^1c_{10,m}^{SS} &= K/D_1 \\ {}^1c_{5,m}^{SS} &= \nu/a - K(1-\nu)\alpha_m^2/(2D_1 a^3) & {}^1c_{11,m}^{SS} &= -2K\alpha_m^2/(D_1 a^2) \\ {}^1c_{6,m}^{SS} &= (1-\nu)[1+3K/(D_1 a^2)]/2 & {}^1c_{12,m}^{SS} &= K(\alpha_m^4 - 2\alpha_m^2 + 1)/(D_1 a^4) \\ & & & + 1/a^2 - \rho h \omega^2/D_1 \end{aligned} \quad (6.31)$$

- коефицијенти детерминантне једначине (6.5) и коефицијенти  ${}^1\delta_{i,m}^{SS}$  и  ${}^1\gamma_{i,m}^{SS}$  су:

$$\begin{aligned} {}^1a_{1,m}^{SS} &= \frac{{}^1c_{10,m}^{SS} ({}^1c_{3,m}^{SS})^2 + {}^1c_{1,m}^{SS} ({}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} + ({}^1c_{8,m}^{SS})^2) - ({}^1c_{4,m}^{SS})^2 {}^1c_{7,m}^{SS} + 2 {}^1c_{3,m}^{SS} {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS}}{{}^1c_{6,m}^{SS} ({}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{1,m}^{SS} - ({}^1c_{4,m}^{SS})^2)} \\ &+ \frac{{}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{2,m}^{SS} + {}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{11,m}^{SS} - 2 {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS}}{{}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{1,m}^{SS} + ({}^1c_{4,m}^{SS})^2} \\ {}^1a_{2,m}^{SS} &= \frac{{}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS} - ({}^1c_{5,m}^{SS})^2 {}^1c_{6,m}^{SS} + 2 ({}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS} {}^1c_{9,m}^{SS} - {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS})}{{}^1c_{6,m}^{SS} ({}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{1,m}^{SS} - ({}^1c_{4,m}^{SS})^2)} \\ &+ \frac{2 {}^1c_{3,m}^{SS} ({}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS} + {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{9,m}^{SS}) + {}^1c_{11,m}^{SS} (({}^1c_{3,m}^{SS})^2 + {}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} + {}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS})}{{}^1c_{6,m}^{SS} ({}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{1,m}^{SS} - ({}^1c_{4,m}^{SS})^2)} \\ &+ \frac{{}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} {}^1c_{10,m}^{SS} + {}^1c_{2,m}^{SS} ({}^1c_{8,m}^{SS})^2}{{}^1c_{6,m}^{SS} ({}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{1,m}^{SS} - ({}^1c_{4,m}^{SS})^2)} \end{aligned} \quad (6.32)$$



$$\begin{aligned}
 {}^1a_{3,m}^{SS} &= \frac{{}^1c_{12,m}^{SS} \left( ({}^1c_{3,m}^{SS})^2 + {}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} + {}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} \right) + {}^1c_{1,m}^{SS} ({}^1c_{9,m}^{SS})^2 + {}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{11,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS}}{{}^1c_{6,m}^{SS} \left( {}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{1,m}^{SS} - ({}^1c_{4,m}^{SS})^2 \right)} \\
 &+ \frac{2 {}^1c_{9,m}^{SS} \left( {}^1c_{3,m}^{SS} {}^1c_{5,m}^{SS} + {}^1c_{2,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS} \right) - ({}^1c_{5,m}^{SS})^2 {}^1c_{7,m}^{SS}}{{}^1c_{6,m}^{SS} \left( {}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{1,m}^{SS} - ({}^1c_{4,m}^{SS})^2 \right)} \\
 {}^1a_{4,m}^{SS} &= \frac{{}^1c_{2,m}^{SS} \left( {}^1c_{12,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} + ({}^1c_{9,m}^{SS})^2 \right)}{{}^1c_{6,m}^{SS} \left( {}^1c_{1,m}^{SS} {}^1c_{10,m}^{SS} - ({}^1c_{4,m}^{SS})^2 \right)} \\
 {}^1\delta_{i,m}^{SS} &= \frac{\left( {}^1c_{9,m}^{SS} + {}^1c_{8,m}^{SS} ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 \right)^2 + \left( {}^1c_{7,m}^{SS} + {}^1c_{6,m}^{SS} ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 \right) \left( {}^1c_{12,m}^{SS} + {}^1c_{11,m}^{SS} ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 + {}^1c_{10,m}^{SS} ({}^1r_{i,m}^{SS})^4 \right)}{{}^1r_{i,m}^{SS} \left( {}^1c_{5,m}^{SS} + {}^1c_{4,m}^{SS} ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 \right) \left( {}^1c_{7,m}^{SS} + {}^1c_{6,m}^{SS} ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 \right) - {}^1c_{3,m}^{SS} {}^1r_{i,m}^{SS} \left( {}^1c_{9,m}^{SS} + {}^1c_{8,m}^{SS} ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 \right)} \\
 {}^1\gamma_{i,m}^{SS} &= \frac{{}^1c_{12,m}^{SS} {}^1c_{3,m}^{SS} + {}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{9,m}^{SS} + \left( {}^1c_{11,m}^{SS} {}^1c_{3,m}^{SS} + {}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS} + {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{9,m}^{SS} \right) ({}^1r_{i,m}^{SS})^2}{{}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} - {}^1c_{3,m}^{SS} {}^1c_{9,m}^{SS} + \left( {}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} + {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} - {}^1c_{3,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS} \right) ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 + {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} ({}^1r_{i,m}^{SS})^4} \quad (6.33) \\
 &+ \frac{\left( {}^1c_{10,m}^{SS} {}^1c_{3,m}^{SS} + {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS} \right) ({}^1r_{i,m}^{SS})^4}{{}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} - {}^1c_{3,m}^{SS} {}^1c_{9,m}^{SS} + \left( {}^1c_{5,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} + {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{7,m}^{SS} - {}^1c_{3,m}^{SS} {}^1c_{8,m}^{SS} \right) ({}^1r_{i,m}^{SS})^2 + {}^1c_{4,m}^{SS} {}^1c_{6,m}^{SS} ({}^1r_{i,m}^{SS})^4}
 \end{aligned}$$

- једначина (6.10) у случају *Flügge*-ове теорије постаје:

$$\begin{bmatrix} {}^1c_{1,0}^{SS} d_x^2 + {}^1c_{2,0}^{SS} & {}^1c_{3,0}^{SS} d_x^3 + {}^1c_{4,0}^{SS} d_x \\ {}^1c_{3,0}^{SS} d_x^3 + {}^1c_{4,0}^{SS} d_x & {}^1c_{5,0}^{SS} d_x^4 + {}^1c_{6,0}^{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1U_0^{SS}(x) \\ {}^1W_0^{SS}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

где су:

$$\begin{aligned}
 {}^1c_{1,0}^{SS} &= 1 & {}^1c_{4,0}^{SS} &= \nu/a \\
 {}^1c_{2,0}^{SS} &= \rho h \omega^2 / D_1 & {}^1c_{5,0}^{SS} &= K / D_1 \\
 {}^1c_{3,0}^{SS} &= -K / (D_1 a) & {}^1c_{6,0}^{SS} &= -K / (D_1 a^4) + 1/a^2 - \rho h \omega^2 / D_1
 \end{aligned} \quad (6.35)$$

- коефицијенти детерминантне једначине (6.12) су:

$$\begin{aligned}
 {}^1a_{1,0}^{SS} &= \left( 2 {}^1c_{3,0}^{SS} {}^1c_{4,0}^{SS} - {}^1c_{2,0}^{SS} {}^1c_{5,0}^{SS} \right) / \left( ({}^1c_{3,0}^{SS})^2 - {}^1c_{1,0}^{SS} {}^1c_{5,0}^{SS} \right) \\
 {}^1a_{2,0}^{SS} &= \left( ({}^1c_{4,0}^{SS})^2 - {}^1c_{1,0}^{SS} {}^1c_{6,0}^{SS} \right) / \left( ({}^1c_{3,0}^{SS})^2 - {}^1c_{1,0}^{SS} {}^1c_{5,0}^{SS} \right) \\
 {}^1a_{3,0}^{SS} &= -{}^1c_{2,0}^{SS} {}^1c_{6,0}^{SS} / \left( ({}^1c_{3,0}^{SS})^2 - {}^1c_{1,0}^{SS} {}^1c_{5,0}^{SS} \right)
 \end{aligned} \quad (6.36)$$

- израз за коефицијент  ${}^1\delta_{i,0}^{SS}$  је:

$${}^1\delta_{i,0}^{SS} = - \left( {}^1c_{3,0}^{SS} ({}^1r_{i,0}^{SS})^3 + {}^1c_{4,0}^{SS} {}^1r_{i,0}^{SS} \right) / \left( {}^1c_{2,0}^{SS} + {}^1c_{1,0}^{SS} ({}^1r_{i,0}^{SS})^2 \right) \quad (6.37)$$

$i = 1, 2, 3.$

- једначина (6.16) постаје:

$$\begin{bmatrix} {}^2c_{1,m}^{SS}\partial_\varphi^2 + {}^2c_{2,m}^{SS} & {}^2c_{3,m}^{SS}\partial_\varphi & {}^2c_{4,m}^{SS}\partial_\varphi^2 + {}^2c_{5,m}^{SS} \\ -{}^2c_{3,m}^{SS}\partial_\varphi & {}^2c_{6,m}^{SS}\partial_\varphi^2 + {}^2c_{7,m}^{SS} & {}^2c_{8,m}^{SS}\partial_\varphi \\ -{}^2c_{4,m}^{SS}\partial_\varphi^2 - {}^2c_{5,m}^{SS} & {}^2c_{8,m}^{SS}\partial_\varphi & {}^2c_{9,m}^{SS}\partial_\varphi^4 + {}^2c_{10,m}^{SS}\partial_\varphi^2 + {}^2c_{11,m}^{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2U_m^{SS}(\varphi) \\ {}^2V_m^{SS}(\varphi) \\ {}^2W_m^{SS}(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

где су:

$$\begin{aligned} {}^2c_{1,m}^{SS} &= (1-\nu)[1+K/(D_1a^2)]/(2a^2) & {}^2c_{7,m}^{SS} &= \rho h\omega^2/D_1 - \beta_m^2(1-\nu)[1+3K/(D_1a^2)]/2 \\ {}^2c_{2,m}^{SS} &= -\beta_m^2 + \rho h\omega^2/D_1 & {}^2c_{8,m}^{SS} &= 1/a^2 + K(3-\nu)\beta_m^2/(2D_1a^2) \\ {}^2c_{3,m}^{SS} &= -\beta_m(1+\nu)/(2a) & {}^2c_{9,m}^{SS} &= K/(D_1a^4) \\ {}^2c_{4,m}^{SS} &= -\beta_m K(1-\nu)/(2D_1a^3) & {}^2c_{10,m}^{SS} &= 2K(1/a^2 - \beta_m^2)/(a^2D_1) \\ {}^2c_{5,m}^{SS} &= -\nu\beta_m/a - K\beta_m^3/(D_1a) & {}^2c_{11,m}^{SS} &= K(\beta_m^4 + 1/a^4)/D_1 + 1/a^2 - \rho h\omega^2/D_1 \\ {}^2c_{6,m}^{SS} &= 1/a^2 \end{aligned} \quad (6.39)$$

- коефицијенти карактеристичне једначине (6.18) су једнаки:

$$\begin{aligned} {}^2a_{1,m}^{SS} &= \frac{{}^2c_{6,m}^{SS} \left( {}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{10,m}^{SS} + \left( {}^2c_{4,m}^{SS} \right)^2 \right) + {}^2c_{9,m}^{SS} \left( \left( {}^2c_{3,m}^{SS} \right)^2 + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS} \right)}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} {}^2c_{9,m}^{SS}} \\ {}^2a_{2,m}^{SS} &= \frac{{}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS} {}^2c_{9,m}^{SS} + {}^2c_{10,m}^{SS} \left( \left( {}^2c_{3,m}^{SS} \right)^2 + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS} \right)}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} {}^2c_{9,m}^{SS}} \\ &+ \frac{{}^2c_{4,m}^{SS} \left( 2 {}^2c_{5,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} + {}^2c_{4,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS} - 2 {}^2c_{3,m}^{SS} {}^2c_{8,m}^{SS} \right) + {}^2c_{1,m}^{SS} \left( {}^2c_{11,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} - \left( {}^2c_{8,m}^{SS} \right)^2 \right)}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} {}^2c_{9,m}^{SS}} \\ {}^2a_{3,m}^{SS} &= \frac{\left( {}^2c_{5,m}^{SS} \right)^2 {}^2c_{6,m}^{SS} + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS} {}^2c_{10,m}^{SS} + 2 {}^2c_{5,m}^{SS} \left( {}^2c_{4,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS} - {}^2c_{3,m}^{SS} {}^2c_{8,m}^{SS} \right)}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} {}^2c_{9,m}^{SS}} \\ &+ \frac{{}^2c_{11,m}^{SS} \left( \left( {}^2c_{3,m}^{SS} \right)^2 + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{7,m}^{SS} \right) - {}^2c_{2,m}^{SS} \left( {}^2c_{8,m}^{SS} \right)^2}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} {}^2c_{9,m}^{SS}} \\ {}^2a_{4,m}^{SS} &= \frac{{}^2c_{7,m}^{SS} \left( \left( {}^2c_{5,m}^{SS} \right)^2 + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{11,m}^{SS} \right)}{{}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} {}^2c_{9,m}^{SS}} \end{aligned} \quad (6.40)$$

- коефицијенти  ${}^2\delta_{i,m}^{SS}$  и  ${}^2\gamma_{i,m}^{SS}$  су:

$$\begin{aligned}
 {}^2\delta_{i,m}^{SS} &= \frac{-{}^2c_{4,m}^{SS} {}^2c_{6,m}^{SS} + ({}^2c_{3,m}^{SS} - {}^2c_{4,m}^{SS}) {}^2c_{5,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2}{\left( {}^2c_{3,m}^{SS} {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2 + \left( {}^2c_{2,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right) \left( {}^2c_{7,m}^{SS} + {}^2c_{6,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right)} \\
 {}^2\gamma_{i,m}^{SS} &= -\frac{{}^2r_{i,m}^{SS} \left( {}^2c_{3,m}^{SS} {}^2c_{5,m}^{SS} + {}^2c_{2,m}^{SS} {}^2c_{8,m}^{SS} + \left( {}^2c_{3,m}^{SS} {}^2c_{4,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} {}^2c_{8,m}^{SS} \right) ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right)}{\left( {}^2c_{3,m}^{SS} {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2 + \left( {}^2c_{2,m}^{SS} + {}^2c_{1,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right) \left( {}^2c_{7,m}^{SS} + {}^2c_{6,m}^{SS} ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right)} \quad (6.41) \\
 i &= 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

- једначина (6.21) у случају *Flügge*-ове теорије је:

$$\begin{bmatrix} {}^2c_{1,0}^{SS} d_\varphi^2 + {}^2c_{2,0}^{SS} & {}^2c_{1,0}^{SS} d_\varphi \\ {}^2c_{1,0}^{SS} d_\varphi & {}^2c_{3,0}^{SS} d_\varphi^4 + 2{}^2c_{3,0}^{SS} d_\varphi^2 + {}^2c_{4,0}^{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2V_0^{SS}(\varphi) \\ {}^2W_0^{SS}(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

где су:

$$\begin{aligned}
 {}^2c_{1,0}^{SS} &= 1/a^2 & {}^2c_{3,0}^{SS} &= K/D_1 a^4 \\
 {}^2c_{2,0}^{SS} &= \rho h \omega^2 / D_1 & {}^2c_{4,0}^{SS} &= 1/a^2 + K/(D_1 a^4) - \rho h \omega^2 / D_1
 \end{aligned} \quad (6.43)$$

- коефицијенти карактеристичне једначине (6.23) су:

$$\begin{aligned}
 {}^2a_{1,0}^{SS} &= {}^2c_{2,0}^{SS} / {}^2c_{1,0}^{SS} \\
 {}^2a_{2,0}^{SS} &= \left( -{}^2c_{1,0}^{SS} + {}^2c_{4,0}^{SS} \right) / {}^2c_{3,0}^{SS} \\
 {}^2a_{3,0}^{SS} &= {}^2c_{2,0}^{SS} {}^2c_{4,0}^{SS} / \left( {}^2c_{1,0}^{SS} {}^2c_{3,0}^{SS} \right)
 \end{aligned} \quad (6.44)$$

- израз за коефицијент  ${}^1\gamma_{i,0}^{SS}$  је:

$${}^2\gamma_{i,0}^{SS} = -\left( {}^2c_{1,0}^{SS} {}^2r_{i,0}^{SS} \right) / \left( {}^2c_{2,0}^{SS} + {}^2c_{1,0}^{SS} ({}^2r_{i,0}^{SS})^2 \right) \quad (6.45)$$

$i = 1, 2, 3.$

- изрази за “амплитуде” пресечних сила су:

$$\begin{aligned}
 {}^1N_{xi,0}^{SS} &= D_1 \left( {}^1r_{i,0}^{SS} {}^1\delta_{i,0}^{SS} + \frac{v}{a} \right) - K \frac{({}^1r_{i,0}^{SS})^2}{a} & {}^2N_{xi,0}^{SS} &= \frac{D_1 v}{a} \left( 1 + {}^2r_{i,0}^{SS} {}^2\gamma_{i,0}^{SS} \right) \\
 {}^1N_{xi,m}^{SS} &= D_1 \left[ {}^1r_{i,m}^{SS} {}^1\delta_{i,m}^{SS} + \frac{v}{a} \left( 1 + \alpha_m {}^1\gamma_{i,m}^{SS} \right) \right] - K \frac{({}^1r_{i,m}^{SS})^2}{a} \\
 {}^2N_{xi,m}^{SS} &= D_1 \left[ \frac{v}{a} \left( 1 + {}^2r_{i,m}^{SS} {}^2\gamma_{i,m}^{SS} \right) + \beta_m {}^2\delta_{i,m}^{SS} \right] + K \frac{\beta_m^2}{a}
 \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned}
 {}^1N_{\phi i,0}^{SS} &= D_1 \left( v {}^1r_{i,0}^{SS} {}^1\delta_{i,0}^{SS} + \frac{1}{a} \right) + \frac{K}{a^3} & {}^2N_{\phi i,0}^{SS} &= \frac{D_1}{a} \left( 1 + {}^2r_{i,0}^{SS} {}^2\gamma_{i,0}^{SS} \right) + \frac{K}{a^3} \left[ 1 + ({}^2r_{i,0}^{SS})^2 \right] \\
 {}^1N_{\phi i,m}^{SS} &= D_1 \left[ v {}^1r_{i,m}^{SS} {}^1\delta_{i,m}^{SS} + \frac{1}{a} \left( 1 + \alpha_m {}^1\gamma_{i,m}^{SS} \right) \right] + \frac{K}{a^3} \left( 1 - \alpha_m^2 \right) \\
 {}^2N_{\phi i,m}^{SS} &= D_1 \left[ v \beta_m {}^2\delta_{i,m}^{SS} + \frac{1}{a} \left( 1 + {}^2r_{i,m}^{SS} {}^2\gamma_{i,m}^{SS} \right) \right] + \frac{K}{a^3} \left[ 1 + ({}^2r_{i,m}^{SS})^2 \right]
 \end{aligned}$$

$${}^1N_{x\varphi i,m}^{SS} = \frac{D_1(1-\nu)}{2a} \left( a^1\gamma_{i,m}^{SS} {}^1r_{i,m}^{SS} - \alpha_m {}^1\delta_{i,m}^{SS} \right) + \frac{K(1-\nu)}{2a^2} {}^1r_{i,m}^{SS} \left( \alpha_m + {}^1\gamma_{i,m}^{SS} \right)$$

$${}^2N_{x\varphi i,m}^{SS} = \frac{D_1(1-\nu)}{2a} \left( {}^2\delta_{i,m}^{SS} {}^2r_{i,m}^{SS} - a\beta_m {}^2\gamma_{i,m}^{SS} \right) + \frac{K(1-\nu)}{2a^2} \beta_m \left( {}^2r_{i,m}^{SS} - {}^2\gamma_{i,m}^{SS} \right)$$

$${}^1M_{xi,0}^{SS} = \frac{K}{a^2} a^1r_{i,0}^{SS} \left( {}^1\delta_{i,0}^{SS} - a^1r_{i,0}^{SS} \right) \quad {}^2M_{xi,0}^{SS} = \frac{K}{a^2} \nu {}^2r_{i,0}^{SS} \left( {}^2\delta_{i,0}^{SS} - {}^2r_{i,0}^{SS} \right)$$

$${}^1M_{xi,m}^{SS} = \frac{K}{a^2} \left[ \alpha_m \nu \left( \alpha_m + {}^1\gamma_{i,m}^{SS} \right) + a^1r_{i,m}^{SS} \left( {}^1\delta_{i,m}^{SS} - a^1r_{i,m}^{SS} \right) \right]$$

$${}^2M_{xi,m}^{SS} = \frac{K}{a^2} \left[ \nu {}^2r_{i,m}^{SS} \left( {}^2\delta_{i,m}^{SS} - {}^2r_{i,m}^{SS} \right) + a\beta_m \left( a\beta_m + {}^2\delta_{i,m}^{SS} \right) \right]$$

$${}^1M_{\varphi i,0}^{SS} = -\frac{K}{a^2} \left[ \nu \left( {}^1r_{i,0}^{SS} \right)^2 a^2 - 1 \right] \quad {}^2M_{\varphi i,0}^{SS} = -\frac{K}{a^2} \left[ 1 + \left( {}^2r_{i,0}^{SS} \right)^2 \right]$$

$${}^1M_{\varphi i,m}^{SS} = -\frac{K}{a^2} \left[ \nu \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 a^2 - 1 - \alpha_m^2 \right]$$

$${}^2M_{\varphi i,m}^{SS} = -\frac{K}{a^2} \left[ \left( {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2 + 1 - \nu\beta_m^2 a^2 \right]$$

$${}^1M_{x\varphi i,m}^{SS} = \frac{K(1-\nu)}{a} {}^1r_{i,m}^{SS} \left( \alpha_m + {}^1\gamma_{i,m}^{SS} \right) \quad {}^2M_{x\varphi i,m}^{SS} = \frac{K(1-\nu)}{a} \beta_m \left( {}^2r_{i,m}^{SS} - {}^2\gamma_{i,m}^{SS} \right)$$

$${}^1Q_{xi,0}^{SS} = \frac{K}{a} \left( {}^1r_{i,0}^{SS} \right)^2 \left( {}^1\delta_{i,0}^{SS} - a^1r_{i,0}^{SS} \right)$$

$${}^1Q_{xi,m}^{SS} = \frac{K}{2a^3} \left\{ a\alpha_m {}^1\gamma_{i,m}^{SS} {}^1r_{i,m}^{SS} (1+\nu) + 2a^2 \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \left( {}^1\delta_{i,m}^{SS} - a^1r_{i,m}^{SS} \right) \right. \\ \left. + \alpha_m^2 \left[ {}^1\delta_{i,m}^{SS} (1-\nu) + 2a^1r_{i,m}^{SS} \right] \right\}$$

$${}^2Q_{xi,m}^{SS} = -\frac{K}{2a^3} \left\{ 2a^2\beta_m^2 \left( a\beta_m + {}^2\delta_{i,m}^{SS} \right) + (1+\nu) \left( a\beta_m {}^2\gamma_{i,m}^{SS} {}^2r_{i,m}^{SS} + {}^2\delta_{i,m}^{SS} \right) \right. \\ \left. + \left( {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2 2a\beta_m (2-\nu) \right\}$$

$${}^2Q_{\varphi i,0}^{SS} = -\frac{K}{a^3} {}^2r_{i,0}^{SS} \left[ 1 + \left( {}^2r_{i,0}^{SS} \right)^2 \right]$$

$${}^1Q_{\varphi i,m}^{SS} = \frac{K}{a^3} \left\{ \alpha_m \left( 1 - \alpha_m^2 \right) + a^2 \left( {}^1r_{i,m}^{SS} \right)^2 \left[ \alpha_m + {}^1\gamma_{i,m}^{SS} (1-\nu) \right] \right\}$$

$${}^2Q_{\varphi i,m}^{SS} = \frac{K}{a^3} \left\{ a^2\beta_m^2 \left[ {}^2r_{i,m}^{SS} - {}^2\gamma_{i,m}^{SS} (1-\nu) \right] - {}^2r_{i,m}^{SS} \left[ 1 + \left( {}^2r_{i,m}^{SS} \right)^2 \right] \right\}$$

Треба напоменути да су изрази за силе  $N_{\varphi x}$  и  $M_{\varphi x}$  исти као изрази за силе  $N_{x\varphi}$  и  $M_{x\varphi}$  у једначини (6.28), али се “амплитуде” пресечних сила разликују и једнаке су:

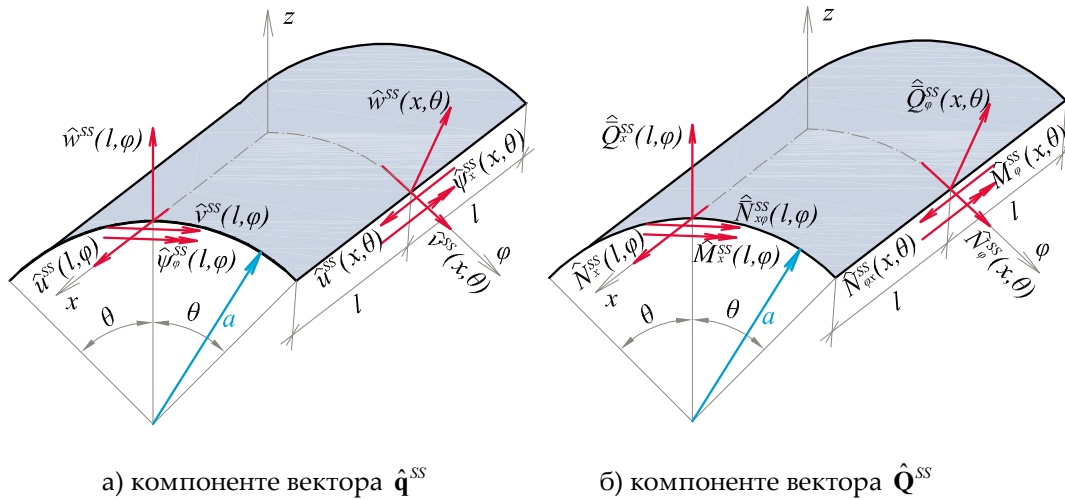
$$\begin{aligned} {}^1N_{\varphi x, m}^{SS} &= \frac{D_1(1-\nu)}{2a} (a^1 \gamma_{i, m}^{SS} r_{i, m}^{SS} - \alpha_m^1 \delta_{i, m}^{SS}) - \frac{K(1-\nu)}{2a^3} \alpha_m ({}^1\delta_{i, m}^{SS} + a^1 r_{i, m}^{SS}) \\ {}^2N_{\varphi x, m}^{SS} &= \frac{D_1(1-\nu)}{2a} ({}^2\delta_{i, m}^{SS} r_{i, m}^{SS} - a\beta_m^2 \gamma_{i, m}^{SS}) + \frac{K(1-\nu)}{2a^3} r_{i, m}^{SS} ({}^2\delta_{i, m}^{SS} - a\beta_m) \\ {}^1M_{\varphi x, m}^{SS} &= \frac{K(1-\nu)}{2a^2} [\alpha_m^1 \delta_{i, m}^{SS} + a^1 r_{i, m}^{SS} (2\alpha_m + {}^1\gamma_{i, m}^{SS})] \\ {}^2M_{\varphi x, m}^{SS} &= -\frac{K(1-\nu)}{2a^2} [{}^2\delta_{i, m}^{SS} r_{i, m}^{SS} + a\beta_m ({}^2\gamma_{i, m}^{SS} - 2{}^2r_{i, m}^{SS})] \end{aligned} \quad (6.47)$$

### 6.1.1.1 Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS}$

Вектори померања  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$ , чије су компоненте (померања и ротације, односно силе на контурама сегмента кружне цилиндричне љуске) приказане на Слици 6.3, дати су следећим изразима:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{q}}^{SS})^T &= [\hat{u}^{SS}(l, \varphi) \quad \hat{v}^{SS}(l, \varphi) \quad \hat{w}^{SS}(l, \varphi) \quad \hat{\psi}_\varphi^{SS}(l, \varphi) \quad \dots \\ &\quad \dots \quad \hat{v}^{SS}(x, \theta) \quad \hat{u}^{SS}(x, \theta) \quad \hat{w}^{SS}(x, \theta) \quad \hat{\psi}_x^{SS}(x, \theta)]_{8 \times 1} \\ \hat{\psi}_\varphi^{SS}(l, \varphi) &= -\left. \frac{\partial \hat{w}^{SS}(x, \varphi)}{\partial x} \right|_{x=l} \quad \hat{\psi}_x^{SS}(x, \theta) = \frac{\hat{v}^{SS}(x, \theta)}{a} - \left. \frac{\partial \hat{w}^{SS}(x, \varphi)}{a \partial \varphi} \right|_{\varphi=\theta} \\ (\hat{\mathbf{Q}}^{SS})^T &= [\hat{N}_x^{SS}(l, \varphi) \quad \hat{N}_{x\varphi}^{SS}(l, \varphi) \quad \hat{Q}_x^{SS}(l, \varphi) \quad \hat{M}_x^{SS}(l, \varphi) \quad \dots \\ &\quad \dots \quad \hat{N}_\varphi^{SS}(x, \theta) \quad \hat{N}_{\varphi x}^{SS}(x, \theta) \quad \hat{Q}_\varphi^{SS}(x, \theta) \quad \hat{M}_\varphi^{SS}(x, \theta)]_{8 \times 1} \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_{x\varphi}^{SS}(l, \varphi) &= \hat{N}_{x\varphi}^{SS}(l, \varphi) + \frac{\hat{M}_{x\varphi}^{SS}(l, \varphi)}{a} \\ \hat{Q}_x^{SS}(l, \varphi) &= \hat{Q}_x^{SS}(l, \varphi) + \left. \frac{1}{a} \frac{\partial \hat{M}_{x\varphi}^{SS}(x, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{x=l} \\ \hat{Q}_\varphi^{SS}(l, \varphi) &= \hat{Q}_\varphi^{SS}(l, \varphi) + \left. \frac{\partial \hat{M}_{\varphi x}^{SS}(x, \varphi)}{\partial x} \right|_{\varphi=\theta} \end{aligned}$$



а) компоненте вектора  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$

б) компоненте вектора  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$

Слика 6.3 - Померања, ротације и силе на контури сегмента кружне цилиндричне љуске  
 Код *Donnell-Mushtari*-еве теорије  $\hat{N}_{\phi x}^{SS}(x, \varphi) = \hat{N}_{x\varphi}^{SS}(x, \varphi)$ ,  $\hat{M}_{\phi x}^{SS}(x, \varphi) = \hat{M}_{x\varphi}^{SS}(x, \varphi)$   
 и израз за обртање пресека у правцу  $x$ -осе је:  $\hat{\psi}_x^{SS}(x, \theta) = -\partial \hat{w}^{SS}(x, \varphi) / a \partial \varphi|_{\varphi=\theta}$ .  
 Компоненте вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$  су функције  $x$ , односно  $\varphi$   
 координате. Све што је речено код извођење динамичке матрице крутости  
*Mindlin*-ове плоче важи и овде, па је компоненте вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}^{SS}$  и  
 сила  $\hat{\mathbf{Q}}^{SS}$  потребно приказати у облику *Fourier*-овог реда:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{SS}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M {}^x U_n^{SS} \cos(\alpha_n \varphi) & \hat{N}_x^{SS}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M N_{xn}^{SS} \cos(\alpha_n \varphi) \\
 \hat{v}^{SS}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x V_n^{SS} \sin(\alpha_n \varphi) & \hat{N}_{x\varphi}^{SS}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M \bar{N}_{x\varphi n}^{SS} \sin(\alpha_n \varphi) \\
 \hat{w}^{SS}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M {}^x W_n^{SS} \cos(\alpha_n \varphi) & \hat{Q}_x^{SS}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M \bar{Q}_{xn}^{SS} \cos(\alpha_n \varphi) \\
 \hat{\psi}_\varphi^{SS}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M \Psi_{\varphi n}^{SS} \cos(\alpha_n \varphi) & \hat{M}_x^{SS}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M M_{xn}^{SS} \cos(\alpha_n \varphi) \\
 \hat{v}^{SS}(x, \theta) &\approx \sum_{n=0}^M {}^\varphi V_n^{SS} \cos(\beta_n x) & \hat{N}_\varphi^{SS}(x, \theta) &\approx \sum_{n=0}^M N_{\varphi n}^{SS} \cos(\beta_n x) \\
 \hat{u}^{SS}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M {}^\varphi U_n^{SS} \sin(\beta_n x) & \hat{N}_{\varphi x}^{SS}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M N_{\varphi x n}^{SS} \sin(\beta_n x) \\
 \hat{w}^{SS}(x, \theta) &\approx \sum_{n=0}^M {}^\varphi W_n^{SS} \cos(\beta_n x) & \hat{Q}_\varphi^{SS}(x, \theta) &\approx \sum_{n=0}^M \bar{Q}_{\varphi n}^{SS} \cos(\beta_n x) \\
 \hat{\psi}_x^{SS}(x, \theta) &\approx \sum_{n=0}^M \Psi_{xn}^{SS} \cos(\beta_n x) & \hat{M}_\varphi^{SS}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M M_{\varphi n}^{SS} \cos(\beta_n x)
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

где је  $\alpha_n = n\pi / \theta$  и  $\beta_n = n\pi / l$ .

Вектори пројекција померања и сила,  $\tilde{\mathbf{q}}^{SS}$  и  $\tilde{\mathbf{Q}}^{SS}$ , садрже *Fourier*-ове коефицијенте из једначине (6.49):

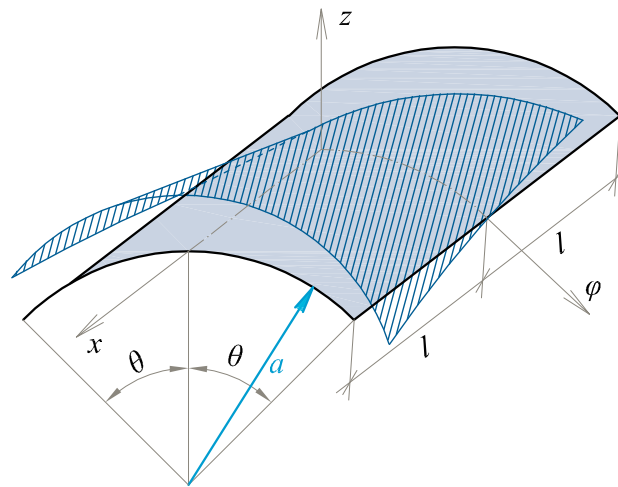
$$\begin{aligned}
 (\tilde{\mathbf{q}}^{SS})^T &= \begin{bmatrix} xU_0^{SS} & xW_0^{SS} & \Psi_{\varphi 0}^{SS} & \varphi V_0^{SS} & \varphi W_0^{SS} & \Psi_{x0}^{SS} & \dots \\ \dots & xU_n^{SS} & xV_n^{SS} & xW_n^{SS} & \Psi_{\varphi n}^{SS} & \varphi V_n^{SS} & \varphi U_n^{SS} & \varphi W_n^{SS} & \Psi_{xn}^{SS} & \dots \\ \dots & xU_M^{SS} & xV_M^{SS} & xW_M^{SS} & \Psi_{\varphi M}^{SS} & \varphi V_M^{SS} & \varphi U_M^{SS} & \varphi W_M^{SS} & \Psi_{xM}^{SS} \end{bmatrix}_{1 \times (8M+6)} \\
 (\tilde{\mathbf{Q}}^{SS})^T &= \begin{bmatrix} N_{x0}^{SS} & \bar{Q}_{x0}^{SS} & M_{x0}^{SS} & N_{\varphi 0}^{SS} & \bar{Q}_{\varphi 0}^{SS} & M_{\varphi 0}^{SS} & \dots \\ \dots & N_{xn}^{SS} & \bar{N}_{x\varphi n}^{SS} & \bar{Q}_{xn}^{SS} & M_{xn}^{SS} & N_{\varphi n}^{SS} & N_{\varphi xn}^{SS} & \bar{Q}_{\varphi n}^{SS} & M_{\varphi n}^{SS} & \dots \\ \dots & N_{xM}^{SS} & \bar{N}_{x\varphi M}^{SS} & \bar{Q}_{xM}^{SS} & M_{xM}^{SS} & N_{\varphi M}^{SS} & N_{\varphi xM}^{SS} & \bar{Q}_{\varphi M}^{SS} & M_{\varphi M}^{SS} \end{bmatrix}_{1 \times (8M+6)}
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

Веза између вектора пројекција померања  $\tilde{\mathbf{q}}^{SS}$ , односно вектора пројекције сила  $\tilde{\mathbf{Q}}^{SS}$ , и вектора интеграционих константи  $\mathbf{C}^{SS}$ , једначина (6.51), је успостављена преко матрица  $\tilde{\mathbf{D}}^{SS}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{SS}$  на основу израза (3.38) и (3.44).

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{C}^{SS})^T &= \begin{bmatrix} {}^1C_{1,0}^{SS} & {}^1C_{2,0}^{SS} & {}^1C_{3,0}^{SS} & {}^2C_{1,0}^{SS} & {}^2C_{2,0}^{SS} & {}^2C_{3,0}^{SS} & \dots \\ \dots & {}^1C_{1,m}^{SS} & {}^1C_{2,m}^{SS} & {}^1C_{3,m}^{SS} & {}^1C_{4,m}^{SS} & {}^2C_{1,m}^{SS} & {}^2C_{2,m}^{SS} & {}^2C_{3,m}^{SS} & {}^2C_{4,m}^{SS} & \dots \\ \dots & {}^1C_{1,M}^{SS} & {}^1C_{2,M}^{SS} & {}^1C_{3,M}^{SS} & {}^1C_{4,M}^{SS} & {}^2C_{1,M}^{SS} & {}^2C_{2,M}^{SS} & {}^2C_{3,M}^{SS} & {}^2C_{4,M}^{SS} \end{bmatrix}_{1 \times (8M+6)}
 \end{aligned} \tag{6.51}$$

Матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{SS}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{SS}$ , чији је ред  $8M+6$ , дате су у Прилогу. Динамичка матрица крутости за *SS* део  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS}$  је такође реда  $8M+6$  и одређује се нумерички на основу једначине (3.46).

### 6.1.2 Симетрија-антисиметрија *SA*



Слика 6.4 – *SA* деформација сегмента кружне цилиндричне љуске

Да би се задовољио услов да је деформисани облик сегмента кружне цилиндричне љуске симетричан осе  $x$ -осе, а антисиметричан око  $\varphi$ -осе, Слика 6.4, компонентална померања се усвајају у следећем облику:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^M \overset{SA1}{^1U_m^{SA}(x) \cos(\alpha_m \varphi)} + \sum_{m=1}^M \overset{SA2}{^2U_m^{SA}(\varphi) \cos(\beta_m^* x)} \\
 \hat{v}^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \overset{SA1}{^1V_m^{SA}(x) \sin(\alpha_m \varphi)} + \sum_{m=1}^M \overset{SA2}{^2V_m^{SA}(\varphi) \sin(\beta_m^* x)} \\
 \hat{w}^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{m=0}^M \overset{SA1}{^1W_m^{SA}(x) \cos(\alpha_m \varphi)} + \sum_{m=1}^M \overset{SA2}{^2W_m^{SA}(\varphi) \sin(\beta_m^* x)}
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

где је:  $\alpha_m = m\pi / \theta$  и  $\beta_m^* = (2m-1)\pi / (2l)$ . Функције  $^1U_m^{SA}(x)$ ,  $^2U_m^{SA}(\varphi)$  и  $^2W_m^{SA}(\varphi)$  треба да буду парне, односно  $^1V_m^{SA}(x)$ ,  $^1W_m^{SA}(x)$  и  $^2V_m^{SA}(\varphi)$  треба да буду непарне функције.

❖ Donnell-Mushtari-ева теорија

Уз смену  $SS \rightarrow SA$ , за  $SA1$  део важе једначине (6.3)-(6.6), (6.9)-(6.13) и (6.15), док за  $SA2$  део важе једначине (6.16),(6.18)-(6.20), као и једначина (6.17) уз следеће измене:

$$\begin{aligned}
 ^2c_{3,m}^{SA} &= -^2c_{3,m}^{SS} & ^2c_{i,m}^{SA} &= ^2c_{i,m}^{SS}, i = 1, 2, 5, \dots, 9 \\
 ^2c_{4,m}^{SA} &= -^2c_{4,m}^{SS} \\
 \beta_m &\rightarrow \beta_m^*
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

$SA2$  део нема нулти члан. Коначни изрази за померања за  $SA$  део су:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 \delta_{i,0}^{SA} \overset{1}{C}_{i,0}^{SA} \cosh(^1r_{i,0}^{SA} x) + \\
 &\sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 \delta_{i,m}^{SA} \overset{1}{C}_{i,m}^{SA} \cosh(^1r_{i,m}^{SA} x) \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \right. \\
 &\left. \left[ \sum_{i=1}^4 \delta_{i,m}^{SA} \overset{2}{C}_{i,m}^{SA} \cosh(^2r_{i,m}^{SA} \varphi) \right] \cos(\beta_m^* x) \right\} \\
 \hat{v}^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 \gamma_{i,m}^{SA} \overset{1}{C}_{i,m}^{SA} \sinh(^1r_{i,m}^{SA} x) \right] \sin(\alpha_m \varphi) + \right. \\
 &\left. \left[ \sum_{i=1}^4 \gamma_{i,m}^{SA} \overset{2}{C}_{i,m}^{SA} \sinh(^2r_{i,m}^{SA} \varphi) \right] \sin(\beta_m^* x) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.54}$$



$$\hat{w}^{SA}(x, \varphi) = \sum_{i=1}^3 {}^1C_{i,0}^{SA} \sinh({}^1r_{i,0}^{SA} x) + \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1C_{i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} x) \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \\ & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2C_{i,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} \varphi) \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\}$$

Заменом израза (6.54) у једначину (4.38) и (4.40) добијају се изрази за пресечне силе за случај  $SA$ :

$$\begin{aligned} \hat{N}_x^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^1N_{xi,0}^{SA} \sinh({}^1r_{i,0}^{SA} x) {}^1C_{i,0}^{SA} + \\ & \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1N_{xi,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} x) {}^1C_{i,m}^{SA} \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \\ & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2N_{xi,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SA} \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\ \hat{N}_\varphi^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^1N_{\phi i,0}^{SA} \sinh({}^1r_{i,0}^{SA} x) {}^1C_{i,0}^{SA} + \\ & \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1N_{\phi i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} x) {}^1C_{i,m}^{SA} \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \\ & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2N_{\phi i,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SA} \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\ \hat{N}_{x\varphi}^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1N_{x\phi i,m}^{SA} \cosh({}^1r_{i,m}^{SA} x) {}^1C_{i,m}^{SA} \right] \sin(\alpha_m \varphi) + \\ & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2N_{x\phi i,m}^{SA} \sinh({}^2r_{i,m}^{SA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SA} \right] \cos(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\ \hat{Q}_x^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^1Q_{xi,0}^{SA} \cosh({}^1r_{i,0}^{SA} x) {}^1C_{i,0}^{SA} + \\ & \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1Q_{xi,m}^{SA} \cosh({}^1r_{i,m}^{SA} x) {}^1C_{i,m}^{SA} \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \\ & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2Q_{xi,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SA} \right] \cos(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\ \hat{Q}_\varphi^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1Q_{\phi i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} x) {}^1C_{i,m}^{SA} \right] \sin(\alpha_m \varphi) + \\ & \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2Q_{\phi i,m}^{SA} \sinh({}^2r_{i,m}^{SA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SA} \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_x^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^1M_{xi,0}^{SA} \sinh({}^1r_{i,0}^{SA} x) {}^1C_{i,0}^{SA} + \\ &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1M_{xi,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} x) {}^1C_{i,m}^{SA} \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \right. \\ &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2M_{xi,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SA} \right] \sin(\beta_m^* x) \right\} \\ \hat{M}_\varphi^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{i=1}^3 {}^1M_{\varphi i,0}^{SA} \sinh({}^1r_{i,0}^{SA} x) {}^1C_{i,0}^{SA} + \\ &\quad \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1M_{\varphi i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{SA} x) {}^1C_{i,m}^{SA} \right] \cos(\alpha_m \varphi) + \right. \\ &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2M_{\varphi i,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{SA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SA} \right] \sin(\beta_m^* x) \right\} \\ \hat{M}_{x\varphi}^{SA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1M_{x\varphi i,m}^{SA} \cosh({}^1r_{i,m}^{SA} x) {}^1C_{i,m}^{SA} \right] \sin(\alpha_m \varphi) + \right. \\ &\quad \left. \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2M_{x\varphi i,m}^{SA} \sinh({}^2r_{i,m}^{SA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{SA} \right] \cos(\beta_m^* x) \right\} \end{aligned}$$

при чему за “амплитуде” пресечних сила важе изрази (6.29) уз следеће смене:  $SS \rightarrow SA$ ,  $\beta_m \rightarrow -\beta_m^*$  и  $\beta_m^2 \rightarrow (\beta_m^*)^2$ .

#### ❖ Flügge-ова теорија

У Flügge-овој теорији, уз смену  $SS \rightarrow SA$ , важе следећи једначине:

- за  $SA1$  део важе једначине (6.30)-(6.37),
- за  $SA2$  део важе једначине (6.38), (6.40) и (6.41), док изрази за коефицијенте у (6.38) могу да се добију из једначине (6.39) на основу следећих релација:

$$\begin{aligned} {}^2c_{3,m}^{SA} &= -{}^2c_{3,m}^{SS} & {}^2c_{5,m}^{SA} &= -{}^2c_{5,m}^{SS} \\ {}^2c_{4,m}^{SA} &= -{}^2c_{4,m}^{SS} & {}^2c_{i,m}^{SA} &= {}^2c_{i,m}^{SS}, \quad i=1,2,6,\dots,11 \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\beta_m \rightarrow \beta_m^*$$

- “амплитуде” пресечних сила су дефинисане једначинама (6.46) и (6.47) уз смену  $\beta_m \rightarrow -\beta_m^*$  и  $\beta_m^2 \rightarrow (\beta_m^*)^2$ , при чему су изрази за силе  $N_{\varphi x}$  и  $M_{\varphi x}$  исти као и изрази за силе  $N_{x\varphi}$  и  $M_{x\varphi}$  у једначини (6.55).

Изрази за померања и пресечне силе су исти као и у случају *Donnell-Mushtari*-еве теорије и дати су једначинама (6.45) и (6.55).

### 6.1.2.1 Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SA}$

Компоненте вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}^{SA}$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}^{SA}$ , које су дефинисане изразима (6.48) уз замену  $SS \rightarrow SA$ , апроксимирају се *Fourier*-ов редом на следећи начин:

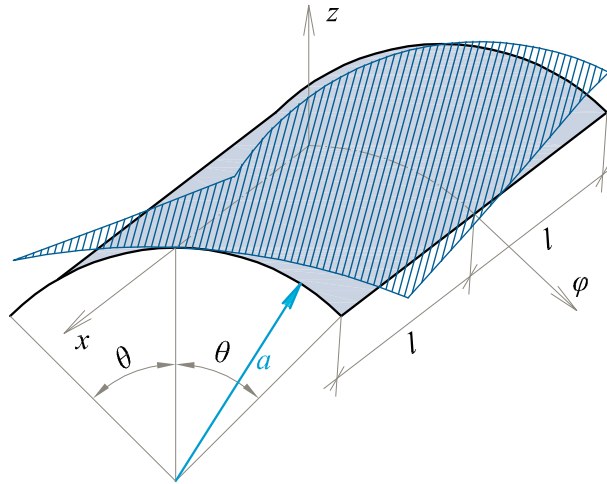
$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{SA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M xU_n^{SA} \cos(\alpha_n \varphi) & \hat{N}_x^{SA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M N_{xn}^{SA} \cos(\alpha_n \varphi) \\
 \hat{v}^{SA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M xV_n^{SA} \sin(\alpha_n \varphi) & \hat{N}_{x\varphi}^{SA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M \bar{N}_{x\varphi n}^{SA} \sin(\alpha_n \varphi) \\
 \hat{w}^{SA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M xW_n^{SA} \cos(\alpha_n \varphi) & \hat{Q}_x^{SA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M \bar{Q}_{xn}^{SA} \cos(\alpha_n \varphi) \\
 \hat{\psi}_\varphi^{SA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M \Psi_{\varphi n}^{SA} \cos(\alpha_n \varphi) & \hat{M}_x^{SA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=0}^M M_{xn}^{SA} \cos(\alpha_n \varphi) \\
 \hat{v}^{SA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M \varphi V_n^{SA} \sin(\beta_n^* x) & \hat{N}_\varphi^{SA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M N_{\varphi n}^{SA} \sin(\beta_n^* x) \\
 \hat{u}^{SA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M \varphi U_n^{SA} \cos(\beta_n^* x) & \hat{N}_{\varphi x}^{SA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M N_{\varphi xn}^{SA} \cos(\beta_n^* x) \\
 \hat{w}^{SA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M \varphi W_n^{SA} \sin(\beta_n^* x) & \hat{Q}_\varphi^{SA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M \bar{Q}_{\varphi n}^{SA} \sin(\beta_n^* x) \\
 \hat{\psi}_x^{SA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M \Psi_{xn}^{SA} \sin(\beta_n^* x) & \hat{M}_\varphi^{SA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M M_{\varphi n}^{SA} \sin(\beta_n^* x)
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

где је  $\alpha_n = n\pi / \theta$  и  $\beta_n^* = (2n-1)\pi / (2l)$ . Вектори  $\tilde{\mathbf{q}}^{SA}$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}^{SA}$  и  $\mathbf{C}^{SA}$  су једнаки:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\mathbf{q}}^{SA})^T &= \begin{bmatrix} xU_0^{SA} & xW_0^{SA} & \Psi_{\varphi 0}^{SA} & \dots \\ \dots & xU_n^{SA} & xV_n^{SA} & xW_n^{SA} & \Psi_{\varphi n}^{SA} & \varphi V_n^{SA} & \varphi U_n^{SA} & \varphi W_n^{SA} & \Psi_{xn}^{SA} & \dots \\ \dots & xU_M^{SA} & xV_M^{SA} & xW_M^{SA} & \Psi_{\varphi M}^{SA} & \varphi V_M^{SA} & \varphi U_M^{SA} & \varphi W_M^{SA} & \Psi_{xM}^{SA} \end{bmatrix}_{1 \times (8M+3)} \\
 (\tilde{\mathbf{Q}}^{SA})^T &= \begin{bmatrix} N_{x0}^{SA} & \bar{Q}_{x0}^{SA} & M_{x0}^{SA} & \dots \\ \dots & N_{xn}^{SA} & \bar{N}_{x\varphi n}^{SA} & \bar{Q}_{xn}^{SA} & M_{xn}^{SA} & N_{\varphi n}^{SA} & N_{\varphi xn}^{SA} & \bar{Q}_{\varphi n}^{SA} & M_{\varphi n}^{SA} & \dots \\ \dots & N_{xM}^{SA} & \bar{N}_{x\varphi M}^{SA} & \bar{Q}_{xM}^{SA} & M_{xM}^{SA} & N_{\varphi M}^{SA} & N_{\varphi xM}^{SA} & \bar{Q}_{\varphi M}^{SA} & M_{\varphi M}^{SA} \end{bmatrix}_{1 \times (8M+3)} \\
 (\mathbf{C}^{SA})^T &= \begin{bmatrix} {}^1C_{1,0}^{SA} & {}^1C_{2,0}^{SA} & {}^1C_{3,0}^{SA} & \dots \\ \dots & {}^1C_{1,m}^{SA} & {}^1C_{2,m}^{SA} & {}^1C_{3,m}^{SA} & {}^1C_{4,m}^{SA} & {}^2C_{1,m}^{SA} & {}^2C_{2,m}^{SA} & {}^2C_{3,m}^{SA} & {}^2C_{4,m}^{SA} & \dots \\ \dots & {}^1C_{1,M}^{SA} & {}^1C_{2,M}^{SA} & {}^1C_{3,M}^{SA} & {}^1C_{4,M}^{SA} & {}^2C_{1,M}^{SA} & {}^2C_{2,M}^{SA} & {}^2C_{3,M}^{SA} & {}^2C_{4,M}^{SA} \end{bmatrix}_{1 \times (8M+3)}
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{SA}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{SA}$ , чији је ред  $8M+3$ , дате су у Прилогу.

### 6.1.3 Двострука антисиметрија AA



Слика 6.5 – AA деформација сегмента кружне цилиндричне љуске

Да би се задовољио услов да је деформисани облик антисиметричан и око  $x$  и око  $\varphi$ -осе, Слика 6.5, компонентална померања се усвајају у следећем облику:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \overset{AA1}{^1U_m^{AA}(x) \sin(\alpha_m^* \varphi)} + \sum_{m=1}^M \overset{AA2}{^2U_m^{AA}(\varphi) \cos(\beta_m^* x)} \\
 \hat{v}^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \overset{AA1}{^1V_m^{AA}(x) \cos(\alpha_m^* \varphi)} + \sum_{m=1}^M \overset{AA2}{^2V_m^{AA}(\varphi) \sin(\beta_m^* x)} \\
 \hat{w}^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \overset{AA1}{^1W_m^{AA}(x) \sin(\alpha_m^* \varphi)} + \sum_{m=1}^M \overset{AA2}{^2W_m^{AA}(\varphi) \sin(\beta_m^* x)}
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

где је  $\alpha_m^* = (2m-1)\pi/(2\theta)$  и  $\beta_m^* = (2m-1)\pi/(2l)$ .  $^1U_m^{AA}(x)$  и  $^2V_m^{AA}(\varphi)$  треба да буду парне, односно  $^1V_m^{AA}(x)$ ,  $^1W_m^{AA}(x)$ ,  $^2U_m^{AA}(\varphi)$  и  $^2W_m^{AA}(\varphi)$  треба да буду непарне функције.

#### ❖ Donnell-Mushtari-еве теорија

Уз смену  $SS \rightarrow AA$ , за AA1 део важе једначине (6.3), (6.4) уз коришћење релација (6.60), (6.5), (6.6) и (6.9), док за AA2 део важе једначине (6.16), (6.17) уз коришћење једначине (6.61), и једначине (6.18)-(6.20).

$$\begin{aligned}
 ^1c_{3,m}^{AA} &= -^1c_{3,m}^{SS} & ^1c_{i,m}^{AA} &= ^1c_{i,m}^{SS}, i = 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 \\
 ^1c_{7,m}^{AA} &= -^1c_{7,m}^{SS}
 \end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_m &\rightarrow \alpha_m^* \\
 ^2c_{3,m}^{AA} &= -^2c_{3,m}^{SS} & ^2c_{i,m}^{AA} &= ^2c_{i,m}^{SS}, i = 1, 2, 5, \dots, 9 \\
 ^2c_{4,m}^{AA} &= -^2c_{4,m}^{SS}
 \end{aligned} \tag{6.61}$$

$$\beta_m \rightarrow \beta_m^*$$

Део  $AA$  нема нулти члан. Коначни изрази за померања за  $AA$  део су:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1\delta_{i,m} {}^1C_{i,m}^{AA} \cosh({}^1r_{i,m}^{AA} x) \right] \sin(\alpha_m^* \varphi) + \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2\delta_{i,m} {}^2C_{i,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) \right] \cos(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{v}^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1\gamma_{i,m} {}^1C_{i,m}^{SA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} x) \right] \cos(\alpha_m^* \varphi) + \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2\gamma_{i,m} {}^2C_{i,m}^{SA} \cosh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{w}^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1C_{i,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} x) \right] \sin(\alpha_m^* \varphi) + \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2C_{i,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.62}$$

Заменом израза (6.62) у једначине (4.38) и (4.40) добијају се изрази за пресечне силе за  $AA$  део:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_x^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1N_{xi,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} x) {}^1C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\alpha_m^* \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2N_{xi,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{N}_\varphi^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1N_{\varphi i,m}^{SS} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} x) {}^1C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\alpha_m^* \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2N_{\varphi i,m}^{SS} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{N}_{x\varphi}^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1N_{x\varphi i,m}^{AA} \cosh({}^1r_{i,m}^{AA} x) {}^1C_{i,m}^{AA} \right] \cos(\alpha_m^* \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2N_{x\varphi i,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{Q}_x^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1Q_{xi,m}^{AA} \cosh({}^1r_{i,m}^{AA} x) {}^1C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\alpha_m^* \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2Q_{xi,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{AA} \right] \cos(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\} \\
 \hat{Q}_\varphi^{AA}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{aligned} &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^1Q_{\varphi i,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} x) {}^1C_{i,m}^{AA} \right] \cos(\alpha_m^* \varphi) \\ &\left[ \sum_{i=1}^4 {}^2Q_{\varphi i,m}^{AA} \cosh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\beta_m^* x) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.63}$$

$$\hat{M}_x^{AA}(x, \varphi) = \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{array}{l} \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1M_{xi,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} x) {}^1C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\alpha_m^* \varphi) \\ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2M_{xi,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\beta_m^* x) \end{array} \right\}$$

$$\hat{M}_\varphi^{AA}(x, \varphi) = \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{array}{l} \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1M_{\varphi i,m}^{AA} \sinh({}^1r_{i,m}^{AA} x) {}^1C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\alpha_m^* \varphi) \\ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2M_{\varphi i,m}^{AA} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{AA} \right] \sin(\beta_m^* x) \end{array} \right\}$$

$$\hat{M}_{x\varphi}^{AA}(x, \varphi) = \sum_{m=1}^M \left\{ \begin{array}{l} \left[ \sum_{i=1}^4 {}^1M_{x\varphi i,m}^{AA} \cosh({}^1r_{i,m}^{AA} x) {}^1C_{i,m}^{AA} \right] \cos(\alpha_m^* \varphi) \\ \left[ \sum_{i=1}^4 {}^2M_{x\varphi i,m}^{AA} \cosh({}^2r_{i,m}^{AA} \varphi) {}^2C_{i,m}^{AA} \right] \cos(\beta_m^* x) \end{array} \right\}$$

Изрази за “амплитуде” пресечних сила су дати једначином (6.29) уз следеће смене:  $SS \rightarrow AA$ ,  $\alpha_m \rightarrow -\alpha_m^*$ ,  $\alpha_m^2 \rightarrow (\alpha_m^*)^2$ ,  $\beta_m \rightarrow -\beta_m^*$  и  $\beta_m^2 \rightarrow (\beta_m^*)^2$ .

#### ❖ Flügge-ова теорија

Изрази за компонентална померања и пресечне силе за  $AA$  део су исти као у случају *Donnell-Mushtari*-еве теорије и дати су једначинама (6.62) и (6.63), док остале једначине које важе у *Flügge*-овој теорији, уз смену  $SS \rightarrow AA$ , су:

- за  $AA1$  део једначине (6.30), једначина (6.31) уз релације дате у једначини (6.64) и једначине (6.32) и (6.33),

$$\begin{aligned} {}^1c_{3,m}^{AA} &= -{}^1c_{3,m}^{SS} & {}^1c_{9,m}^{AA} &= -{}^1c_{9,m}^{SS} \\ {}^1c_{8,m}^{AA} &= -{}^1c_{8,m}^{SS} & {}^1c_{i,m}^{AA} &= {}^1c_{i,m}^{SS}, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12 \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\alpha_m \rightarrow \alpha_m^*$$

- за  $AA2$  део једначине (6.38), (6.40) и (6.41) и једначина (6.39) уз следеће релације:

$$\begin{aligned} {}^2c_{3,m}^{AA} &= -{}^2c_{3,m}^{SS} & {}^2c_{5,m}^{AA} &= -{}^2c_{5,m}^{SS} \\ {}^2c_{4,m}^{AA} &= -{}^2c_{4,m}^{SS} & {}^2c_{i,m}^{AA} &= {}^2c_{i,m}^{SS}, \quad i = 1, 2, 6, \dots, 11 \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\beta_m \rightarrow \beta_m^*$$

- једначине (6.46) и (6.47) које уз смене  $\alpha_m \rightarrow -\alpha_m^*$ ,  $\alpha_m^2 \rightarrow (\alpha_m^*)^2$ ,  $\beta_m \rightarrow -\beta_m^*$  и  $\beta_m^2 \rightarrow (\beta_m^*)^2$  дефинишу “амплитуде” пресечних сила. Изрази за силе  $N_{\varphi x}$  и  $M_{\varphi x}$  су исти као и изрази за силе  $N_{x\varphi}$  и  $M_{x\varphi}$  у једначини (6.63).

### 6.1.3.1 Динамичка матрица крутости $\tilde{\mathbf{K}}_D^{AA}$

Компоненте вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}^{AA}$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}^{AA}$ , које су дефинисане изразима (6.48) уз замену  $SS \rightarrow AA$ , апроксимирају се *Fourier*-овим редом на следећи начин:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{AA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x U_n^{AA} \sin(\alpha_n^* \varphi) & \hat{N}_x^{AA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M N_{xn}^{AA} \sin(\alpha_n^* \varphi) \\
 \hat{v}^{AA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x V_n^{AA} \cos(\alpha_n^* \varphi) & \hat{N}_{x\varphi}^{AA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M \bar{N}_{x\varphi n}^{AA} \cos(\alpha_n^* \varphi) \\
 \hat{w}^{AA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M {}^x W_n^{AA} \sin(\alpha_n^* \varphi) & \hat{Q}_x^{AA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M \bar{Q}_{xn}^{AA} \sin(\alpha_n^* \varphi) \\
 \hat{\psi}_\varphi^{AA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M \Psi_{\varphi n}^{AA} \sin(\alpha_n^* \varphi) & \hat{M}_x^{AA}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M M_{xn}^{AA} \sin(\alpha_n^* \varphi) \\
 \hat{v}^{AA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M {}^\varphi V_n^{AA} \sin(\beta_n^* x) & \hat{N}_\varphi^{AA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M N_{\varphi n}^{AA} \sin(\beta_n^* x) \\
 \hat{u}^{AA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M {}^\varphi U_n^{AA} \cos(\beta_n^* x) & \hat{N}_{\varphi x}^{AA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M N_{\varphi xn}^{AA} \cos(\beta_n^* x) \\
 \hat{w}^{AA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M {}^\varphi W_n^{AA} \sin(\beta_n^* x) & \hat{Q}_\varphi^{AA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M \bar{Q}_{\varphi n}^{AA} \sin(\beta_n^* x) \\
 \hat{\psi}_x^{AA}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M \Psi_{xn}^{AA} \sin(\beta_n^* x) & \hat{M}_\varphi^{AA}(x, b) &\approx \sum_{n=1}^M M_{\varphi n}^{AA} \sin(\beta_n^* x)
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

где је  $\alpha_n^* = (2n-1)\pi / (2\theta)$  и  $\beta_n^* = (2n-1)\pi / (2l)$ .

Вектори  $\tilde{\mathbf{q}}^{AA}$ ,  $\tilde{\mathbf{Q}}^{AA}$  и  $\mathbf{C}^{AA}$  су једнаки:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\mathbf{q}}^{AA})^T &= \left[ \begin{array}{cccccccc}
 {}^x U_1^{AA} & {}^x V_1^{AA} & {}^x W_1^{AA} & \Psi_{\varphi 1}^{AA} & {}^\varphi V_1^{AA} & {}^\varphi U_1^{AA} & {}^\varphi W_1^{AA} & \Psi_{x1}^{AA} & \dots \\
 \dots & {}^x U_M^{AA} & {}^x V_M^{AA} & {}^x W_M^{AA} & \Psi_{\varphi M}^{AA} & {}^\varphi V_M^{AA} & {}^\varphi U_M^{AA} & {}^\varphi W_M^{AA} & \Psi_{xM}^{AA}
 \end{array} \right]_{1 \times 8M} \\
 (\tilde{\mathbf{Q}}^{AA})^T &= \left[ \begin{array}{cccccccc}
 N_{x1}^{AA} & \bar{N}_{x\varphi 1}^{AA} & \bar{Q}_{x1}^{AA} & M_{x1}^{AA} & N_{\varphi 1}^{AA} & N_{\varphi x 1}^{AA} & \bar{Q}_{\varphi 1}^{AA} & M_{\varphi 1}^{AA} & \dots \\
 \dots & N_{xM}^{AA} & \bar{N}_{x\varphi M}^{AA} & \bar{Q}_{xM}^{AA} & M_{xM}^{AA} & N_{\varphi M}^{AA} & N_{\varphi x M}^{AA} & \bar{Q}_{\varphi M}^{AA} & M_{\varphi M}^{AA}
 \end{array} \right]_{1 \times 8M} \\
 (\mathbf{C}^{AA})^T &= \left[ \begin{array}{cccccccc}
 {}^1 C_{1,1}^{AA} & {}^1 C_{2,1}^{AA} & {}^1 C_{3,1}^{AA} & {}^1 C_{4,1}^{AA} & {}^2 C_{1,1}^{AA} & {}^2 C_{2,1}^{AA} & {}^2 C_{3,1}^{AA} & {}^2 C_{4,1}^{AA} & \dots \\
 \dots & {}^1 C_{1,M}^A & {}^1 C_{2,M}^A & {}^1 C_{3,M}^A & {}^1 C_{4,M}^A & {}^2 C_{1,M}^A & {}^2 C_{2,M}^A & {}^2 C_{3,M}^A & {}^2 C_{4,M}^A
 \end{array} \right]_{1 \times 8M}
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

Матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{AA}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{AA}$ , чији је ред  $8M$ , дате су у Прилогу.

### 6.1.4 Динамичка матрица крутости сегмента кружне цилиндричне љуске $\tilde{\mathbf{K}}_D$

Када су одређене динамичке матрице крутости свих симетричних доприноса ( $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SS}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{SA}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{AS}$  и  $\tilde{\mathbf{K}}_D^{AA}$ ) може да се одреди динамичка матрица крутости за произвољан деформисани облик. Померања и ротације контура сегмента кружне цилиндричне љуске се апроксимирају *Fourier*-овим редом који садржи и парне и непарне чланове:

$$\begin{aligned}
\hat{w}(l, \varphi) &\approx {}^1W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^1W_n^S \cos \frac{n\pi\varphi}{\theta} + \sum_{n=1}^M {}^1W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} \\
\hat{w}(x, \theta) &\approx {}^2W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^2W_n^S \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^M {}^2W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \\
\hat{w}(-l, \varphi) &\approx {}^3W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^3W_n^S \cos \frac{n\pi\varphi}{\theta} + \sum_{n=1}^M {}^3W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} \\
\hat{w}(x, -\theta) &\approx {}^4W_0^S + \sum_{n=1}^M {}^4W_n^S \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^M {}^4W_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \\
\hat{u}(l, \varphi) &\approx {}^1U_0^S + \sum_{n=1}^M {}^1U_n^S \cos \frac{n\pi\varphi}{\theta} + \sum_{n=1}^M {}^1U_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} \\
\hat{u}(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M {}^2U_n^S \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} + \sum_{n=1}^M {}^2U_n^A \sin \frac{n\pi x}{l} \\
\hat{u}(-l, \varphi) &\approx {}^3U_0^S + \sum_{n=1}^M {}^3U_n^S \cos \frac{n\pi\varphi}{\theta} + \sum_{n=1}^M {}^3U_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} \\
\hat{u}(x, -\theta) &\approx \sum_{n=1}^M {}^4U_n^S \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} + \sum_{n=1}^M {}^4U_n^A \sin \frac{n\pi x}{l} \\
\hat{v}(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M {}^1V_n^S \cos \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} + \sum_{n=1}^M {}^1V_n^A \sin \frac{n\pi\varphi}{\theta} \\
\hat{v}(x, \theta) &\approx {}^2V_0^S + \sum_{n=1}^M {}^2V_n^S \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^M {}^2V_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \\
\hat{v}(-l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M {}^3V_n^S \cos \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} + \sum_{n=1}^M {}^3V_n^A \sin \frac{n\pi\varphi}{\theta} \\
\hat{v}(x, -\theta) &\approx {}^4V_0^S + \sum_{n=1}^M {}^4V_n^S \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^M {}^4V_n^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}
\end{aligned} \tag{6.68}$$



$$\begin{aligned}
 \hat{\psi}_\varphi(l, \varphi) &\approx {}^1\Psi_{\varphi 0}^S + \sum_{n=1}^M {}^1\Psi_{\varphi n}^S \cos \frac{n\pi\varphi}{\theta} + \sum_{n=1}^M {}^1\Psi_{\varphi n}^A \sin \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} \\
 \hat{\psi}_\varphi(x, \theta) &\approx \sum_{n=1}^M {}^2\Psi_{\varphi n}^S \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} + \sum_{n=1}^M {}^2\Psi_{\varphi n}^A \sin \frac{n\pi x}{l} \\
 \hat{\psi}_\varphi(-l, \varphi) &\approx {}^3\Psi_{\varphi 0}^S + \sum_{n=1}^M {}^3\Psi_{\varphi n}^S \cos \frac{n\pi\varphi}{\theta} + \sum_{n=1}^M {}^3\Psi_{\varphi n}^A \sin \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} \\
 \hat{\psi}_\varphi(x, -\theta) &\approx \sum_{n=1}^M {}^4\Psi_{\varphi n}^S \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} + \sum_{n=1}^M {}^4\Psi_{\varphi n}^A \sin \frac{n\pi x}{l} \\
 \hat{\psi}_x(l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M {}^1\Psi_{xn}^S \cos \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} + \sum_{n=1}^M {}^1\Psi_{xn}^A \sin \frac{n\pi\varphi}{\theta} \\
 \hat{\psi}_x(x, \theta) &\approx {}^2\Psi_{x0}^S + \sum_{n=1}^M {}^2\Psi_{xn}^S \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^M {}^2\Psi_{xn}^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \\
 \hat{\psi}_x(-l, \varphi) &\approx \sum_{n=1}^M {}^3\Psi_{xn}^S \cos \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} + \sum_{n=1}^M {}^3\Psi_{xn}^A \sin \frac{n\pi\varphi}{\theta} \\
 \hat{\psi}_x(x, -\theta) &\approx {}^4\Psi_{x0}^S + \sum_{n=1}^M {}^4\Psi_{xn}^S \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^M {}^4\Psi_{xn}^A \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}
 \end{aligned}$$

Горњи леви индекс у (6.68) се односи на број контуре према Слици 6.9. Да би се одредила динамичка матрица крутости за сегмент кружне цилиндричне љуске  $\tilde{\mathbf{K}}_D$ , треба да се одреди матрица трансформације  $\mathbf{T}$ , као што је то објашњено у поглављу 3.1.4, и примени израз (3.88). Матрица  $\tilde{\mathbf{K}}_0$  се одређује на основу израза (3.86) и њен ред је  $32M+12$ . Вектор  $\tilde{\mathbf{q}}$ , једначина (3.63), има  $32M+12$  компоненти које су дате следећим изразима:

$$\tilde{\mathbf{q}}_0^T = \begin{bmatrix} {}^1U_0^S & {}^1W_0^S & {}^1\Psi_{\varphi 0}^S & {}^2V_0^S & {}^2W_0^S & {}^2\Psi_{x0}^S & \dots \\ \dots & {}^3U_0^S & {}^3W_0^S & {}^3\Psi_{\varphi 0}^S & {}^4V_0^S & {}^4W_0^S & {}^4\Psi_{x0}^S \end{bmatrix}_{1 \times 12} \quad (6.69)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_n^T = \begin{bmatrix} {}^1U_n^S & {}^1U_n^A & {}^1V_n^S & {}^1V_n^A & {}^1W_n^S & {}^1W_n^A & {}^1\Phi_{\varphi n}^S & {}^1\Phi_{\varphi n}^A & \dots \\ \dots & {}^4V_n^S & {}^4V_n^A & {}^4U_n^S & {}^4U_n^A & {}^4W_n^S & {}^4W_n^A & {}^4\Phi_{xn}^S & {}^4\Phi_{xn}^A \end{bmatrix}_{1 \times 32} \quad (6.70)$$

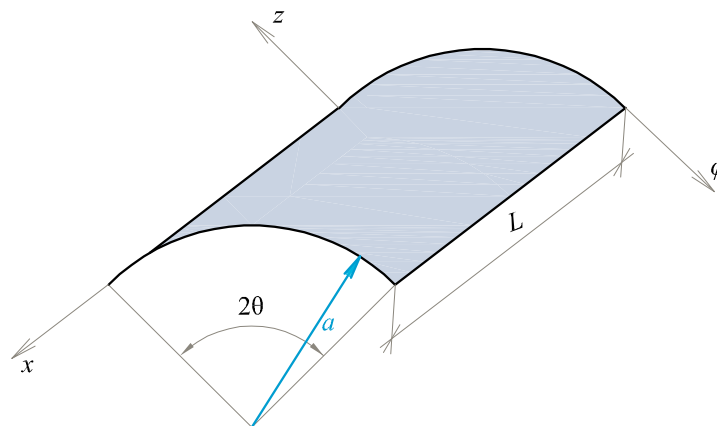
За везу између вектора  $\tilde{\mathbf{q}}^{SS}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}^{SA}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}^{AS}$ ,  $\tilde{\mathbf{q}}^{AA}$  и вектора  $\tilde{\mathbf{q}}$  важе једначине (3.80) и (3.81). Матрице  $\mathbf{T}^{SS}$ ,  $\mathbf{T}^{SA}$ ,  $\mathbf{T}^{AS}$  и  $\mathbf{T}^{AA}$ , чији је величина  $(8M+6) \times (32M+12)$ ,  $(8M+3) \times (32M+12)$ ,  $(8M+3) \times (32M+12)$  и  $8M \times (32M+12)$ , дате су у Прилогу. Од ових матрица се формира матрица  $\mathbf{T}$  на основу једначине (3.83), чији је ред  $32M+12$ .

### 6.1.5 Динамичка матрица крутости сегмента кружне цилиндричне љуске са специјалним граничним условима $K_{Dm}$

У претходном поглављу је изведена динамичка матрица крутости сегмента кружне цилиндричне љуске  $\tilde{K}_D$ , која може да се користи у динамичкој анализи сегмената и система сегмената кружних цилиндричних љуски за произвољне граничне услове. Резултати добијени применом ове ДМК зависе од броја чланова реда  $M$  у решењу. Насупрот томе, решење проблема слободних вибрација сегмента кружне цилиндричне љуске са специјалним граничним условима може да се одреди у затвореном облику. Динамичка матрица крутости изведена на основу овог решења је тачна и њен ред је знатно нижи него ред матрице  $\tilde{K}_D$  потребан да би се добили резултати задовољавајуће тачности. Мана ових матрица је што је лимитиран број граничних услова код којих оне могу да се примене.

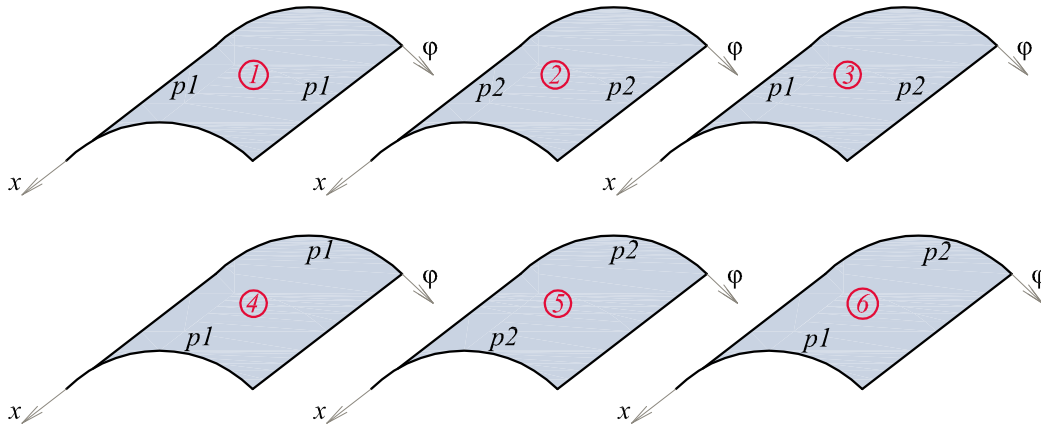
На Слици 6.6 је приказан сегмент кружне цилиндричне љуске и координатни систем у коме су дефинисани специјални гранични услови, означени са  $p1$  и  $p2$  (Yu, Cleghorn and Fenton 1995):

<u><math>p1</math> гранични услов</u>		<u><math>p2</math> гранични услов</u>	
$x = 0, L$	$\varphi = 0, 2\theta$	$x = 0, L$	$\varphi = 0, 2\theta$
$u = 0$	$v = 0$	$u \neq 0$	$v \neq 0$
$v \neq 0$	$u \neq 0$	$v = 0$	$u = 0$
$w \neq 0$	$w \neq 0$	$w = 0$	$w = 0$
$\psi_\varphi = 0$	$\psi_x = 0$	$\psi_\varphi \neq 0$	$\psi_x \neq 0$



Слика 6.6 – Координатни систем за сегмент кружне цилиндричне љуске са специјалним граничним условима  $p1$  и  $p2$

Гранични услов  $p2$  се у литератури назива *SD-shear diaphragm*. На Слици 6.7 је приказано шест могућих комбинација  $p1$  и  $p2$  граничних услова за које постоје тачна аналитичка решења, при чему гранични услови на друге две контуре могу да буду произвољни. Анализиран је случај  $m \geq 1$ .



Слика 6.7 – Шест могућих комбинација  $p1$  и  $p2$  граничних услова сегмента кружне цилиндричне љуске за које постоји решење у затвореном облику

❖ комб 1, комб 2 и комб 3 граничних услова

За ове три комбинације граничних услова усвајају се решења у облику који *a priori* задовољава граничне услове на контурама  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\theta$ .

❖ комб 1 и комб 3

Компонентална померања су усвојена у следећем облику:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M U_m(x) \cos(\alpha_m \varphi) \\ \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M V_m(x) \sin(\alpha_m \varphi) \\ \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M W_m(x) \cos(\alpha_m \varphi) \end{aligned} \quad (6.71)$$

где је  $\alpha_m = m\pi / (2\theta)$  у случају комб 1, односно  $\alpha_m = (2m - 1)\pi / (2\theta)$  у случају комб 3. Може да се примети да је решење за непозната компонентална померања, једначина (6.71), у истом облику као и решење за *SS1* део, једначина (6.2). Корени карактеристичне једначине и коефицијенти  $\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$  одређују на основу израза приказаних у приказаних у поглављу 6.1.1, док су коначни изрази за померања:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \delta_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m} x} \right) \cos(\alpha_m \varphi) \\
 \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \gamma_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m} x} \right) \sin(\alpha_m \varphi) \\
 \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} e^{r_{i,m} x} \right) \cos(\alpha_m \varphi)
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

❖ комб 2

За случај граничних услова дефинисаних за комб 2, компонентална померања се усвајају у следећем облику:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M U_m(x) \sin(\alpha_m \varphi) \\
 \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M V_m(x) \cos(\alpha_m \varphi) \\
 \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M W_m(x) \sin(\alpha_m \varphi)
 \end{aligned} \tag{6.73}$$

где је  $\alpha_m = m\pi / (2\theta)$ . Једначина (6.73), уз смену  $\alpha_m^* \rightarrow \alpha_m$ , одговара AA1 делу једначине (6.59). Из тог разлога, за одређивање корена карактеристичне једначине и коефицијената  $\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$  могу да се корист изрази дати у Поглављу 6.1.3. Коначни изрази за померања су:

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \delta_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m} x} \right) \sin(\alpha_m \varphi) \\
 \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \gamma_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m} x} \right) \cos(\alpha_m \varphi) \\
 \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} e^{r_{i,m} x} \right) \sin(\alpha_m \varphi)
 \end{aligned} \tag{6.74}$$

Заменом израза (6.72) и (6.74) у једначине (4.38) и (4.40) у случају *Donnell-Mustari*-еве теорије, односно у једначине (4.47) и (4.49) у случају *Flügge*-ове теорије, добијају се изрази за пресечне силе.

За комб 1, комб 2 и комб 3 граничних услова, вектори померања  $\hat{\mathbf{q}}$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}$ , чије су компоненте померања и ротације, односно силе на контурама плоче  $x=0$  и  $x=L$ , дати су дати изразима (5.37) и (5.42). Компоненте вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}$  су у облику *Fourier*-овог реда, као и код кружне цилиндричне љуске. За случај да гранични услови на контурама  $x=0$  и  $x=L$  не зависе од координате  $\varphi$ , решења за поједине хармонике су

независна, па уместо суме може да се посматра само  $m$ -ти хармоник Уводе се вектори померања  $\hat{\mathbf{q}}_m$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}_m$ , који садржи амплитуде померања и ротација, односно сила, за  $x=0$  и  $x=L$ , за које важе изрази (5.39) и (5.46). Матрице  $\mathbf{D}_m$  и  $\mathbf{F}_m$  су дефинисане изразима (5.40) и (5.47). Динамичке матрице крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$  (за сваки хармоник) за комб 1, комб 2 и комб 3 су тачне и њихов ред је 8, као и у случају затворене кружне цилиндричне љуске.

❖ комб 4, комб 5 и комб 6 граничних услова

За ове три комбинације граничних услова усвајају се решења у облику који *a priori* задовољава граничне услове на контурама  $x=0$  и  $x=L$ .

❖ комб 4 и комб 6 граничних услова

Решења за непозната компонентална померања, које *a priori* задовољава предефинисане граничне услове за ове две комбинације, је:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M U_m(\varphi) \sin(\beta_m x) \\ \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M V_m(\varphi) \cos(\beta_m x) \\ \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M W_m(\varphi) \cos(\beta_m x)\end{aligned}\tag{6.75}$$

где је  $\beta_m = m\pi / L$  у случају комб 4, односно  $\beta_m = (2m-1)\pi / L$  у случају комб 6. Решење (6.75) је у истом облику као и решење за SS2 део, једначина (6.2). Корени карактеристичне једначине и коефицијенти  $\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$  одређују на основу израза за SS2 део приказаних у приказаних у поглављу 6.1.1, док су коначни изрази за компонентална померања:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \delta_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m}\varphi} \right) \sin(\alpha_m x) \\ \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \gamma_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m}\varphi} \right) \cos(\alpha_m x) \\ \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} e^{r_{i,m}\varphi} \right) \cos(\alpha_m x)\end{aligned}\tag{6.76}$$

❖ комб 5 граничних услова

Изрази за компонентална померања су:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M U_m(\varphi) \cos(\beta_m x) \\ \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M V_m(\varphi) \sin(\beta_m x) \\ \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M W_m(\varphi) \sin(\beta_m x)\end{aligned}\tag{6.77}$$

где је  $\beta_m = m\pi / L$ . Решење (6.77), уз смену  $\beta_m^* \rightarrow \beta_m$ , је исто као SA2 део једначине (6.52).

Корени карактеристичне једначине и коефицијенти  $\delta_{i,m}$  и  $\gamma_{i,m}$  одређују се на основу израза за SA2 део приказаних у приказаних у Поглављу 6.1.1, док су коначни изрази за компонентална померања једнаки:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \delta_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m}\varphi} \right) \cos(\alpha_m x) \\ \hat{v}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 \gamma_{i,m} C_{i,m} e^{r_{i,m}\varphi} \right) \sin(\alpha_m x) \\ \hat{w}(x, \varphi) &= \sum_{m=1}^M \left( \sum_{i=1}^8 C_{i,m} e^{r_{i,m}\varphi} \right) \sin(\alpha_m x)\end{aligned}\tag{6.78}$$

Заменом једначина (6.76) и (6.78) у једначине (4.38) и (4.40) у случају *Donnell-Mustari*-еве теорије, односно у једначине (4.47) и (4.49) у случају *Flügge*-ове теорије, добијају се изрази за пресечне силе.

За комб 4, комб 5 и комб 6 граничних услова, вектори померања  $\hat{\mathbf{q}}$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}$ , чије су компоненте померања и ротације, односно силе на контурама плоче  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\theta$ , дати су следећим изразима:

$$\begin{aligned}(\hat{\mathbf{q}})^T &= \left[ \hat{v}(x, 0) \quad \hat{u}(x, 0) \quad \hat{w}(x, 0) \quad \hat{\psi}_x(x, 0) \quad \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \quad \hat{v}(x, 2\theta) \quad \hat{u}(x, 2\theta) \quad \hat{w}(x, 2\theta) \quad \hat{\psi}_x(x, 2\theta) \right]_{8 \times 1} \\ (\hat{\mathbf{Q}})^T &= \left[ -\hat{N}_\varphi(x, 0) \quad -\hat{N}_{\varphi x}(x, 0) \quad -\hat{Q}_\varphi(x, 0) \quad -\hat{M}_\varphi(x, 0) \quad \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \quad \hat{N}_\varphi(x, 2\theta) \quad \hat{N}_{\varphi x}(x, 2\theta) \quad \hat{Q}_\varphi(x, 2\theta) \quad \hat{M}_\varphi(x, 2\theta) \right]_{8 \times 1}\end{aligned}\tag{6.79}$$

Компоненте вектора померања  $\hat{\mathbf{q}}$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}$  су у облику *Fourier*-овог реда. За случај да гранични услови на контурама  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\theta$  не зависе од  $x$  координате, решења за поједине хармонике су независна, па уместо суме

може да се посматра само  $m$ -ти хармоник. Уводе се вектори померања  $\hat{\mathbf{q}}_m$  и сила  $\hat{\mathbf{Q}}_m$ , који садрже амплитуде померања и ротација, односно сила, на контурама  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\theta$ :

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{q}}_m)^T &= [V_m(0) \ U_m(0) \ W_m(0) \ \Psi_{xm}(0) \ \dots \\ &\quad \dots \ V_m(2\theta) \ U_m(2\theta) \ W_m(2\theta) \ \Psi_{xm}(2\theta)]_{8 \times 1} \\ (\hat{\mathbf{Q}}_m)^T &= [-\hat{N}_{\varphi m}(0) \ -\hat{N}_{\varphi xm}(0) \ -\hat{Q}_{\varphi m}(0) \ -\hat{M}_{\varphi m}(0) \ \dots \\ &\quad \dots \ \hat{N}_{\varphi m}(2\theta) \ \hat{N}_{\varphi xm}(2\theta) \ \hat{Q}_{\varphi m}(2\theta) \ \hat{M}_{\varphi m}(2\theta)]_{8 \times 1} \end{aligned} \quad (6.80)$$

Матрице  $\mathbf{D}_m$  и  $\mathbf{F}_m$ , реда 8, су једнаке:

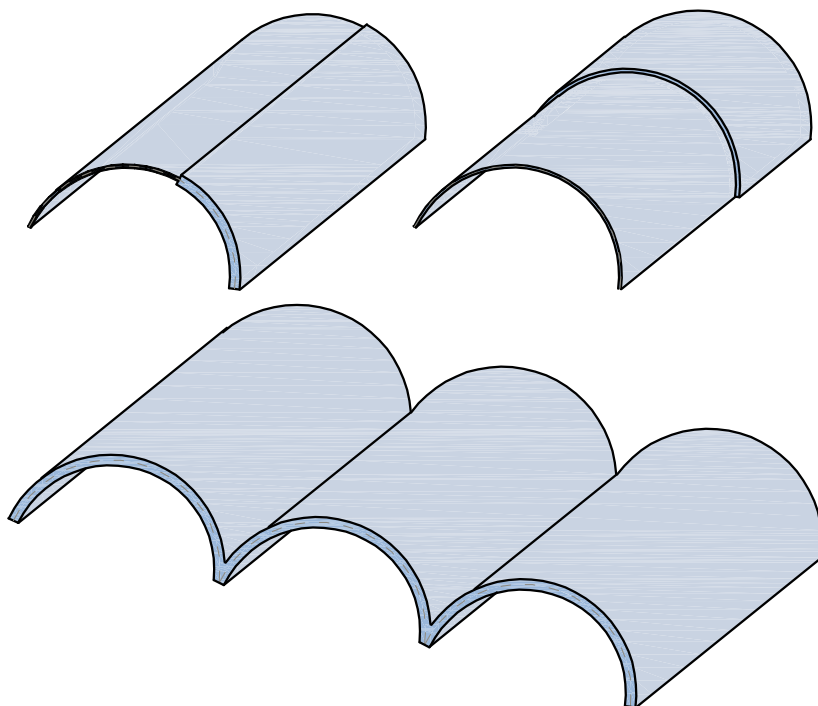
$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \gamma_{1,m} & \dots & \gamma_{8,m} \\ \delta_{1,m} & \dots & \delta_{8,m} \\ 1 & \dots & 1 \\ (\gamma_{1,m} - r_{1,m})/a & \dots & (\gamma_{8,m} - r_{8,m})/a \\ \gamma_{1,m} \cdot e^{r_{1,m} 2\theta} & \dots & \gamma_{8,m} \cdot e^{r_{8,m} 2\theta} \\ \delta_{1,m} \cdot e^{r_{1,m} 2\theta} & \dots & \delta_{8,m} \cdot e^{r_{8,m} 2\theta} \\ e^{r_{1,m} 2\theta} & \dots & e^{r_{8,m} 2\theta} \\ (\gamma_{1,m} - r_{1,m})/a \cdot e^{r_{1,m} 2\theta} & \dots & (\gamma_{8,m} - r_{8,m})/a \cdot e^{r_{8,m} 2\theta} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad (6.81)$$

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} -N_{\varphi 1,m} & \dots & -N_{\varphi 8,m} \\ -N_{\varphi x 1,m} & \dots & -N_{\varphi x 8,m} \\ -\bar{Q}_{\varphi 1,m} & \dots & -\bar{Q}_{\varphi 8,m} \\ -M_{\varphi 1,m} & \dots & -M_{\varphi 8,m} \\ N_{\varphi 1,m} \cdot e^{r_{1,m} 2\theta} & \dots & N_{\varphi 8,m} \cdot e^{r_{8,m} 2\theta} \\ \bar{N}_{\varphi x 1,m} \cdot e^{r_{1,m} 2\theta} & \dots & \bar{N}_{\varphi x 8,m} \cdot e^{r_{8,m} 2\theta} \\ \bar{Q}_{\varphi 1,m} \cdot e^{r_{1,m} 2\theta} & \dots & \bar{Q}_{\varphi 8,m} \cdot e^{r_{8,m} 2\theta} \\ M_{\varphi 1,m} \cdot e^{r_{1,m} 2\theta} & \dots & M_{\varphi 8,m} \cdot e^{r_{8,m} 2\theta} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad (6.82)$$

У случају *Donnell-Mustari*-еве теорије израз  $(\gamma_{i,m} - r_{i,m})/a$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , у матрици  $\mathbf{D}_m$  постаје  $-r_{i,m}/a$ . Тачне динамичке матрице крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$  за комб 4, комб 5 и комб 6 су такође реда 8.

### 6.1.6 Формирање глобалне динамичке матрице крутости, гранични услови, сопствене фреквенције и облици осциловања

Код формирања глобалне динамичке матрице крутости система који се састоји од више континуалних елемената сегмента кружне цилиндричне љуске важе иста правила као и при формирању глобалне динамичке матрице крутости система који се састоји од више континуалних елемената правоугаоне *Mindlin*-ове плоче. Ред ове глобалне динамичке матрице крутости је  $n_c \cdot (8M + 3)$ , где је  $n_c$ -број контура сегмента кружне цилиндричне љуске. У случају формирања глобалне динамичке матрице крутости система који се састоји од континуалних елемената сегмента кружне цилиндричне љуске са специјалним граничним условима (комб 1-комб б), поступак је исти као код примене континуалног елемента *Maurice Levy*-јеве плоче или затворене кружне цилиндричне љуске. Ред глобалне динамичке матрице крутости за сваки хармоник је  $4 \cdot n_c$ , где је  $n_c$ -број контура сегмента са произвољним граничним условима. За аплицирање граничних услова, одређивање сопствених фреквенција и облика осциловања користе се стандардни поступци који су у оквиру тезе више пута објашњени. Неки од примера система који могу да се реше применом изведених динамичких матрица крутости су дати на Слици 6.8.



Слика 6.8 – Сегменти кружне цилиндричне љуске променљиве дебљине и бачваст кров

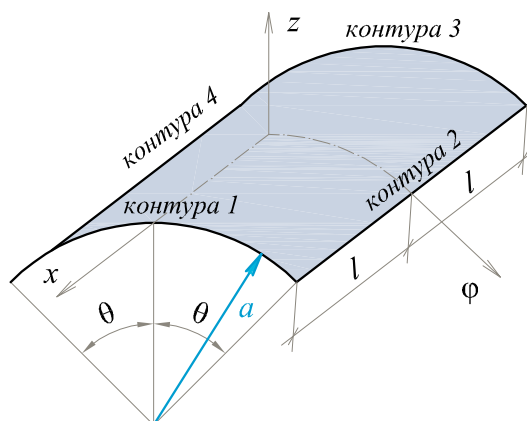


### 6.1.7 Нумерички примери

Применом *Matlab* програма, заснованог на изведеним динамичким матрицама крутости по *Donnell-Mustari*-евој и *Flügge*-овој теорији, одређене су сопствене фреквенције сегмента кружне цилиндричне љуске. Добијени резултати су упоређени са доступним резултатима из литературе, као и са резултатима добијеним помоћу програма *Abaqus*. У нумеричким примерима ће бити приказана решења само за најчешће коришћене граничне услове, који се обележавају на следећи начин:

- слободна контура *F*: сва три померања  $u$ ,  $v$  и  $w$  и ротација  $\psi_\varphi$  на контурама  $x = \pm l$ , односно ротација  $\psi_x$  на контурама  $\varphi = \pm\theta$  су различити од нуле,
- *shear diaphragm SD*: на контурама  $x = \pm l$  су спречена померања  $v$  и  $w$ , а на контурама  $\varphi = \pm\theta$  су спречена померања  $u$  и  $w$ ,
- слободно ослоњена контура *S*: сва три компонентална померања  $u$ ,  $v$  и  $w$  су спречена,
- укљештена контура *C*: спречена су сва три померања  $u$ ,  $v$  и  $w$  и ротација  $\psi_\varphi$  контурама  $x = \pm l$ , односно ротација  $\psi_x$  на контурама  $\varphi = \pm\theta$ .

Комбинација граничних услова *SD-F-F-C* означава да контура 1, Слика 6.9, има *SD* гранични услов, контуре 2 и 3 су слободне, док је контура 4 укљештена. У свим примерима је усвојена вредност *Poisson*-овог коефицијента  $\nu = 0.3$ .



Слика 6.9 – Нумерација контура сегмента кружне цилиндричне љуске

**Пример 6.1**

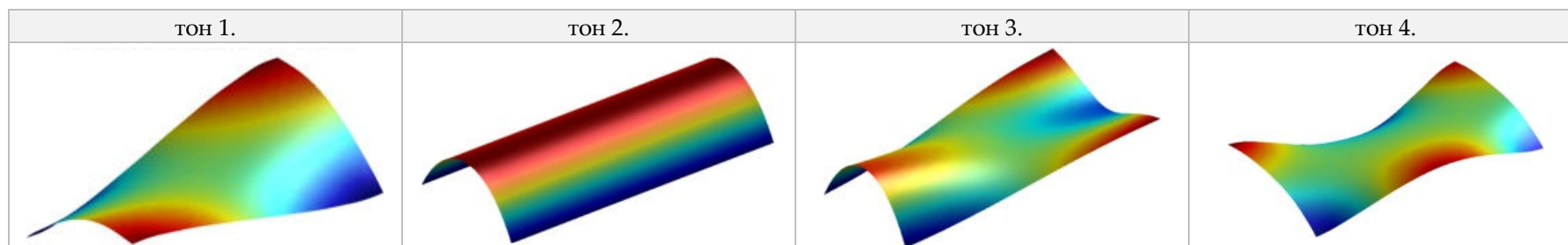
У првом примеру је испитана брзина конвергенције решења за слободан сегмент кружне цилиндричне љуске. У Табели 6.1 је дато првих девет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за однос  $h/a = 0.005$ ,  $L/a = 1.5$  и  $2\theta = 45^\circ$ . Резултати су добијени применом ДМК по *Donnell-Mustari*-евој и *Flügge*-евој теорији коришћењем 5, 10, 15 и 20 чланова реда решења. У табели је дата разлика у % између решење за  $M = 15$  и  $M = 20$ , као и резултати из чланка (Ye, 2014). Ye је користио *Qatu*-ову формулацију теорије танких љуски. Компонентална померања је представио помоћу *Chebyshev*-љевих полиномима прве врсте, чије је коефицијенте одредио *Rayleigh-Ritz*-овим поступком.

Из Табеле 6.1 се види да се применом ДМК за  $M = 20$  јављају две непостојеће сопствене фреквенције. Разлог је у недовољном броја чланова решења  $M$ , јер како се  $M$  повећава ове сопствене фреквенције теже нули (тонови који одговарају померању сегмента као крутог тела). За  $M = 110$ , што је уједно и највећи број чланова реда за које може да се изврши прорачун за ту сврху написаним *Matlab* програмом, вредности бездимензионалних сопствених фреквенција су: 0.005545 и 0.002449 по *Donnell-Mustari*-евој, односно 0.005776 и 0.002449 по *Flügge*-евој теорији. Из Табеле 6.1 се такође може да се закључи, да прва сопствена фреквенција има најлошију конвергенцију, док је за све остале тонове релативна разлика у % између решење за  $M = 15$  и  $M = 20$  мања од 1%. Бездимензионална сопствена фреквенција за први тон за  $M = 110$  је: 0.033268 по *Donnell-Mustari*-евој, односно 0.034192 по *Flügge*-евој теорији, и ове вредности се доста добро слажу са резултатима од Ye-а. Најлошија конвергенција прве сопствене фреквенције је последица одговарајућег облика осциловања, који је линеарна функција од  $x$  координате. Као што је познато, за апроксимацију линеарних функција помоћу *Fourier*-овог реда потребан је већи број чланова реда  $M$  како би се добили резултати задовољавајуће тачности. У Табели 6.1 је поред редног броја сопствене фреквенције, у загради, описана и деформација одговарајућег облика осциловања.

На Слици 6.10 су приказана прва четири облика осциловања.

Табела 6.1 - Првих девет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  слободног сегмента кружне цилиндричне љуске (F-F-F-F):  $\nu = 0.3, h/a = 0.005, L/a = 1.5, 2\theta = 45^\circ$ .

ТОН	ДМК Donnell-Mustari					ДМК Flügge					(Ye, 2014)
	M = 5	M = 10	M = 15	M = 20	$\Delta\%$ M = 15 и M = 20	M = 5	M = 10	M = 15	M = 20	$\Delta\%$ M = 15 и M = 20	
(AA)	0.031882	0.031882	0.030496	0.027724		0.030496	0.029572	0.027724	0.024951		
(SA)	0.038351	0.024489	0.017096	0.012938		0.038813	0.024951	0.017558	0.013400		
1 (AA)	0.091950	0.059144	0.042972	0.036503	17.72	0.093336	0.060992	0.045282	0.038813	16.67	0.033384
2 (SS)	0.103501	0.103501	0.103501	0.103501	0.00	0.102115	0.102115	0.102115	0.102115	0.00	0.102097
3 (SA)	0.122908	0.122446	0.122446	0.122446	0.00	0.121060	0.121060	0.120598	0.120598	0.00	0.120963
4 (AS)	0.150632	0.143239	0.140928	0.140004	0.66	0.151094	0.144163	0.141390	0.140466	0.66	0.138669
5 (SS)	0.159411	0.155714	0.154328	0.153866	0.30	0.159873	0.156176	0.154790	0.153866	0.60	0.152965
6 (SA)	0.263836	0.256443	0.254133	0.253209	0.36	0.263836	0.256905	0.254595	0.253671	0.36	0.251855
7 (AA)	0.283243	0.274001	0.271229	0.270305	0.34	0.283243	0.274464	0.271691	0.270767	0.34	0.268836
8 (AS)	0.286477	0.286477	0.286477	0.286477	0.00	0.284167	0.284167	0.284167	0.284167	0.00	0.284329
9 (AA)	0.305884	0.305884	0.305422	0.305422	0.00	0.304035	0.304035	0.303573	0.303573	0.00	0.303744



Слика 6.10 – Прва четири облика осциловања слободног сегмента кружне цилиндричне љуске

**Пример 6.2**

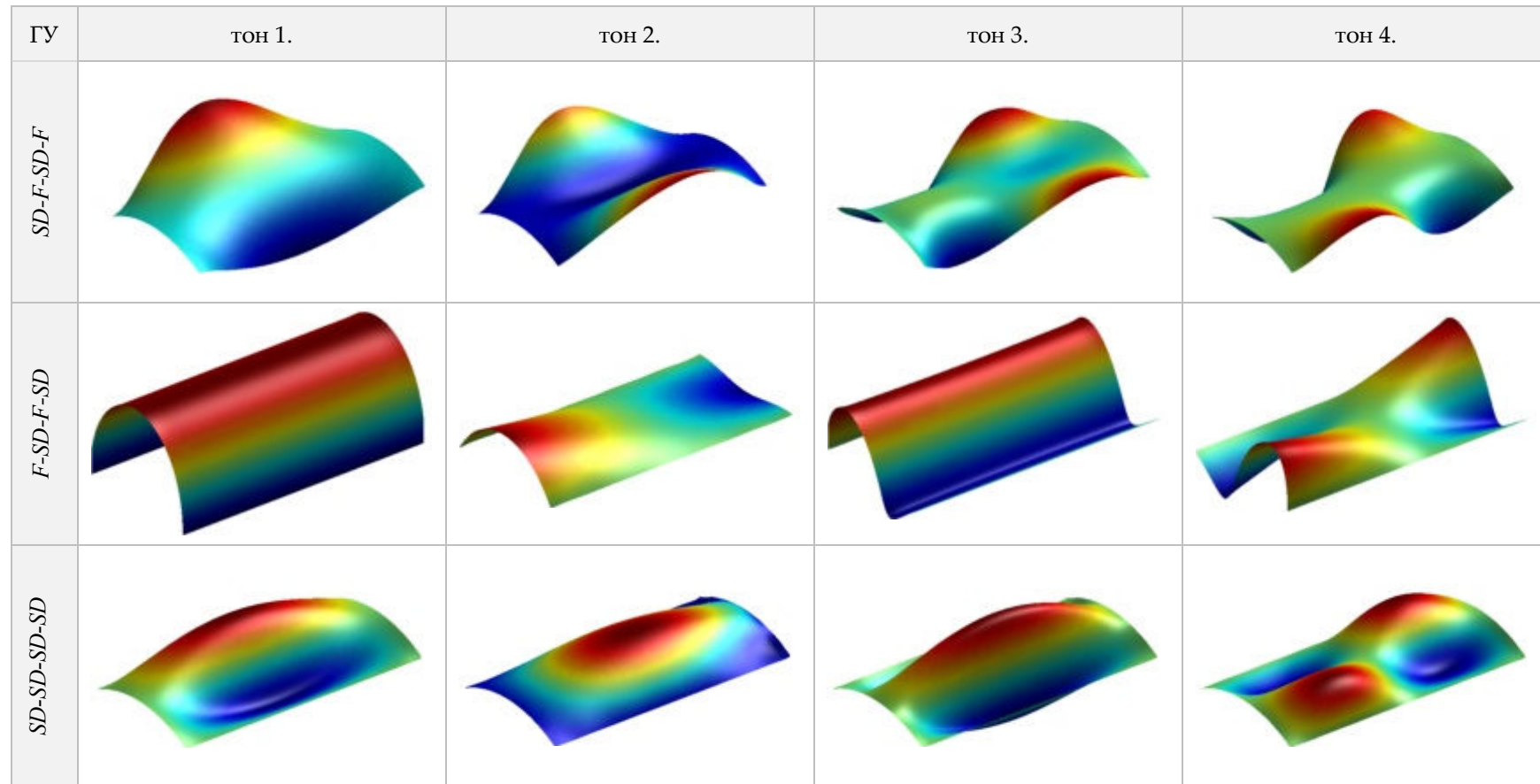
У овом примеру је испитана брзина конвергенције решења за случај сегмената кружне цилиндричне љуске који на две паралелне контуре имају *SD* граничне услове (комбинације граничних услова 2 и 5, Слика 6.7). Изабран је сегмент следећих карактеристика:  $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 2$  и  $2\theta = 60^\circ$ .

Резултати добијени применом динамичке матрице крутости  $\tilde{\mathbf{K}}_D$  по *Donnell-Mustari*-евој и *Flügge*-овој теорији, чија тачност зависи од броја чланова реда решења  $M$ , су упоређени са тачним решењима која су добијена применом динамичке матрице крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$  по *Donnell-Mustari*-евој и *Flügge*-овој теорији за сегмент са две паралелне *SD* контуре (комб 2 и комб 5), као и са резултатима из чланка (Ye, 2014). Резултати за првих седам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  су дати у Табели 6.2. За *SD-F-SD-F* комбинацију граничних услова коришћена је тачна динамичка матрица крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$  за комб 5, за *F-SD-F-SD* комбинацију граничних услова  $\mathbf{K}_{Dm}$  за комб 2, док за *SD-SD-SD-SD* комбинацију граничних услова може да се користи  $\mathbf{K}_{Dm}$  и за комб 2 и за комб 5. Решења добијена применом  $\mathbf{K}_{Dm}$  за комб 2 и комб 5 су тачна и могу да служе за одређивање брзине конвергенције решења које се добија применом  $\tilde{\mathbf{K}}_D$ . У Табели 6.2 је приказана и релативна разлика у процентима између тачног решења добијеног применом  $\mathbf{K}_{Dm}$  и решења за  $M = 20$  добијеног помоћу  $\tilde{\mathbf{K}}_D$ . Види се да је она мања од 1% за све тонове осим за први тон за *SD-F-SD-F*, односно за други тон за *F-SD-F-SD* комбинацију граничних услова. За ове тонове резултати искомвергирају, тј идентични су са тачним решењима, када је  $M = 80$ . Такође, може да се примети да за поједине тонове резултати искомвергирају већ за 5, односно 10 чланова реда решења.

Знак “-“ у Табели 6.2 значи да одговарајућа сопствена фреквенција није одређена у чланку (Ye, 2014). На Слици 6.11 су приказана прва четири облика осциловања за све три комбинације граничних услова.

Табела 6.2 - Првих седам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са *SD* граничним условима на две паралелне контуре:  $\nu = 0.3$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 2$ ,  $2\theta = 60^\circ$ .

ГУ	Т о н	ДМК <i>Donnell-Mustari</i>						ДМК <i>Flügge</i>						(Ye, 2014)		
		<i>M</i> = 5	<i>M</i> = 10	<i>M</i> = 15	<i>M</i> = 20	тачно решење	$\Delta$ %	<i>M</i> = 5	<i>M</i> = 10	<i>M</i> = 15	<i>M</i> = 20	тачно решење	$\Delta$ %			
<i>SD-F-SD-F</i>	1	0.003825	0.003493	0.003385	0.003338	0.003281	1.76	0.003849	0.003517	0.003408	0.003361	0.003304	1.75	0.003294		
	2	0.005802	0.005583	0.005510	0.005475	0.005441	0.64	0.005853	0.005641	0.005568	0.005545	0.005499	0.84	0.005488		
	3	0.010078	0.009674	0.009553	0.009507	0.009438	0.73	0.010095	0.009693	0.009576	0.009530	0.009461	0.73	0.009445		
	4	0.010638	0.010138	0.009992	0.009934	0.009853	0.82	0.010707	0.010208	0.010061	0.010004	0.009923	0.81	0.009904		
	5	0.011272	0.011191	0.011170	0.011159	0.011136	0.21	0.011143	0.011057	0.011032	0.011020	0.010997	0.21	-		
	6	0.016259	0.015741	0.015595	0.015537	0.015467	0.45	0.016289	0.015774	0.015629	0.015571	0.015502	0.45	0.015474		
	7	0.017317	0.016849	0.016703	0.016646	0.016576	0.42	0.017159	0.016910	0.016773	0.016715	0.016634	0.49	0.016606		
<i>F-SD-F-SD</i>	1	0.002449	0.002449	0.002449	0.002449	0.002449	0.00	0.002183	0.002183	0.002183	0.002183	0.002183	0.00	0.002183		
	2	0.003535	0.003119	0.003003	0.002957	0.002888	2.40	0.003304	0.002853	0.002715	0.002668	0.002599	2.67	0.002652		
	3	0.010212	0.010212	0.010212	0.010212	0.010212	0.00	0.009923	0.009923	0.009923	0.009923	0.009934	-0.12	0.009928		
	4	0.010812	0.010766	0.010754	0.010743	0.010743	0.00	0.010535	0.010477	0.010466	0.010466	0.010454	0.11	0.010474		
	5	0.018540	0.018413	0.018390	0.018378	0.018367	0.06	0.018332	0.018205	0.018182	0.018171	0.018159	0.06	0.018185		
	6	0.023138	0.023138	0.023138	0.023138	0.023138	0.00	0.022860	0.022860	0.022860	0.022860	0.022860	0.00	0.022858		
	7	0.023692	0.023681	0.023681	0.023681	0.023681	0.00	0.023403	0.023392	0.023392	0.023392	0.023392	0.00	0.023403		
<i>SD-SD-SD-SD</i>	1	0.012591	0.012522	0.012510	0.012499	0.012499	0.00	0.012325	0.012268	0.012245	0.012245	0.012233	0.09	0.012240		
	2	0.019799	0.019672	0.019649	0.019638	0.019626	0.06	0.019753	0.019626	0.019603	0.019591	0.019580	0.06	0.019562		
	3	0.024131	0.024108	0.024085	0.024073	0.024062	0.05	0.023842	0.023819	0.023819	0.023819	0.023819	0.00	0.023817		
	4	0.024258	0.024108	0.024108	0.024108	0.024108	0.00	0.024096	0.023946	0.023923	0.023912	0.023900	0.05	0.023890		
	5	0.028105	0.028035	0.028024	0.028024	0.028012	0.04	0.027828	0.027758	0.027747	0.027735	0.027735	0.00	0.027739		
	6	0.036052	0.035971	0.035948	0.035948	0.035937	0.03	0.035798	0.035706	0.035694	0.035683	0.035683	0.00	0.035687		
	7	0.039691	0.039610	0.039599	0.039587	0.039587	0.00	0.039564	0.039483	0.039471	0.039460	0.039460	0.00	0.039425		



Слика 6.11 – Прва четири облика осциловања сегмента кружне цилиндричне љуске са *SD* граничним условима на две паралелне контуре:  
 $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 2$ ,  $2\theta = 60^\circ$ .

### Пример 6.3

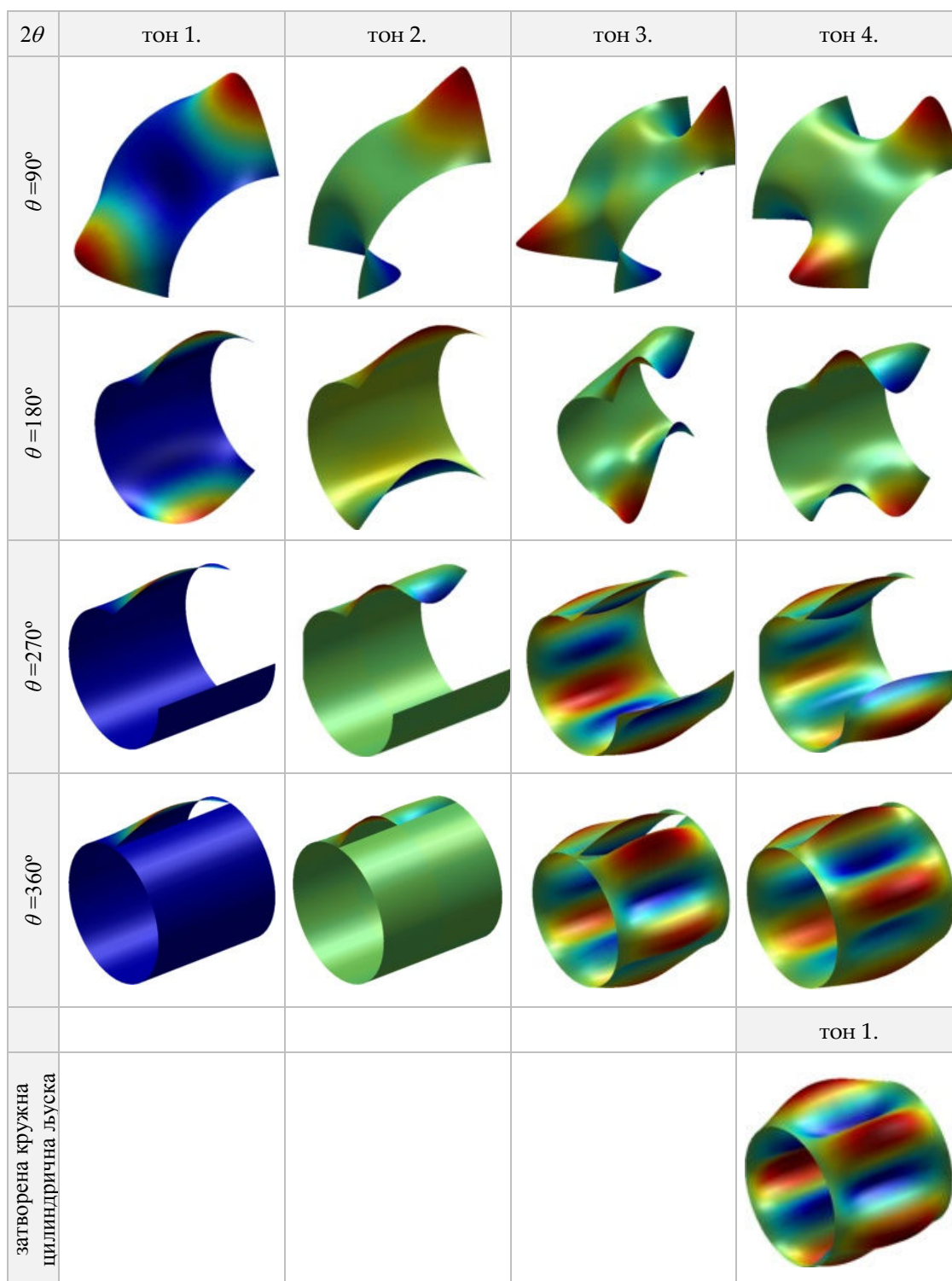
У Примеру 6.3 је, за сегмент кружне цилиндричне љуске са  $SD-F-SD-F$  комбинацијом граничних услова из Примера 6.2, испитан утицај угла  $2\theta$  на брзину конвергенције решења. У Табели 6.3 су приказани резултати за првих шест бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega}$  по *Donnell-Mustari*-евој и *Flügge*-овој теорији који су добијени применом ДМК, као и тачне ДМК за комб 5, Слика 6.7. Релативна разлика у процентима између решења за  $M=20$  у случају примене  $\tilde{\mathbf{K}}_D$  и тачног решења добијеног коришћењем  $\mathbf{K}_{Dm}$  је такође дата у табели. Када је  $2\theta > 180^\circ$  и  $M \leq 15$ , за поједине тонове, уместо једне јављају се две или више блиских вредности за  $\bar{\omega}$ , које нису приказане у табели и уместо њих је стављен знак “-”. Закључак који може да се изведе из овог примера је да, за изабрану комбинацију граничних услова, резултати спорије конвергирају за углове  $2\theta > 180^\circ$ .

На Слици 6.12 су приказана прва четири облика осциловања за сваку вредност угла  $2\theta$  из Табеле 6.3, као и први облик осциловања одговарајуће затворене кружне цилиндричне љуске. Са Слике 6.12 се види да први облик осциловања затворене кружне цилиндричне љуске одговара четвртог облику осциловања одговарајуће отворене кружне цилиндричне ( $2\theta = 360^\circ$ ).

Табела 6.3 - Првих шест бездимензионалних сопствених фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са *SD-F-SD-F* комбинацијом граничних услова и различитом вредношћу угла  $2\theta$ :  $\nu = 0.3$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 2$ .

$2\theta$	тон	<i>Donnell-Mustari</i>						<i>Flügge</i>					
		$M = 5$	$M = 10$	$M = 15$	$M = 20$	тачно	$\Delta \%$	$M = 5$	$M = 10$	$M = 15$	$M = 20$	тачно	$\Delta \%$
90°	1	0.004517	0.004216	0.004124	0.004089	0.004031	1.43	0.004540	0.004239	0.004147	0.004112	0.004055	1.42
	2	0.005210	0.004863	0.004771	0.004725	0.004678	0.99	0.005267	0.004932	0.004840	0.004794	0.004748	0.97
	3	0.010350	0.009865	0.009726	0.009669	0.009599	0.72	0.010385	0.009900	0.009761	0.009703	0.009634	0.72
	4	0.010547	0.010050	0.009911	0.009853	0.009784	0.71	0.010593	0.010108	0.009969	0.009911	0.009842	0.70
	5	0.010939	0.010905	0.010893	0.010893	0.010893	0.00	0.010743	0.010720	0.010708	0.010697	0.010697	0.00
	6	0.015317	0.015329	0.015329	0.015329	0.015329	0.00	0.015086	0.015086	0.015086	0.015086	0.015086	0.00
180°	1	0.005279	0.004690	0.004517	0.004447	0.004332	2.67	0.005314	0.004736	0.004563	0.004482	0.004378	2.37
	2	0.005395	0.004736	0.004551	0.004470	0.004355	2.65	0.005429	0.004771	0.004586	0.004517	0.004401	2.62
	3	0.010835	0.010154	0.009923	0.009830	0.009692	1.43	0.010870	0.010200	0.009969	0.009877	0.009738	1.42
	4	0.010893	0.010188	0.009923	0.009830	0.009692	1.43	0.010939	0.010223	0.009969	0.009877	0.009738	1.42
	5	0.011459	0.011448	0.011436	0.011436	0.011436	0.00	0.011240	0.011217	0.011217	0.011217	0.011205	0.10
	6	0.011771	0.011690	0.011667	0.011667	0.011655	0.10	0.011632	0.011540	0.011517	0.011505	0.011494	0.10
270°	1	-	-	0.004701	0.004563	0.004343	5.05	-	-	-	0.004597	0.004390	4.74
	2	-	-	-	0.009957	0.009692	2.74	-	-	-	0.010004	0.009738	2.73
	3	-	0.011251	0.011240	0.011240	0.011228	0.10	0.011078	0.011055	0.011043	0.011043	0.011032	0.10
	4	-	0.011702	0.011690	0.011679	0.011679	0.00	0.011309	0.011471	0.011459	0.011459	0.011448	0.10
	5	-	0.012268	0.012245	0.012245	0.012233	0.09	0.012118	0.012118	0.012094	0.012094	0.012071	0.19
	6	-	0.013238	0.013238	0.013238	0.013238	0.00	0.012915	0.012984	0.012984	0.012984	0.012984	0.00
360°	1	-	-	-	0.004701	0.004343	8.24	-	-	-	0.004725	0.004390	7.63
	2	-	-	-	0.010131	0.009692	4.53	-	-	-	0.010177	0.009738	4.51
	3	-	0.011344	0.011320	0.011320	0.011309	0.10	-	0.011124	0.011113	0.011101	0.011089	0.10
	4	-	0.011448	0.011424	0.011413	0.011390	0.30	-	0.011274	0.011240	0.011228	0.011217	0.10
	5	-	0.011956	0.011956	0.011956	0.011956	0.00	-	0.011725	0.011725	0.011725	0.011725	0.00
	6	-	0.012464	0.012441	0.012429	0.012406	0.28	-	0.012337	0.012302	0.012291	0.012268	0.19





Слика 6.12 – Прва четири облика осциловања сегмента кружне цилиндричне љуске са  $SD-F-SD-F$  граничним условима:  $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 2$ .

Кроз следећа два примера је испитан утицај граничних услова на брзину конвергенције решења. За комбинације граничних услова које су коришћене у Примерима 6.4 и 6.5 не постоје решења у затвореном облику. За добијање приказаних резултата коришћена је динамичка матрица крутости  $\tilde{\mathbf{K}}_D$ .

#### Пример 6.4

За овај пример изабран је сегмент кружне цилиндричне љуске истих геометријских карактеристика као у Примеру 6.2. Такође, коришћене су и исте комбинације граничних услова, само што је  $SD$  гранични услов замењен  $S$  граничним условом. Резултати за првих седам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega}$  су приказани у Табели 6.4. Сопствене фреквенције су одређене коришћењем ДМК по *Donnell-Mustari*-евој и *Flügge*-овој теорији уз коришћење различитог број чланова реда решења:  $M = 5, 10, 15$  и  $20$ . У Табели 6.4 су поред ових резултата дати и резултати из чланка (Ye, 2014), као и из програма *Abaqus*. У *Abaqus*-у је сегмент кружне цилиндричне љуске ( $a = 0.1\text{ m}$ ) моделиран мрежом од 21000 *S4R*, односно 42000 *STRIZ* коначних елемената. Релативна разлика у % између решења за  $M = 15$  и  $M = 20$  код примене ДМК, која је мања од 0.01%, је такође дата у табели. На основу поређења резултата из Табела 6.2 и 6.4 може да се изведе закључак да смањење броја степени слободне на контури повећава брзину конвергенције решења.

#### Пример 6.5

Кроз овај пример је испитана брзина конвергенције решења за још неке комбинације граничних услова, за које не постоје решења у затвореном облику. У Табели 6.5 је приказано првих шест бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega}$  одређених применом ДМК, као и резултати из чланка (Ye, 2014). Геометријске карактеристике сегмента кружне цилиндричне љуске су:  $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 2$  и  $2\theta = 90^\circ$ . Код примене *метода динамичке крутости*, коришћене су ДМК по *Donnell-Mustari*-евој и *Flügge*-овој теорији. Зависно од брзине конвергенције решења Табела 6.5 је подељена на два дела. У Табели 6.5-(а) су приказани резултати за комбинације граничних услова у којима су три контуре слободне: *F-F-F-S* и *F-F-F-C*. Решења за сегменте са три слободне контуре показују

најспорију конвергенцију у односу на остале комбинације граничних услова из овог примера, тј њихови поједини тонови. Стога су у Табели 6.5-(а) приказана решења добијена коришћењем 15, 20 и 25 чланова реда, као и релативна разлика између решења за  $M=20$  и  $M=25$ . За све тонове, осим за 1.тон у случају  $F-F-F-S$  граничних услова, односно за 2. тон у случају  $F-F-F-C$  граничних услова, ова релативна разлика је  $\leq 1.08\%$ , што представља задовољавајућу тачност решења. Из тог разлога, наставак испитивања конвергенције решења је спроведен само за претходно поменуте тонове, и резултати су следећи:

- *Donnell-Mustari*-ева теорија за  $M=120$ : 1. тон ( $F-F-F-S$ )  $\bar{\omega} = 0.012938$ , 2. тон ( $F-F-F-C$ )  $\bar{\omega} = 0.017096$ ,
- *Flügge*-ова теорија за  $M=100$ : 1. тон ( $F-F-F-S$ )  $\bar{\omega} = 0.014786$ , 2. тон ( $F-F-F-C$ )  $\bar{\omega} = 0.019869$ .

У Табели 6.5-(б) су приказани резултати за  $\bar{\omega}$  сегмента кружне цилиндричне љуске са две, једном, односно без слободних контура, који су добијени коришћењем 5, 10 и 15 чланова реда решења. У табели је дата и релативна разлика у процентима између решења за  $M=10$  и  $M=15$ . На основу приказаних резултата може да се закључи да, после комбинације граничних услова са три слободне контуре, најспорију конвергенцију показују сегменти са две суседне слободне контуре. Ипак, релативна разлика решења за  $M=10$  и  $M=15$  не прелази 1%. Резултати за сегменте са једном слободном контуром, односно без слободних контура, исконвергирају за  $M=5$ . Код потпуно укљештеног сегмента ( $C-C-C-C$ ) коришћена су два континуална елемента.

На Слика 6.13 су приказана прва четири облика осциловања сегмента кружне цилиндричне љуске са  $F-F-F-S$  комбинацијом граничних услова.

Табела 6.4 - Првих седам бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са различитим комбинацијама граничних услова:  $\nu = 0.3$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 2$ ,  $2\theta = 60^\circ$ .

ГУ	тон	ДМК <i>Donnell-Mustari</i>					ДМК <i>Flügge</i>					Abaqus		(Ye, 2014)
		<i>M</i> = 5	<i>M</i> = 10	<i>M</i> = 15	<i>M</i> = 20	Δ%	<i>M</i> = 5	<i>M</i> = 10	<i>M</i> = 15	<i>M</i> = 20	Δ%	<i>S4R</i>	<i>STR13</i>	
<i>S-F-S-F</i>	1	0.005637	0.005626	0.005626	0.005626	0.00	0.005683	0.005672	0.005672	0.005626	0.00	0.005666	0.005685	0.005650
	2	0.006423	0.006411	0.006400	0.006400	0.00	0.006446	0.006423	0.006423	0.006400	0.00	0.006409	0.006427	0.006406
	3	0.010893	0.010801	0.010789	0.010778	0.00	0.010916	0.010824	0.010801	0.010778	0.00	0.010762	0.010816	0.010764
	4	0.011898	0.011817	0.011794	0.011794	0.00	0.011967	0.011886	0.011863	0.011794	0.00	0.011824	0.011881	0.011816
	5	0.016877	0.016738	0.016715	0.016703	0.00	0.016911	0.016773	0.016738	0.016703	0.00	0.016669	0.016761	0.016688
	6	0.017697	0.017581	0.017558	0.017558	0.00	0.017628	0.017535	0.017512	0.017558	0.00	0.017449	0.017518	0.017481
	7	0.018598	0.018563	0.018552	0.018552	0.00	0.018494	0.018436	0.018425	0.018552	0.00	0.018381	0.018429	0.018400
<i>F-S-F-S</i>	1	0.009946	0.009946	0.009946	0.009946	0.00	0.009669	0.009669	0.009669	0.009946	0.00	0.009671	0.009673	0.009674
	2	0.021786	0.021786	0.021786	0.021786	0.00	0.021520	0.021520	0.021520	0.021786	0.00	0.021509	0.021516	0.021520
	3	0.022237	0.022248	0.022248	0.022248	0.00	0.021959	0.021971	0.021982	0.022248	0.00	0.021956	0.021976	0.021988
	4	0.022410	0.022421	0.022433	0.022433	0.00	0.022271	0.022283	0.022283	0.022433	0.00	0.022284	0.022287	0.022282
	5	0.028359	0.028370	0.028370	0.028370	0.00	0.028116	0.028116	0.028128	0.028370	0.00	0.028086	0.028116	0.028146
	6	0.035290	0.035313	0.035324	0.035324	0.00	0.035105	0.035128	0.035140	0.035324	0.00	0.035103	0.035132	0.035136
	7	0.038894	0.038905	0.038905	0.038905	0.00	0.038674	0.038686	0.038698	0.038905	0.00	0.038646	0.038676	0.038713
<i>S-S-S-S</i>	1	0.024674	0.024686	0.024686	0.024686	0.00	0.024547	0.024547	0.024547	0.024547	0.00	0.024541	0.024543	0.024524
	2	0.024813	0.024813	0.024813	0.024813	0.00	0.024558	0.024558	0.024558	0.024558	0.00	0.024543	0.024550	0.024552
	3	0.032645	0.032645	0.032645	0.032645	0.00	0.032413	0.032425	0.032425	0.032425	0.00	0.032396	0.032410	0.032413
	4	0.038732	0.038744	0.038744	0.038744	0.00	0.038547	0.038547	0.038547	0.038547	0.00	0.038520	0.038535	0.038526
	5	0.043399	0.043399	0.043399	0.043399	0.00	0.043203	0.043203	0.043203	0.043203	0.00	0.043166	0.043181	0.043185
	6	0.043595	0.043595	0.043595	0.043595	0.00	0.043318	0.043318	0.043318	0.043318	0.00	0.043278	0.043294	0.043319
	7	0.047454	0.047465	0.047465	0.047465	0.00	0.047234	0.047234	0.047246	0.047246	0.00	0.047167	0.047207	0.047229

Табела 6.5-(а)- Првих шест бездимензионалних сопствених фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са три слободне контуре:  $\nu = 0.3$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 1.5$ ,  $2\theta = 90^\circ$ .

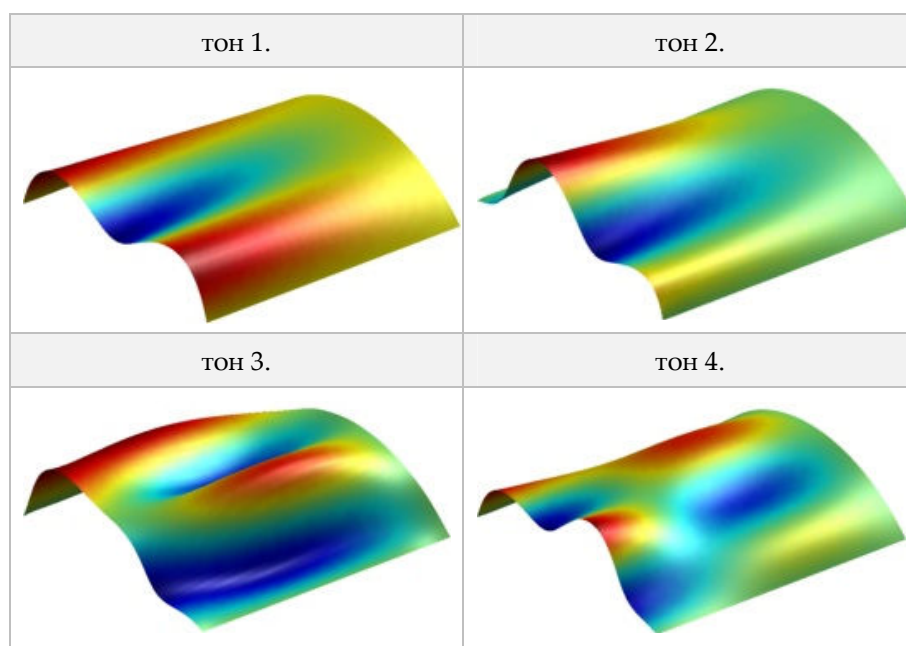
ГУ	Т о н	ДМК <i>Donnell-Mustari</i>				ДМК <i>Flügge</i>				(Ye, 2014)
		M=15	M=20	M=25	Δ%	M=10	M=15	M=20	Δ%	
F-F-F-S	1	0.029572	0.024027	0.020793	-15.56	0.029110	0.024027	0.021255	-13.04	0.012478
	2	0.030496	0.030958	0.030958	0.00	0.028186	0.028186	0.028186	0.00	0.028084
	3	0.046206	0.045744	0.045282	-1.02	0.044358	0.043434	0.042972	-1.08	0.043366
	4	0.110432	0.110432	0.110432	0.00	0.105812	0.105812	0.105812	0.00	0.105868
	5	0.126604	0.126604	0.126604	0.00	0.121984	0.121984	0.121984	0.00	0.122925
	6	0.227333	0.226409	0.225947	-0.20	0.228258	0.227333	0.226871	-0.20	0.225473
F-F-F-C	1	0.007393	0.007393	0.007393	0.00	0.008779	0.008779	0.008779	0.00	0.008624
	2	0.032806	0.027262	0.024027	-13.46	0.033730	0.028648	0.025875	-17.74	0.017419
	3	0.043896	0.043896	0.043896	0.00	0.041585	0.041585	0.041585	0.00	0.041554
	4	0.055447	0.055447	0.055447	0.00	0.052675	0.052675	0.052675	0.00	0.053459
	5	0.135384	0.135384	0.135384	0.00	0.131225	0.131225	0.131225	0.00	0.131205
	6	0.146473	0.146473	0.146473	0.00	0.142314	0.142314	0.142314	0.00	0.142938

Табела 6.5-(б)- Првих шест бездимензионалних сопствених фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са две, једном и без слободних контура:  $\nu = 0.3$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 1.5$ ,  $2\theta = 90^\circ$ .

ГУ	Т о н	ДМК <i>Donnell-Mustari</i>				ДМК <i>Flügge</i>				(Ye, 2014)
		M=5	M=10	M=15	Δ%	M=5	M=10	M=15	Δ%	
F-F-S-S	1	0.070695	0.069309	0.068847	-0.67	0.071619	0.069771	0.069771	0.00	0.068893
	2	0.191755	0.187596	0.186210	-0.74	0.190831	0.186672	0.185748	-0.50	0.184187
	3	0.206079	0.205617	0.205617	0.00	0.205155	0.204230	0.204230	0.00	0.203761
	4	0.272153	0.272153	0.272153	0.00	0.268457	0.268457	0.268457	0.00	0.268152
	5	0.364565	0.357172	0.355324	-0.52	0.365027	0.357634	0.356248	-0.39	0.353873
	6	0.411233	0.410771	0.410771	0.00	0.406151	0.406151	0.406151	0.00	0.406130
F-F-C-C	1	0.071619	0.070233	0.069771	-0.66	0.072543	0.071157	0.070695	-0.65	0.069847
	2	0.195913	0.192217	0.190831	-0.73	0.194065	0.190831	0.189907	-0.49	0.188460
	3	0.208851	0.207927	0.207465	-0.22	0.208851	0.206541	0.206541	0.00	0.205955
	4	0.293870	0.293870	0.293870	0.00	0.290174	0.290174	0.290174	0.00	0.289959
	5	0.380737	0.373344	0.371496	-0.50	0.381661	0.374268	0.372420	-0.50	0.370033
	6	0.442653	0.442653	0.442653	0.00	0.438495	0.438495	0.438495	0.00	0.438392

ГУ	Г о н	ДМК <i>Donnell-Mustari</i>				ДМК <i>Flügge</i>				(Ye, 2014)
		M=5	M=10	M=15	Δ%	M=5	M=10	M=15	Δ%	
F-S-S-S	1	0.256905	0.256905	0.256905	0.00	0.252747	0.252747	0.252747	0.00	0.252813
	2	0.323442	0.323442	0.323442	0.00	0.319283	0.319283	0.319283	0.00	0.319360
	3	0.493018	0.493018	0.493018	0.00	0.489783	0.489783	0.489783	0.00	0.489810
	4	0.522128	0.522128	0.522128	0.00	0.518431	0.518893	0.518893	0.00	0.518657
	5	0.557706	0.557706	0.557706	0.00	0.553548	0.553548	0.553548	0.00	0.553724
	6	0.571106	0.571568	0.571568	0.00	0.566023	0.566023	0.566023	0.00	0.565953
F-C-C-C	1	0.295718	0.295718	0.295718	0.00	0.291560	0.291560	0.291560	0.00	0.291696
	2	0.344235	0.344235	0.344235	0.00	0.341000	0.341000	0.341000	0.00	0.340957
	3	0.541534	0.541534	0.541534	0.00	0.537838	0.537838	0.537838	0.00	0.537812
	4	0.552624	0.552624	0.552624	0.00	0.548465	0.548465	0.548465	0.00	0.548801
	5	0.566023	0.566023	0.566023	0.00	0.562327	0.562327	0.562327	0.00	0.562233
	6	0.675994	0.675994	0.675994	0.00	0.670911	0.670911	0.670911	0.00	0.671306
S-S-S-S	1	0.467142	0.467605	0.467605	0.00	0.462984	0.462984	0.462984	0.00	0.462718
	2	0.492556	0.492556	0.492556	0.00	0.489321	0.489321	0.489321	0.00	0.488837
	3	0.657049	0.657049	0.657049	0.00	0.652428	0.652428	0.652428	0.00	0.652094
	4	0.739296	0.739296	0.739296	0.00	0.735137	0.735599	0.735599	0.00	0.734953
	5	0.753158	0.753158	0.753158	0.00	0.748537	0.748537	0.748537	0.00	0.748423
	6	0.800288	0.800288	0.800288	0.00	0.796591	0.796591	0.796591	0.00	0.796062
S-S-S-C	1	0.482390	0.482390	0.482390	0.00	0.478232	0.478232	0.478232	0.00	0.477866
	2	0.493480	0.493480	0.493480	0.00	0.490245	0.490245	0.490245	0.00	0.489695
	3	0.698172	0.698634	0.698634	0.00	0.693552	0.693552	0.693552	0.00	0.693571
	4	0.741606	0.742068	0.742068	0.00	0.737910	0.737910	0.737910	0.00	0.737567
	5	0.766095	0.766095	0.766095	0.00	0.761475	0.761475	0.761475	0.00	0.761358
	6	0.815536	0.815536	0.815536	0.00	0.812301	0.812301	0.812301	0.00	0.811879
S-S-C-C	1	0.486087	0.486087	0.486087	0.00	0.481928	0.481928	0.481928	0.00	0.481777
	2	0.497638	0.497638	0.497638	0.00	0.494404	0.494404	0.494404	0.00	0.493835
	3	0.700945	0.700945	0.700945	0.00	0.696324	0.696324	0.696324	0.00	0.696299
	4	0.752695	0.752695	0.752695	0.00	0.748999	0.748999	0.748999	0.00	0.748728
	5	0.776261	0.776261	0.776261	0.00	0.772102	0.772102	0.772102	0.00	0.771851
	6	0.818308	0.818308	0.818308	0.00	0.815074	0.815074	0.815074	0.00	0.814492
S-C-C-C	1	0.497638	0.497638	0.497638	0.00	0.494404	0.494404	0.494404	0.00	0.493721
	2	0.506880	0.506880	0.506880	0.00	0.502721	0.502721	0.502721	0.00	0.502592
	3	0.748537	0.748537	0.748537	0.00	0.743916	0.743916	0.743916	0.00	0.743939
	4	0.759626	0.759626	0.759626	0.00	0.755930	0.755930	0.755930	0.00	0.755634
	5	0.785502	0.785502	0.785502	0.00	0.781343	0.781343	0.781343	0.00	0.781085
	6	0.824315	0.824315	0.824315	0.00	0.821542	0.821542	0.821542	0.00	0.820998

ГУ	т о н	ДМК Donnell-Mustari				ДМК Flügge				(Ye, 2014)
		M=5	M=10	M=15	Δ%	M=5	M=10	M=15	Δ%	
C-C-C-C	1	0.501797	0.501797	0.501797	0.00	0.498563	0.498563	0.498563	0.00	0.498052
	2	0.510576	0.510576	0.510576	0.00	0.506418	0.506418	0.506418	0.00	0.506370
	3	0.751309	0.751309	0.751309	0.00	0.746689	0.746689	0.746689	0.00	0.746629
	4	0.771178	0.771178	0.771178	0.00	0.767481	0.767481	0.767481	0.00	0.767215
	5	0.796129	0.796129	0.796129	0.00	0.792433	0.792433	0.792433	0.00	0.792056
	6	0.827087	0.827087	0.827087	0.00	0.824315	0.824315	0.824315	0.00	0.823765



Слика 6.13 – Прва четири облика осциловања за сегмент кружне цилиндричне љуске са FSSS граничним условима:  $h/a = 0.01$ ,  $L/a = 1.5$ ,  $2\theta = 90^\circ$ .

### Пример 6.6

Овим примером је демонстрирана могућност примене *метода динамичке крутости* на решење проблема слободних вибрација сегмента кружне цилиндричне љуске са скоковитом променом дебљине. Изабрана је љуска са једностепеном променом дебљине у правцу  $x$ -осе и са  $SD$  граничним условима на контурама  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\theta$  (комб 2), да би резултати могли да се упореде са тачним резултатима доступним у литератури (Zhang L., 2006). Zhang је користио Flügge-ову теорију танких љуски, *state-space* метод за добијање хомогених диференцијалних једначина за сегмент и метод декомпозиције домена (*domain decomposition method*) да би поставио услове

равнотеже и компатибилности на споју два сегмента. У Табели 6.6 је дато првих шест бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за пет изабраних комбинација граничних услова. Код примене динамичке матрице крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$  за комб 2 коришћена је *Flügge*-ова теорија танких љуски и корак  $df = 0.1 \text{ Hz}$ . Материјалне карактеристике и геометрија кружно цилиндричног сегмента су:  $\nu = 0.3$ ,  $L/a = 5$ ,  $L_1/L = 1/2$ ,  $2\theta = 180^\circ$ ,  $h_1/a = 0.01$  и  $h_2/h_1 = 2$ .  $L$  је укупна дужина љуске, Слика 6.6,  $L_1$  је дужина првог сегмента (од  $x=0$  до  $x=L_1$ ) и  $h_1$  је његова одговарајућа дебљина.  $h_2$  је дебљина другог сегмента (од  $x=L_1$  до  $x=L$ ). Комбинација граничних услова *C-F* значи да је контура  $x=0$  укљештена, односно да је контура  $x=L$  слободна. У Табели 6.6 је приказана и релативна разлика у процентима између решења од *Zhang*-а и решења добијених применом  $\mathbf{K}_{Dm}$  за *C-C* граничне услове, која не прелази 0.05%. Сегмент кружне цилиндричне љуске са *C-C* граничним условима моделиран је са два континуална елемента.

Табела 6.6 – Првих шест бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за сегмент кружне цилиндричне љуске са једноступеном променом дебљине у правцу  $x$ -осе и *SD-SD* граничним условима на контурама  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\theta$ :  $\nu = 0.3$ ,  $L/a = 5$ ,  $L_1/L = 1/2$ ,  $2\theta = 180^\circ$ ,  $h_1/a = 0.01$  и  $h_2/h_1 = 2$ .

ГУ	<i>C-C</i>	<i>C-SD</i>	<i>C-F</i>	<i>SD-SD</i>	<i>F-F</i>		
тон	(Zhang L., 2006)	ΔМК Flügge	Δ %	ΔМК Flügge			
1	0.08099	0.08098	0.02	0.06446	0.02588	0.05279	0.01005
2	0.08251	0.08248	0.04	0.07947	0.04459	0.07023	0.01559
3	0.09970	0.09969	0.01	0.09368	0.05660	0.07405	0.02634
4	0.12005	0.12002	0.02	0.09969	0.07913	0.08906	0.04343
5	0.12550	0.12545	0.04	0.12002	0.08167	0.11240	0.04598
6	0.13455	0.13458	-0.02	0.12314	0.08848	0.11286	0.07012



**Пример 6.7**

У 7. примеру је приказано решење за сегмент кружне цилиндричне љуске са једним прстенастим међуослонцем. Изабрана је љуска са  $SD$  граничним условима на контурама  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\theta$  (комб 2), да би резултати могли да се упореде са тачним резултатима доступним у литератури (Zhang L., 2006). Zhang је користио Flügge-ову теорију танких љуски, *state-space* метод за добијање хомогених диференцијалних једначина за сегмент и метод декомпозиције домена (*domain decomposition method*) да би поставио услове равнотеже и компатибилности на споју два сегмента. Померање  $w$  је на месту међуослонца једнако нули. У Табели 6.7 су приказана решења за  $C-F$  и  $F-F$  комбинацију граничних услова на контурама  $x = 0$  и  $x = L$ , Слика 6.6. За однос  $L/a$  изабране су вредности 1 и 10, док је угао  $2\theta = 30^\circ, 180^\circ$  и  $360^\circ$ . Положај међуослонца је на половини дужине сегмента ( $L_1/L = 1/2$ ) и  $h/a = 0.01$ . Прве три бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за усвојено  $m = 1, 2$  и  $3$  ( $m$  је број полуталаса у тангенцијалном правцу) су одређена применом тачне динамичке матрице крутости  $\mathbf{K}_{Dm}$  за комб 2 по Flügge-овој теорији,  $df = 0.01 \text{ Hz}$ . Ови резултати су упоређени са резултатима од Zhang-а и приказани су у Табели 6.7. Релативна разлика у процентима између ова два решења не прелази 0.3%, осим у случају  $F-F$  граничних услова за:  $2\theta = 360^\circ, L/a = 10$  и  $m = 3$  (2. тон), где је највероватније дошло до грешке у куцању.

Табела 6.7 - Прве три бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за усвојено  $m$  сегмента кружне цилиндричне љуске са  $SD$ - $SD$  граничним условима на контурама  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\theta$  и са једним прстенастим међуослонцем ( $w = 0$ ) на половини дужине:  $L_1/L = 1/2$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $\nu = 0.3$ .

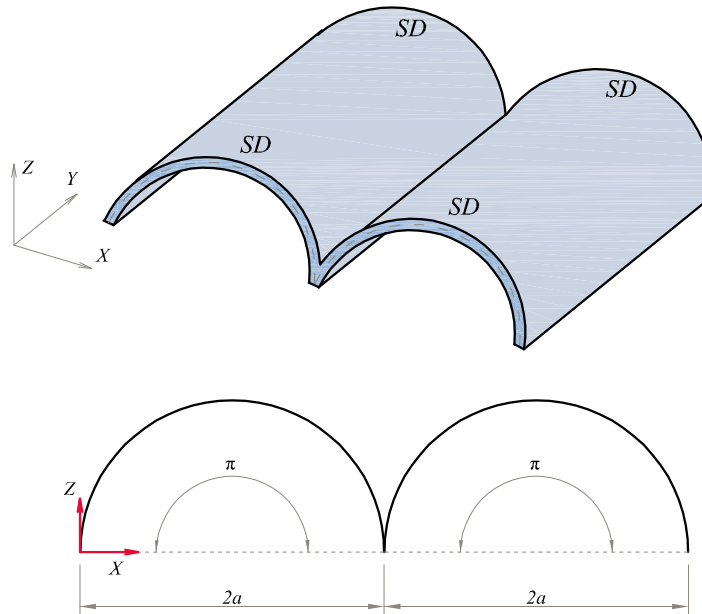
ГУ	2θ	L/a	тон	m = 1			m = 2			m = 3		
				(Zhang L., 2006)	ΔМК Flügge	Δ%	(Zhang L., 2006)	ΔМК Flügge	Δ%	(Zhang L., 2006)	ΔМК Flügge	Δ%
C-F	30°	1	1	0.204323	0.204323	0.00	0.437836	0.437836	0.00	0.950666	0.950665	0.00
			2	0.566543	0.566543	0.00	0.623428	0.623423	0.00	1.084381	1.084390	0.00
			3	0.693065	0.693067	0.00	0.730025	0.730020	0.00	1.193543	1.193550	0.00
		10	1	0.099743	0.099747	0.00	0.410723	0.410725	0.00	0.929271	0.929272	0.00
			2	0.102412	0.102416	0.00	0.412600	0.412596	0.00	0.932149	0.932148	0.00
			3	0.104154	0.104160	-0.01	0.413424	0.413428	0.00	0.932769	0.932772	0.00
	180°	1	1	0.616532	0.616526	0.00	0.447162	0.447158	0.00	0.342852	0.342848	0.00
			2	0.936973	0.936976	0.00	0.846298	0.846297	0.00	0.738011	0.738014	0.00
			3	0.961990	0.961985	0.00	0.925565	0.925564	0.00	0.870862	0.870867	0.00
		10	1	0.044439	0.044439	0.00	0.020794	0.020793	0.01	0.024067	0.024062	0.02
			2	0.151430	0.151429	0.00	0.106686	0.106690	0.00	0.061148	0.061154	-0.01
			3	0.237409	0.237406	0.00	0.118529	0.118530	0.00	0.076307	0.076309	0.00
360°	1	1	0.752607	0.752603	0.00	0.616532	0.616526	0.00	0.51943	0.519425	0.00	
		2	0.956663	0.956660	0.00	0.936973	0.936976	0.00	0.898873	0.898868	0.00	
		3	0.970940	0.970938	0.00	0.961990	0.961985	0.00	0.946547	0.946553	0.00	
	10	1	0.060562	0.060565	0.00	0.044439	0.044439	0.00	0.029456	0.029456	0.00	
		2	0.171339	0.171343	0.00	0.151430	0.151429	0.00	0.135750	0.135753	0.00	
		3	0.324153	0.324158	0.00	0.237409	0.237406	0.00	0.160611	0.160612	0.00	

6. Континуални елемент сегмента кружне цилиндричне љуске за анализу вибрација

ГУ	2θ	L/a	тон	m = 1			m = 2			m = 3		
				(Zhang L., 2006)	ΔМК Flügge	Δ%	(Zhang L., 2006)	ΔМК Flügge	Δ%	(Zhang L., 2006)	ΔМК Flügge	Δ%
F-F	30°	1	1	0.119401	0.119396	0.00	0.431302	0.431298	0.00	0.948317	0.948320	0.00
			2	0.256865	0.256871	0.00	0.445117	0.445114	0.00	0.953225	0.953229	0.00
			3	0.677106	0.677102	0.00	0.702879	0.702874	0.00	1.172621	1.172620	0.00
		10	1	0.099695	0.099689	0.01	0.410722	0.410722	0.00	0.929271	0.929271	0.00
			2	0.099796	0.099793	0.00	0.411063	0.410725	0.08	0.929271	0.929271	0.00
			3	0.103116	0.103120	0.00	0.413365	0.413486	-0.03	0.932748	0.932748	0.00
	180°	1	1	0.272137	0.272142	0.00	0.013937	0.013931	0.04	0.034728	0.034724	0.01
			2	0.877678	0.877683	0.00	0.332188	0.332186	0.00	0.329426	0.329426	0.00
			3	0.960294	0.960299	0.00	0.920712	0.920712	0.00	0.854434	0.854429	0.00
		10	1	0.061015	0.061015	0.00	0.007869	0.007867	0.03	0.022056	0.022052	0.02
			2	0.159533	0.159538	0.00	0.029064	0.029064	0.00	0.026062	0.026060	0.01
			3	0.261700	0.261699	0.00	0.115557	0.115561	0.00	0.063283	0.063279	0.01
360°	1	1	0.001274	0.001271	0.26	0.272137	0.272142	0.00	0.005369	0.005371	-0.05	
		2	0.170822	0.170824	0.00	0.877678	0.877683	0.00	0.316205	0.316211	0.00	
		3	0.919934	0.919938	0.00	0.960294	0.960299	0.00	0.900175	0.900173	0.00	
	10	1	0.001063	0.001063	0.02	0.061015	0.061015	0.00	0.003082	0.003084	-0.07	
		2	0.051080	0.051081	0.00	0.159533	0.159538	0.00	0.012774	0.042775	-234.86	
		3	0.217853	0.217850	0.00	0.261700	0.261699	0.00	0.140342	0.140339	0.00	

**Пример 6.8**

У последњем примеру су одређене бездимензионалне сопствене фреквенције  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за бачvasti кров приказан на Слици 6.14.

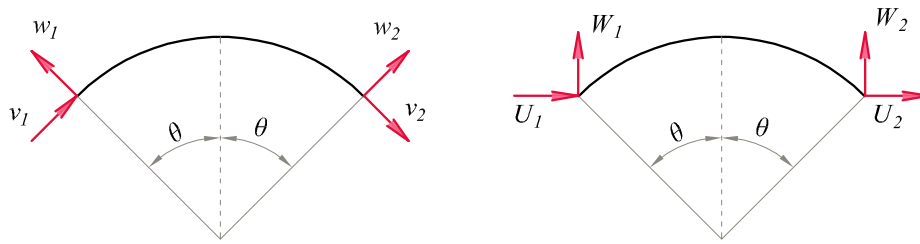


Слика 6.14 – Диспозиција бачvastог крова

Изабрани су сегменти кружне цилиндричне љуске са  $SD$  граничним условима на две паралелне контуре (комб 5) за које постоји решење у затвореном облику, односно за које је изведена тачна динамичка матрица крутости.  $\mathbf{K}_{Dm}$  за сваки сегмент мора прво да се трансформише из локалног координатног система у глобални координати систем, који је приказан на Слици 6.14. Веза између компоненти вектора померања контура, паралелних са глобалном  $Y$ -осом, у локалном и глобалном координатном систему је:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \Psi_{y,1} \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \Psi_{y,2} \end{bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 8} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ u_1 \\ w_1 \\ \Psi_{x,1} \\ v_2 \\ u_2 \\ w_2 \\ \Psi_{x,2} \end{bmatrix}_{8 \times 1} \quad (6.83)$$

Померања контура које треба да се трансформишу при преласку из локалног у глобални координатни систем приказане су на Слици 6.15.



Слика 6.15 – Компоненте вектора померања у локалном и глобалном координатном систему

Када је одређена матрица трансформације, једначина (6.83), динамичка матрица крутости у глобалном координатном систему може да се одреди на основу следећег израза:

$$\mathbf{K}_{Dm}^G = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{K}_{Dm} \cdot (\mathbf{T}^*)^T \quad (6.84)$$

За однос  $h/a$  је усвојена вредност 0.005, док је  $L/a=5$ . У Табели 6.8 је дато првих пет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega}$  за случај  $F$  и  $S$  граничних услова на контурама  $X=0, 2a$  и  $4a$ . Резултати су одређени коришћењем два континуална елемента сегмента кружне цилиндричне љуске по *Flügge*-овој теорији, као и применом програма *Abaqus*, где је за моделирање љуске полупречника  $a=2\text{ m}$  коришћено 50400 *S4R* коначних елемената. У Табели 6.8 број  $m$  представља број полуталаса одговарајућег облика осциловања у правцу глобалне  $Y$ -осе.

Табела 6.8 – Првих пет бездимензионалних сопствених фреквенција  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$  за бачvasti кров састављен од два сегмента кружне цилиндричне љуске:  $\nu=0.3, L/a=5, 2\theta=180^\circ$  и  $h/a=0.05$ .

ГУ	$F-F-F$			$S-S-S$		
тон	ДМК <i>Flügge</i>	<i>Abaqus</i>	$m$	ДМК <i>Flügge</i>	<i>Abaqus</i>	$m$
1	0.022872	0.022899	(1)	0.076055	0.076147	(1)
2	0.047361	0.047264	(2)	0.078227	0.078319	(1)
3	0.062794	0.062817	(1)	0.081554	0.081646	(1)
4	0.064134	0.064185	(1)	0.111680	0.111865	(1)
5	0.066398	0.066440	(1)	0.116162	0.116393	(1)

## 7 ЗАКЉУЧЦИ И ПРЕПОРУКЕ

У оквиру ове докторске дисертације је примењен метод динамичке крутости у анализи вибрација и избочавања плоча и љуски. Метод динамичке крутости се заснива на примени динамичких матрица крутости, односно матрица крутости за избочавање, које се одређују на основу тачног решења парцијалних диференцијалних једначина којима је дефинисан проблем. По аналогији са МКЕ, основни елемент у методи динамичке крутости је континуални елемент. Један континуални елемент на тачан начин описује понашање елемента коначних димензија константних материјалних и геометријских карактеристика. Самим тим, избегнута је потреба за дискретизацијом домена. Такође, метод динамичке крутости је задржао предности МКЕ у односу на остала позната аналитичка решења. Глобална матрица крутости система се формира на исти начин као у МКЕ, па је самим тим методом динамичке крутости могућа анализа система који се састоје од више различитих елемената.

Допринос овог рада се огледа у значајном проширењу постојеће базе континуалних елемената. У дисертацији је формулисана динамичка матрица крутости правоугаоне плоче по *Mindlin*-овој теорији, као и сегмента кружне цилиндричне љуске по *Donnell-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији. Општа решења проблема слободних вибрација правоугаоне *Mindlin*-ове плоче и сегмента кружне цилиндричне љуске добијена су на основу метода суперпозиције. Применом овог решења, као и метода пројекције, којим су померања и силе на контурама елемента апроксимирани *Fourier*-овом редом, омогућено је извођење динамичких матрица крутости. Тачност ових динамичких матрица крутости зависи од броја чланова реда  $M$  коришћених у решењу.

Поред тога, на основу аналитичког решења у затвореном облику изведене су и тачне матрице крутости *Maurice Lévy*-еве плоче по *Mindlin*-овој теорији (за анализу вибрација, избочавања и вибрација услед константног оптерећења у равни), као и тачне матрице крутости по *Donnell-Mushtari*-евој и *Flügge*-овој теорији затворене кружне цилиндричне љуске (за анализу вибрација и избочавања услед константног аксијалног оптерећења), односно сегмента кружне цилиндричне љуске са специјалним граничним

условима, који су дефинисани у Поглављу 6.1.5 (за анализу вибрација).

*Матрице крутости* изведене у оквиру тезе су имплементирани у *Matlab* програм за анализу вибрација и избочавања плоча и љуски. Развијени *Matlab* програм садржи алгоритам за формирање глобалних матрица крутости, чиме је омогућена његова примена и код система плоча и љуски. Резултати добијени применом *метода динамичке крутости* су верификовани кроз многобројне примере. За валидацију резултата су коришћена аналитичка решења доступна у литератури, а у случају да она не постоје, коришћена су доступна нумеричка решења из литературе, као и решења добијена помоћу *МКЕ*. Закључци, који су изведени на основу нумеричких примера, су:

- Предности *метода динамичке крутости* у односу на конвенционални *МКЕ* су његова тачност, минимизација дискретизације домена која је условљена само променом геометријских и материјалних карактеристика система, као и скраћено време прорачуна нарочито у области високих фреквенција. Такође, битна предност *метода динамичке крутости* у односу на остала позната аналитичка решења је што тачне матрице крутости на једноставан начин могу да се примене и у анализи вибрација и избочавања система плоча и љуски.
- Код примене *динамичке матрице крутости Mindlin*-ове плоче коришћењем само 3-5 чланова реда решења добијају се резултати високе тачности (релативна разлика  $<1\%$  у односу на доступна тачна решења).
- Због спорије конвергенције решење сегмента кружне цилиндричне љуске, потребан је већи број чланова реда решења у поређењу са елементом *Mindlin*-ове плоче. Потребан број чланова реда зависи од граничних услова и геометрије. Што је више слободних контура конвергенција решења је спорија. За сегмент кружне цилиндричне љуске са две слободне контуре резултати за све тонове исконвергирају за 15 чланова реда, док за сегмент са једном или без слободних контура резултати исконвергирају већ за 5 чланова реда решења. Што се тиче геометрије сегмента кружне цилиндричне љуске, за углове  $2\theta \geq 180^\circ$  смањена је брзина конвергенције решења.

Препоруке за будућа истраживања у области *метода динамичке крутости* се односе на формулисање следећих континуалних елемената, односно њихових матрица крутости,:

- композитне плоче на основу *HSDT* теорије,
- дебеле затворене кружне цилиндричне љуске, као и сегмента кружне цилиндричне љуске код којих је узет у обзир утицај деформације смицања и ротационе инерције,
- кружне цилиндричне љуске услед константног радијалног притиска.



## 8 ЛИТЕРАТУРА

Abaqus. *Users manual. Version 6.9*. Providence, RI, USA: DS SIMULIA Corp, 2009.

Alford, R. M. "Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation." *Geophysics*, 1974: 834-842.

Anderson, M. S., and D. Kennedy. *Inclusion of transverse shear deformation in exact buckling and vibration of composite plate assemblies*. Langley, Hampton: NASA, 1993.

Anderson, M. S., and D. Kennedy. "Transverse shear deformation in exact buckling and vibration of composite plate assemblies." *AIAA Journal* 31(10) (1993): 1963-1965.

Boscolo, M., and J. R. Banerjee. "Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory." *Computers and Structures* 89 (2011): 395-410.

Casimir, J. B., M. C. Nguyen, and I. Tawfiq. "Thick shells of revolution: Derivation of the dynamic stiffness matrix of continuous elements and application to a tested cylinder." *Computers and Structures* 85 (2007): 1845-1857.

Doyle, J. F. *Wave propagation in structures*. New York: Springer-Verlag, 1997.

Efrain, E., and M. Eisenberger. "Dynamic stiffness vibration analysis of thick spherical shell segments with variable thickness." *Journal of mechanics of materials and structures* 5 (2010).

Efrain, E., and M. Eisenberger. "Exact vibration frequencies of segmented axisymmetric shells." *Thin-Walled Structures* 44 (2006): 281-289.

Fazzolari, F. A., M. Boscolo, and J. R. Banerjee. "An exact dynamic stiffness element using a higher order shear deformation theory for free vibration analysis of composite plate assemblies." *Composite Structures* 96 (2013): 262-278.

Gorman, D. J. "Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition." *Journal of Sound and Vibration*, 1978: 437-447.

Gorman, D. J., and Ding Wei. "Accurate free vibration analysis of the completely free rectangular Mindlin plate." *Journal of Sound and Vibration*, 1996: 341-353.

Hajdin, Nikola. *Teorija površinskih nosača*. Beograd: Građevinski fakultet Naučna knjiga, 1989.

Hosseini-Hashemi, Shahrokh, Korosh Khorshidi, and Marco Amabili. "Exact solution for linear buckling of rectangular Mindlin plates." *Journal of Sound and Vibration*, 2008: 318-342.

Kadi, A. S. *A Study and Comparison of the Equations of Thin Shell Theories*. Ohio State University: Dissertation, 1970.

Kevorkian, S., and M. Pascal. "An accurate method for free vibration analysis of structures with application to plates." *Journal of Sound and Vibration* 246(5) (2001): 795-814.

Khadimallah, M. A., J. B. Casimir, M. Chafra, and H. Smaoui. "Dynamic stiffness matrix of an axisymmetric shell and response to harmonic distributed loads." *Computers and Structures* 89 (2011): 467-475.

Kolarevic, N, M Marjanovic, M Nefovska-Danilovic, and M Petronijevic. "Free vibration analysis of plate assemblies using the dynamic stiffness method based on the higher order shear deformation theory." *Journal of Sound and Vibration*, 2016: 110-132.

Kolarevic, N., M. Nefovska-Danilovic, and M. Petronijevic. "Dynamic stiffness elements for free vibration analysis of rectangular Mindlin plate assemblies." *Journal of Sound and Vibration*, 2015: 84-106.

Kraus, H. *Thin Elastic Shells*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1967.

Kulla, P. H. "High precision finite elements." *Finite Elements in Analysis and Design*, 1997: 97-114.

Le Sourne, Herve. *Developpement d'elements continus de coques axisymetriques et de coudes*. PhD Thesis, Universite de Nantes, 1998.

Lee, U. *Spectral element method in structural dynamic*. John Wiley & Sons, 2009.

Lee, Usik. *Spectral element method in structural dynamics*. Singapore 129809: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2009.

Leissa, Arthur W. *Vibration of shells*. Washington, D.C.: US Government Printing Office, 1973.

Leissa, Arthur W. *Vibration of plates*. Washington, D. C.: NASA, United States, 1969.

Leung, A. Y., and W. E. Zou. "Dynamic Stiffness Analysis of Circular Cylindrical Shells." *The International Society of Offshore and Polar Engineers*. 1993.

Leung, A. Y., and W. E. Zou. "Dynamic stiffness analysis of laminated composite plate." *Thin-Walled Structures* 25(2) (1996): 109-133.

Liew, K. M., Y. Xiang, and S. Kitipornchai. "Analytical buckling solutions for Mindlin plates involving free edges." *International Journal of Mechanical Sciences*, 1995: 1127-1138.

Liew, K. M., Y. Xiang, and S. Kitipornchai. "Transverse vibration of thick rectangular plates- I. Comprehensive sets of boundary conditions." *Computers and Structures* 49, no. 1 (1993): 1-29.

Love, A E H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press, 1892.

Matlab, MathWorks Inc. *The Language of Technical Computing*. MATLAB 2011b, 2011.

Mindlin, R. D. "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates." *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1951: 31-38.

Nefovska-Danilovic, M., and M. Petronijevic. "In-plane free vibration and response analysis of isotropic rectangular plates using the dynamic stiffness method." *Computers and Structures*, 2015: 82-95.

Nguyen, M. C., and I. T. Tran. "Continuous element for vibration analysis of thick shells of revolution." *Vietnam Journal of Mechanics* 33 (2011): 41-54.

Nosier, A., and J. N. Reddy. "A study of non-linear dynamics equations of higher-order shear deformation plate theories." *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1991: 233-249.

Shufrin, I., and M. Eisenberger. "Stability and vibration of shear deformable plates-first order and higher order analysis." *International Journal of Solids and Structures*, 2005: 1225-1251.

Tounsi, D., J. B. Casimir, S. Abid, I. Tawfiq, and M. Haddar. "Dynamic stiffness formulation and response analysis of stiffened shells." *Computers and Structures* 132 (2014): 75-83.

Wittrick, F. W., and W. H. Williams. "Computational procedures for a matrix analysis of the stability and vibration of thin flat-walled structures in compression." *International Journal of Mechanical Sciences*, 1969: 979-98.

Wittrick, W H, and F W Williams. "A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures." *Quarterly J Mech Appl Math*, 1970: 263-284.

Wittrick, W. H. "A unified approach to initial buckling of stiffened panels in compression." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1968: 1067-81.

Wittrick, W. H. "General sinusoidal stiffness matrices for buckling and vibration analyses of thin flat-walled structures." *International Journal of Mechanical Sciences*, 1968: 949-66.

Wittrick, W. H., and F. W. Williams. "Buckling and vibration of anisotropic or isotropic plate assemblies under combined loadings." *International Journal of Mechanical Sciences*, 1974: 209-239.

Xiang, Y. "Buckling of intermediate ring supported cylindrical shells under axial compression." *Thin-Walled Structures*, 2005: 427-433.

Xiang, Y. "Exact solutions for vibration of cylindrical shells with intermediate ring supports." *International Journal of Mechanical Sciences*, 2002: 1907-1924.

Xiang, Y., and G. W. Wei. "Exact solutions for buckling and vibration of stepped rectangular Mindlin plates." *International Journal of Solids and Structures*, 2004: 279-294.

Xing, Yufeng. "Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions." *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013: 178-188.

Xing, Yufeng, and Bo Liu. "Closed form solutions for free vibrations of rectangular Mindlin plates." *Acta Mech Sin*, 2009: 689–698.

Ye, Tiangui. "A unified formulation for vibration analysis of open shells with arbitrary boundary conditions." *International Journal of Mechanical Sciences*, 2014: 42-59.

Yu, S. D., W. L. Cleghorn, and R. G. Fenton. "On the accurate analysis of free vibration of open circular cylindrical shells." *Journal of Sound and Vibration*, 1995: 315-336.

Zhang, L. "Exact solutions for vibration of stepped circular cylindrical shells." *Journal of Sound and Vibration*, 2007: 948-964.

Zhang, L. "Local adaptive differential quadrature for free vibration analysis of cylindrical shells with various boundary conditions." *International Journal of Mechanical Sciences*, 2006: 1126-1138.

Zhang, L. "Vibration of open circular cylindrical shells with intermediate ring supports." *International Journal of Solids and Structures*, 2006: 3705–3722.

Zhang, L. "Vibration of Open Cylindrical Shells with Stepped Thickness Variations." *Journal of engineering mechanics*, 2006: 780-784.

Zhang, X. M. "Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach." *Journal of Sound and Vibration*, 2001: 397-403.

Ziegler, H. "The influence of inplane deformation on the buckling loads of isotropic plates." *Ingenieur-Archiv*, 1983: 61-72.

## 9 ПРИЛОЗИ

### 9.1 Mindlin-ова плоча вибрације

#### 9.1.1 SS део

Матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{SS}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{SS}$  се састоје од четири различита блока матрица:

$$\left[ \tilde{\mathbf{D}}^{SS} \right] = \begin{bmatrix} \boxed{D_{00}^{SS}}_{4 \times 4} & \boxed{D_{0m}^{SS}}_{4 \times 6} & \cdots & \boxed{D_{0m}^{SS}}_{4 \times 6} \\ \boxed{D_{n0}^{SS}}_{6 \times 4} & \boxed{D_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{D_{n0}^{SS}}_{6 \times 4} & \boxed{D_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{(6M+4) \times (6M+4)}$$

$$\left[ \tilde{\mathbf{F}}^{SS} \right] = \begin{bmatrix} \boxed{F_{00}^{SS}}_{4 \times 4} & \boxed{F_{0m}^{SS}}_{4 \times 6} & \cdots & \boxed{F_{0m}^{SS}}_{4 \times 6} \\ \boxed{F_{n0}^{SS}}_{6 \times 4} & \boxed{F_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{F_{n0}^{SS}}_{6 \times 4} & \boxed{F_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{(6M+4) \times (6M+4)}$$

Када је  $m \geq 1$  и  $n \geq 1$  важе блок матрице  $\boxed{D_{nm}^{SS}}_{6 \times 6}$  и  $\boxed{F_{nm}^{SS}}_{6 \times 6}$ :

$$\boxed{D_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} (-1)^m I_{1,nn}^{SS} & (-1)^m I_{2,nn}^{SS} & 0 & \cosh({}^2r_{1,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} & \cosh({}^2r_{2,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^2\delta_{1,m}^{SS} \sinh({}^2r_{1,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} & {}^2\delta_{2,m}^{SS} \sinh({}^2r_{2,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} & {}^2\delta_{3,m}^{SS} \sinh({}^2r_{3,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} \\ {}^1\gamma_{1,m}^{SS} (-1)^m I_{5,nn}^{SS} & {}^1\gamma_{2,m}^{SS} (-1)^m I_{6,nn}^{SS} & {}^1\gamma_{3,m}^{SS} (-1)^m I_{7,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{1,m}^{SS} \cosh({}^2r_{1,m}^{SS}a)I_{8,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{2,m}^{SS} \cosh({}^2r_{2,m}^{SS}a)I_{8,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{3,m}^{SS} \cosh({}^2r_{3,m}^{SS}a)I_{8,nn}^{SS} \\ \cosh({}^1r_{1,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & \cosh({}^1r_{2,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & 0 & (-1)^m I_{10,nn}^{SS} & (-1)^m I_{11,nn}^{SS} & 0 \\ {}^1\gamma_{1,m}^{SS} \sinh({}^1r_{1,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & {}^1\gamma_{2,m}^{SS} \sinh({}^1r_{2,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & {}^1\gamma_{3,m}^{SS} \sinh({}^1r_{3,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\delta_{1,m}^{SS} \cosh({}^1r_{1,m}^{SS}b)I_{13,nn}^{SS} & {}^1\delta_{2,m}^{SS} \cosh({}^1r_{2,m}^{SS}b)I_{13,nn}^{SS} & {}^1\delta_{3,m}^{SS} \cosh({}^1r_{3,m}^{SS}b)I_{13,nn}^{SS} & {}^2\delta_{1,m}^{SS} (-1)^m I_{14,nn}^{SS} & {}^2\delta_{2,m}^{SS} (-1)^m I_{15,nn}^{SS} & {}^2\delta_{3,m}^{SS} (-1)^m I_{16,nn}^{SS} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F_{nm}^{SS}}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^2T_{x1,m}^{SS} \sinh({}^2r_{1,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} & {}^2T_{x2,m}^{SS} \sinh({}^2r_{2,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} & {}^2T_{x3,m}^{SS} \sinh({}^2r_{3,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} \\ {}^1M_{x1,m}^{SS} (-1)^m I_{1,nn}^{SS} & {}^1M_{x2,m}^{SS} (-1)^m I_{2,nn}^{SS} & {}^1M_{x3,m}^{SS} (-1)^m I_{3,nn}^{SS} & {}^2M_{x1,m}^{SS} \cosh({}^2r_{1,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} & {}^2M_{x2,m}^{SS} \cosh({}^2r_{2,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} & {}^2M_{x3,m}^{SS} \cosh({}^2r_{3,m}^{SS}a)I_{4,nn}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & -{}^2M_{xy1,m}^{SS} \sinh({}^2r_{1,m}^{SS}a)I_{8,nn}^{SS} & -{}^2M_{xy2,m}^{SS} \sinh({}^2r_{2,m}^{SS}a)I_{8,nn}^{SS} & -{}^2M_{xy3,m}^{SS} \sinh({}^2r_{3,m}^{SS}a)I_{8,nn}^{SS} \\ {}^1T_{y1,m}^{SS} \sinh({}^1r_{1,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & {}^1T_{y2,m}^{SS} \sinh({}^1r_{2,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & {}^1T_{y3,m}^{SS} \sinh({}^1r_{3,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & 0 & 0 & 0 \\ -{}^1M_{y1,m}^{SS} \cosh({}^1r_{1,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & -{}^1M_{y2,m}^{SS} \cosh({}^1r_{2,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & -{}^1M_{y3,m}^{SS} \cosh({}^1r_{3,m}^{SS}b)I_{9,nn}^{SS} & -{}^2M_{y1,m}^{SS} (-1)^m I_{10,nn}^{SS} & -{}^2M_{y2,m}^{SS} (-1)^m I_{11,nn}^{SS} & -{}^2M_{y3,m}^{SS} (-1)^m I_{12,nn}^{SS} \\ {}^1M_{xy1,m}^{SS} \sinh({}^1r_{1,m}^{SS}b)I_{13,nn}^{SS} & {}^1M_{xy2,m}^{SS} \sinh({}^1r_{2,m}^{SS}b)I_{13,nn}^{SS} & {}^1M_{xy3,m}^{SS} \sinh({}^1r_{3,m}^{SS}b)I_{13,nn}^{SS} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Када је  $m \geq 1$  и  $n = 0$  важе блок матрице  $\boxed{D_{0m}^{SS}}_{4 \times 6}$  и  $\boxed{F_{0m}^{SS}}_{4 \times 6}$  које се добијају када се из блок матрица  $\boxed{D_{nm}^{SS}}_{6 \times 6}$  и  $\boxed{F_{nm}^{SS}}_{6 \times 6}$  уклоне 3. и 6. врста.

Пошто је  $m \neq n$  интеграл  $I_{4,nn}^{SS}$  и  $I_{9,nn}^{SS}$  су једнаки нули.

$$\boxed{D_{0m}^{SS}}_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} (-1)^m I_{1,0m}^{SS} & (-1)^m I_{2,0m}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^m I_{10,0m}^{SS} & (-1)^m I_{11,0m}^{SS} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{F_{0m}^{SS}}_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1M_{x1,m}^{SS} (-1)^m I_{1,0m}^{SS} & {}^1M_{x2,m}^{SS} (-1)^m I_{2,0m}^{SS} & {}^1M_{x3,m}^{SS} (-1)^m I_{3,0m}^{SS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -{}^2M_{y1,m}^{SS} (-1)^m I_{10,0m}^{SS} & -{}^2M_{y2,m}^{SS} (-1)^m I_{11,0m}^{SS} & -{}^2M_{y3,m}^{SS} (-1)^m I_{12,0m}^{SS} \end{bmatrix}$$

Када је  $m = 0$  и  $n = 0$  важе блок матрице  $\boxed{D_{00}^{SS}}_{4 \times 4}$  и  $\boxed{F_{00}^{SS}}_{4 \times 4}$ , односно блок матрице  $\boxed{D_{n0}^{SS}}_{6 \times 4}$  и  $\boxed{F_{n0}^{SS}}_{6 \times 4}$  важе када је  $m = 0$  и  $n \geq 1$ :

$$\boxed{D_{00}^{SS}}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} I_{1,00}^{SS} & I_{2,00}^{SS} & \cosh({}^2r_{1,0}^{SS} a) & \cosh({}^2r_{2,0}^{SS} a) \\ 0 & 0 & {}^2\delta_{1,0}^{SS} \sinh({}^2r_{1,0}^{SS} a) & {}^2\delta_{2,0}^{SS} \sinh({}^2r_{2,0}^{SS} a) \\ \cosh({}^1r_{1,0}^{SS} b) & \cosh({}^1r_{2,0}^{SS} b) & I_{10,00}^{SS} & I_{11,00}^{SS} \\ {}^1\gamma_{1,0}^{SS} \sinh({}^1r_{1,0}^{SS} b) & {}^1\gamma_{2,0}^{SS} \sinh({}^1r_{2,0}^{SS} b) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{F_{00}^{SS}}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & {}^2T_{x1,0}^{SS} \sinh({}^2r_{1,0}^{SS} a) & {}^2T_{x2,0}^{SS} \sinh({}^2r_{2,0}^{SS} a) \\ {}^1M_{x1,0}^{SS} I_{1,00}^{SS} & {}^1M_{x2,0}^{SS} I_{2,00}^{SS} & {}^2M_{x1,0}^{SS} \cosh({}^2r_{1,0}^{SS} a) & {}^2M_{x2,0}^{SS} \cosh({}^2r_{2,0}^{SS} a) \\ {}^1T_{y1,0}^{SS} \sinh({}^1r_{1,0}^{SS} b) & {}^1T_{y2,0}^{SS} \sinh({}^1r_{2,0}^{SS} b) & 0 & 0 \\ -{}^1M_{y1,0}^{SS} \cosh({}^1r_{1,0}^{SS} b) & -{}^1M_{y2,0}^{SS} \cosh({}^1r_{2,0}^{SS} b) & -{}^2M_{y1,0}^{SS} I_{10,00}^{SS} & -{}^2M_{y2,0}^{SS} I_{11,00}^{SS} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{D_{n0}^{SS}}_{6 \times 4} = \begin{bmatrix} I_{1,n0}^{SS} & I_{2,n0}^{SS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\gamma_{1,0}^{SS} I_{5,n0}^{SS} & {}^1\gamma_{2,0}^{SS} I_{6,n0}^{SS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{10,n0}^{SS} & I_{11,n0}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^2\delta_{1,0}^{SS} I_{14,n0}^{SS} & {}^2\delta_{2,0}^{SS} I_{15,n0}^{SS} \end{bmatrix} \quad \boxed{F_{n0}^{SS}}_{6 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1M_{x1,0}^{SS} I_{1,n0}^{SS} & {}^1M_{x2,0}^{SS} I_{2,n0}^{SS} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^2M_{y1,0}^{SS} I_{10,n0}^{SS} & -{}^2M_{y2,0}^{SS} I_{11,n0}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Интеграли:

$$I_{j, nm}^{SS} = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \cosh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy = \begin{cases} \frac{\sinh({}^1r_{i,m}^{SS} b)}{{}^1r_{i,m}^{SS} b}; & n = 0 \\ \frac{2 {}^1r_{i,m}^{SS} b (-1)^n \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} b)}{n^2 \pi^2 + ({}^1r_{i,m}^{SS} b)^2}; & n > 0 \end{cases}$$

$$I_{4, nm}^{SS} = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases}$$

$$I_{j, nm}^{SS} = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ -\frac{2n\pi (-1)^n \sinh({}^1r_{i,m}^{SS} b)}{n^2 \pi^2 + ({}^1r_{i,m}^{SS} b)^2}; & n > 0 \end{cases}$$

$$I_{8, nm}^{SS} = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \neq 0 \\ 0; & m = n = 0 \end{cases}$$

$$I_{9, nm}^{SS} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases}$$

$$I_{j, nm}^{SS} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \cosh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} \frac{\sinh({}^2r_{i,m}^{SS} a)}{{}^2r_{i,m}^{SS} a}; & n = 0 \\ \frac{2 {}^2r_{i,m}^{SS} a (-1)^n \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} a)}{n^2 \pi^2 + ({}^2r_{i,m}^{SS} a)^2}; & n > 0 \end{cases}$$

$$I_{13, nm}^{SS} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \neq 0 \\ 0; & m = n = 0 \end{cases}$$

$$I_{j, nm}^{SS} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ -\frac{2n\pi (-1)^n \sinh({}^2r_{i,m}^{SS} a)}{n^2 \pi^2 + ({}^2r_{i,m}^{SS} a)^2}; & n > 0 \end{cases}$$

### 9.1.2 SA део

Матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{SA}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{SA}$  се састоје од четири различита блока матрица:

$$[\tilde{\mathbf{D}}^{SA}] = \begin{bmatrix} \boxed{D_{00}^{SA}}_{2 \times 2} & \boxed{D_{0m}^{SA}}_{2 \times 6} & \cdots & \boxed{D_{0m}^{SA}}_{2 \times 6} \\ \boxed{D_{n0}^{SA}}_{6 \times 2} & \boxed{D_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{D_{n0}^{SA}}_{6 \times 2} & \boxed{D_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{(6M+2)(6M+2)} \quad [\tilde{\mathbf{F}}^{SA}] = \begin{bmatrix} \boxed{F_{00}^{SA}}_{2 \times 2} & \boxed{F_{0m}^{SA}}_{2 \times 6} & \cdots & \boxed{F_{0m}^{SA}}_{2 \times 6} \\ \boxed{F_{n0}^{SA}}_{6 \times 2} & \boxed{F_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{F_{n0}^{SA}}_{6 \times 2} & \boxed{F_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{(6M+2)(6M+2)}$$

Када је  $m \geq 1$  и  $n \geq 1$  важе блок матрице  $\boxed{D_{nm}^{SA}}_{6 \times 6}$  и  $\boxed{F_{nm}^{SA}}_{6 \times 6}$ :

$$\boxed{D_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} (-1)^m I_{1, nm}^{SA} & (-1)^m I_{2, nm}^{SA} & 0 & \cosh({}^2r_{1, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} & \cosh({}^2r_{2, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^2\delta_{1, m}^{SA} \sinh({}^2r_{1, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} & {}^2\delta_{2, m}^{SA} \sinh({}^2r_{2, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} & {}^2\delta_{3, m}^{SA} \sinh({}^2r_{3, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} \\ (-1)^m {}^1\gamma_{1, m}^{SA} I_{5, nm}^{SA} & (-1)^m {}^1\gamma_{2, m}^{SA} I_{6, nm}^{SA} & (-1)^m {}^1\gamma_{3, m}^{SA} I_{7, nm}^{SA} & {}^2\gamma_{1, m}^{SA} \cosh({}^2r_{1, m}^{SA} a) I_{8, nm}^{SA} & {}^2\gamma_{2, m}^{SA} \cosh({}^2r_{2, m}^{SA} a) I_{8, nm}^{SA} & {}^2\gamma_{3, m}^{SA} \cosh({}^2r_{3, m}^{SA} a) I_{8, nm}^{SA} \\ \sinh({}^1r_{1, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & \sinh({}^1r_{2, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & 0 & (-1)^{m-1} I_{10, nm}^{SA} & (-1)^{m-1} I_{11, nm}^{SA} & 0 \\ {}^1\gamma_{1, m}^{SA} \cosh({}^1r_{1, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & {}^1\gamma_{2, m}^{SA} \cosh({}^1r_{2, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & {}^1\gamma_{3, m}^{SA} \cosh({}^1r_{3, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\delta_{1, m}^{SA} \sinh({}^1r_{1, m}^{SA} b) I_{13, nm}^{SA} & {}^1\delta_{2, m}^{SA} \sinh({}^1r_{2, m}^{SA} b) I_{13, nm}^{SA} & {}^1\delta_{3, m}^{SA} \sinh({}^1r_{3, m}^{SA} b) I_{13, nm}^{SA} & {}^2\delta_{1, m}^{SA} (-1)^{m-1} I_{14, nm}^{SA} & {}^2\delta_{2, m}^{SA} (-1)^{m-1} I_{15, nm}^{SA} & {}^2\delta_{3, m}^{SA} (-1)^{m-1} I_{16, nm}^{SA} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F_{nm}^{SA}}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^2T_{x1, m}^{SA} \sinh({}^2r_{1, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} & {}^2T_{x2, m}^{SA} \sinh({}^2r_{2, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} & {}^2T_{x3, m}^{SA} \sinh({}^2r_{3, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} \\ {}^1M_{x1, m}^{SA} (-1)^m I_{1, nm}^{SA} & {}^1M_{x2, m}^{SA} (-1)^m I_{2, nm}^{SA} & {}^1M_{x3, m}^{SA} (-1)^m I_{3, nm}^{SA} & {}^2M_{x1, m}^{SA} \cosh({}^2r_{1, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} & {}^2M_{x2, m}^{SA} \cosh({}^2r_{2, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} & {}^2M_{x3, m}^{SA} \cosh({}^2r_{3, m}^{SA} a) I_{4, nm}^{SA} \\ 0 & 0 & 0 & -{}^2M_{xy1, m}^{SA} \sinh({}^2r_{1, m}^{SA} a) I_{8, nm}^{SA} & -{}^2M_{xy2, m}^{SA} \sinh({}^2r_{2, m}^{SA} a) I_{8, nm}^{SA} & -{}^2M_{xy3, m}^{SA} \sinh({}^2r_{3, m}^{SA} a) I_{8, nm}^{SA} \\ {}^1T_{y1, m}^{SA} \cosh({}^1r_{1, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & {}^1T_{y2, m}^{SA} \cosh({}^1r_{2, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & {}^1T_{y3, m}^{SA} \cosh({}^1r_{3, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & 0 & 0 & 0 \\ -{}^1M_{y1, m}^{SA} \sinh({}^1r_{1, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & -{}^1M_{y2, m}^{SA} \sinh({}^1r_{2, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & -{}^1M_{y3, m}^{SA} \sinh({}^1r_{3, m}^{SA} b) I_{9, nm}^{SA} & -{}^2M_{y1, m}^{SA} (-1)^{m-1} I_{10, nm}^{SA} & -{}^2M_{y2, m}^{SA} (-1)^{m-1} I_{11, nm}^{SA} & -{}^2M_{y3, m}^{SA} (-1)^{m-1} I_{12, nm}^{SA} \\ {}^1M_{xy1, m}^{SA} \cosh({}^1r_{1, m}^{SA} b) I_{13, nm}^{SA} & {}^1M_{xy2, m}^{SA} \cosh({}^1r_{2, m}^{SA} b) I_{13, nm}^{SA} & {}^1M_{xy3, m}^{SA} \cosh({}^1r_{3, m}^{SA} b) I_{13, nm}^{SA} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Када је  $m \geq 1$  и  $n = 0$  важе блок матрице  $\boxed{D_{0m}^{SA}}_{2 \times 6}$  и  $\boxed{F_{0m}^{SA}}_{2 \times 6}$  које се добијају кад се из блок матрица  $\boxed{D_{nm}^{SA}}_{6 \times 6}$  и  $\boxed{F_{nm}^{SA}}_{6 \times 6}$ , уклоне 1., 2., 3. и 6. врста.

Пошто је  $m \neq n$  интеграл  $I_{9, nm}^{SA}$  је једнак нули.

$$\boxed{D_{0m}^{SA}}_{2 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (-1)^{m-1} I_{10, 0m}^{SA} & (-1)^{m-1} I_{11, 0m}^{SA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{F_{0m}^{SA}}_{2 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -{}^2M_{y1, m}^{SA} (-1)^{m-1} I_{10, 0m}^{SA} & -{}^2M_{y2, m}^{SA} (-1)^{m-1} I_{11, 0m}^{SA} & -{}^2M_{y3, m}^{SA} (-1)^{m-1} I_{12, 0m}^{SA} \end{bmatrix}$$



Када је  $m = 0$  и  $n = 0$  важе блок матрице  $\boxed{D_{00}^{SA}}_{2 \times 2}$  и  $\boxed{F_{00}^{SA}}_{2 \times 2}$ , односно блок матрице  $\boxed{D_{n0}^{SA}}_{6 \times 2}$  и  $\boxed{F_{n0}^{SA}}_{6 \times 2}$  важе када је  $m = 0$  и  $n \geq 1$ :

$$\boxed{D_{00}^{SA}}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \sinh({}^1r_{1,0}^{SA}b) & \sinh({}^1r_{2,0}^{SA}b) \\ {}^1\gamma_{1,0}^{SA} \cosh({}^1r_{1,0}^{SA}b) & {}^1\gamma_{2,0}^{SA} \cosh({}^1r_{2,0}^{SA}b) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F_{00}^{SA}}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} {}^1T_{y1,0}^{SA} \cosh({}^1r_{1,0}^{SA}b) & {}^1T_{y2,0}^{SA} \cosh({}^1r_{2,0}^{SA}b) \\ -{}^1M_{y1,0}^{SA} \sinh({}^1r_{1,0}^{SA}b) & -{}^1M_{y2,0}^{SA} \sinh({}^1r_{2,0}^{SA}b) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{D_{n0}^{SA}}_{6 \times 2} = \begin{bmatrix} I_{1,n0}^{SA} & I_{2,n0}^{SA} \\ 0 & 0 \\ {}^1\gamma_{1,0}^{SA} I_{5,n0}^{SA} & {}^1\gamma_{2,0}^{SA} I_{6,n0}^{SA} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F_{n0}^{SA}}_{6 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ {}^1M_{x1,0}^{SA} I_{1,n0}^{SA} & {}^1M_{x2,0}^{SA} I_{2,n0}^{SA} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Интеграли:

$$I_{j, nm}^{SA} = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \sinh({}^1r_{i,m}^{SA}y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy = -\frac{8 {}^1r_{i,m}^{SA} b (-1)^n \cosh({}^1r_{i,m}^{SA}b)}{(1-2n)^2 \pi^2 + 4({}^1r_{i,m}^{SA}b)^2}$$

$$I_{4, nm}^{SA} = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \sin \frac{(2m-1)\pi y}{2b} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases}$$

$$I_{j, nm}^{SA} = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \cosh({}^1r_{i,m}^{SA}y) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy = \frac{4(1-2n)\pi (-1)^n \cosh({}^1r_{i,m}^{SA}b)}{(1-2n)^2 \pi^2 + 4({}^1r_{i,m}^{SA}b)^2}$$

$$I_{8, nm}^{SA} = \frac{1}{b} \int_{-b}^b \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} \cos \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases}$$

Интеграли од  $I_{9, nm}^{SA}$  до  $I_{16, nm}^{SA}$  су исти као за  $SS$  део уз смену  $SS \rightarrow SA$ .

### 9.1.3 AA део

За  $AA$  део је  $m \geq 1$  и  $n \geq 1$  па се матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{AA}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{AA}$  састоје само од једног блока матрица:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{AA} = \begin{bmatrix} \boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} \\ \boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{6M \times 6M}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{AA} = \begin{bmatrix} \boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} \\ \boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} \end{bmatrix}_{6M \times 6M}$$

$$\boxed{D_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} (-1)^{m-1} I_{1, nm}^{AA} & (-1)^{m-1} I_{2, nm}^{AA} & 0 & \sinh({}^2 r_{1, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} & \sinh({}^2 r_{2, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^2 \delta_{1, m}^{AA} \cosh({}^2 r_{1, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} & {}^2 \delta_{2, m}^{AA} \cosh({}^2 r_{2, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} & {}^2 \delta_{3, m}^{AA} \cosh({}^2 r_{3, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} \\ {}^1 \gamma_{1, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{5, nm}^{AA} & {}^1 \gamma_{2, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{6, nm}^{AA} & {}^1 \gamma_{3, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{7, nm}^{AA} & {}^2 \gamma_{1, m}^{AA} \sinh({}^2 r_{1, m}^{AA} a) I_{8, nm}^{AA} & {}^2 \gamma_{2, m}^{AA} \sinh({}^2 r_{2, m}^{AA} a) I_{8, nm}^{AA} & {}^2 \gamma_{3, m}^{AA} \sinh({}^2 r_{3, m}^{AA} a) I_{8, nm}^{AA} \\ \sinh({}^1 r_{1, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & \sinh({}^1 r_{2, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & 0 & (-1)^{m-1} I_{10, nm}^{AA} & (-1)^{m-1} I_{11, nm}^{AA} & 0 \\ {}^1 \gamma_{1, m}^{AA} \cosh({}^1 r_{1, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & {}^1 \gamma_{2, m}^{AA} \cosh({}^1 r_{2, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & {}^1 \gamma_{3, m}^{AA} \cosh({}^1 r_{3, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & 0 & 0 & 0 \\ {}^1 \delta_{1, m}^{AA} \sinh({}^1 r_{1, m}^{AA} b) I_{13, nm}^{AA} & {}^1 \delta_{2, m}^{AA} \sinh({}^1 r_{2, m}^{AA} b) I_{13, nm}^{AA} & {}^1 \delta_{3, m}^{AA} \sinh({}^1 r_{3, m}^{AA} b) I_{13, nm}^{AA} & {}^2 \delta_{1, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{14, nm}^{AA} & {}^2 \delta_{2, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{15, nm}^{AA} & {}^2 \delta_{3, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{16, nm}^{AA} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F_{nm}^{AA}}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^2 T_{x1, m}^{AA} \cosh({}^2 r_{1, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} & {}^2 T_{x2, m}^{AA} \cosh({}^2 r_{2, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} & {}^2 T_{x3, m}^{AA} \cosh({}^2 r_{3, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} \\ {}^1 M_{x1, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{1, nm}^{AA} & {}^1 M_{x2, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{2, nm}^{AA} & {}^1 M_{x3, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{3, nm}^{AA} & {}^2 M_{x1, m}^{AA} \sinh({}^2 r_{1, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} & {}^2 M_{x2, m}^{AA} \sinh({}^2 r_{2, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} & {}^2 M_{x3, m}^{AA} \sinh({}^2 r_{3, m}^{AA} a) I_{4, nm}^{AA} \\ 0 & 0 & 0 & -{}^2 M_{xy1, m}^{AA} \cosh({}^2 r_{1, m}^{AA} a) I_{8, nm}^{AA} & -{}^2 M_{xy2, m}^{AA} \cosh({}^2 r_{2, m}^{AA} a) I_{8, nm}^{AA} & -{}^2 M_{xy3, m}^{AA} \cosh({}^2 r_{3, m}^{AA} a) I_{8, nm}^{AA} \\ {}^1 T_{y1, m}^{AA} \cosh({}^1 r_{1, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & {}^1 T_{y2, m}^{AA} \cosh({}^1 r_{2, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & {}^1 T_{y3, m}^{AA} \cosh({}^1 r_{3, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & 0 & 0 & 0 \\ -{}^1 M_{y1, m}^{AA} \sinh({}^1 r_{1, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & -{}^1 M_{y2, m}^{AA} \sinh({}^1 r_{2, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & -{}^1 M_{y3, m}^{AA} \sinh({}^1 r_{3, m}^{AA} b) I_{9, nm}^{AA} & -{}^2 M_{y1, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{10, nm}^{AA} & -{}^2 M_{y2, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{11, nm}^{AA} & -{}^2 M_{y3, m}^{AA} (-1)^{m-1} I_{12, nm}^{AA} \\ {}^1 M_{xy1, m}^{AA} \cosh({}^1 r_{1, m}^{AA} b) I_{13, nm}^{AA} & {}^1 M_{xy2, m}^{AA} \cosh({}^1 r_{2, m}^{AA} b) I_{13, nm}^{AA} & {}^1 M_{xy3, m}^{AA} \cosh({}^1 r_{3, m}^{AA} b) I_{13, nm}^{AA} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Интеграли:

$$I_{9, nm}^{AA} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases} \quad I_{j, nm}^{AA} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \sinh({}^1 r_{i, m}^{AA} x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx = -\frac{8 {}^1 r_{i, m}^{AA} a (-1)^n \cosh({}^1 r_{i, m}^{AA} a)}{(1-2n)^2 \pi^2 + 4({}^1 r_{i, m}^{AA} a)^2}$$

$$I_{13, nm}^{AA} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases} \quad I_{j, nm}^{AA} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a \cosh({}^1 r_{i, m}^{AA} x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx = \frac{4(1-2n)\pi (-1)^n \cosh({}^1 r_{i, m}^{AA} a)}{(1-2n)^2 \pi^2 + 4({}^1 r_{i, m}^{AA} a)^2}$$

Интеграли од  $I_{1, nm}^{AA}$  до  $I_{8, nm}^{AA}$  су исти као за  $SA$  део уз смену  $SA \rightarrow AA$ .

### 9.1.4 Матрица трансформације T

Матрица трансформације T се састоји од четири матрице  $T^{SS}$ ,  $T^{SA}$ ,  $T^{AS}$  и  $T^{AA}$ , које представљају матрице трансформације за сваки случај симетрије посебно и повезују компоненте вектора  $\tilde{q}^{SS}$ ,  $\tilde{q}^{SA}$ ,  $\tilde{q}^{AS}$  и  $\tilde{q}^{AA}$  и вектора  $\tilde{q}$ :  $\tilde{q}^{SS} = \frac{1}{2} T^{SS} \tilde{q}$ ,  $\tilde{q}^{SA} = \frac{1}{2} T^{SA} \tilde{q}$ ,  $\tilde{q}^{AS} = \frac{1}{2} T^{AS} \tilde{q}$  и  $\tilde{q}^{AA} = \frac{1}{2} T^{AA} \tilde{q}$ .



$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} -T_{y1,m} & 0 & -T_{y2,m} & 0 & -T_{y3,m} & 0 \\ 0 & M_{y1,m} & 0 & M_{y2,m} & 0 & M_{y3,m} \\ -M_{xy1,m} & 0 & -M_{xy2,m} & 0 & -M_{xy3,m} & 0 \\ T_{y1,m} \cosh(r_{1,m} 2b) & T_{y1,m} \sinh(r_{1,m} 2b) & T_{y2,m} \cosh(r_{2,m} 2b) & T_{y2,m} \sinh(r_{2,m} 2b) & T_{y3,m} \cosh(r_{3,m} 2b) & T_{y3,m} \sinh(r_{3,m} 2b) \\ -M_{y1,m} \sinh(r_{1,m} 2b) & -M_{y1,m} \cosh(r_{1,m} 2b) & -M_{y2,m} \sinh(r_{2,m} 2b) & -M_{y2,m} \cosh(r_{2,m} 2b) & -M_{y3,m} \sinh(r_{3,m} 2b) & -M_{y3,m} \cosh(r_{3,m} 2b) \\ M_{xy1,m} \cosh(r_{1,m} 2b) & M_{xy1,m} \sinh(r_{1,m} 2b) & M_{xy2,m} \cosh(r_{2,m} 2b) & M_{xy2,m} \sinh(r_{2,m} 2b) & M_{xy3,m} \cosh(r_{3,m} 2b) & M_{xy3,m} \sinh(r_{3,m} 2b) \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

## 9.2 Mindlin-ова плоча izbocavanje

### 9.2.1 Maurice Lévy

$$\mathbf{F}_m = \begin{bmatrix} -\bar{T}_{y1,m} & 0 & -\bar{T}_{y2,m} & 0 & -\bar{T}_{y3,m} & 0 \\ 0 & M_{y1,m} & 0 & M_{y2,m} & 0 & M_{y3,m} \\ -M_{xy1,m} & 0 & -M_{xy2,m} & 0 & -M_{xy3,m} & 0 \\ \bar{T}_{y1,m} \cosh(r_{1,m} 2b) & \bar{T}_{y1,m} \sinh(r_{1,m} 2b) & \bar{T}_{y2,m} \cosh(r_{2,m} 2b) & \bar{T}_{y2,m} \sinh(r_{2,m} 2b) & \bar{T}_{y3,m} \cosh(r_{3,m} 2b) & \bar{T}_{y3,m} \sinh(r_{3,m} 2b) \\ -M_{y1,m} \sinh(r_{1,m} 2b) & -M_{y1,m} \cosh(r_{1,m} 2b) & -M_{y2,m} \sinh(r_{2,m} 2b) & -M_{y2,m} \cosh(r_{2,m} 2b) & -M_{y3,m} \sinh(r_{3,m} 2b) & -M_{y3,m} \cosh(r_{3,m} 2b) \\ M_{xy1,m} \cosh(r_{1,m} 2b) & M_{xy1,m} \sinh(r_{1,m} 2b) & M_{xy2,m} \cosh(r_{2,m} 2b) & M_{xy2,m} \sinh(r_{2,m} 2b) & M_{xy3,m} \cosh(r_{3,m} 2b) & M_{xy3,m} \sinh(r_{3,m} 2b) \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

$$\bar{T}_{yi,m} = kGh \left[ r_{i,m} \left( 1 - \xi_2 \frac{N}{kGh} \right) - \gamma_{i,m} \right]$$

$$i = 1, 2$$

$$\bar{T}_{y3,m} = kGh (-\gamma_{3,m})$$

## 9.3 Вибрације сегмента кружне цилиндричне љуске

### 9.3.1 SS део

Матрице  $\tilde{\mathbf{D}}^{SS}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}^{SS}$  се састоје од четири различита блока матрица:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{SS} = \begin{bmatrix} \boxed{D_{00}^{SS}}_{6 \times 6} & \boxed{D_{0m}^{SS}}_{6 \times 8} & \cdots & \boxed{D_{0n}^{SS}}_{6 \times 8} \\ \boxed{D_{n0}^{SS}}_{8 \times 6} & \boxed{D_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{D_{n0}^{SS}}_{8 \times 6} & \boxed{D_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} \end{bmatrix}_{(8M+6) \times (8M+6)}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{SS} = \begin{bmatrix} \boxed{F_{00}^{SS}}_{6 \times 6} & \boxed{F_{0m}^{SS}}_{6 \times 8} & \cdots & \boxed{F_{0n}^{SS}}_{6 \times 8} \\ \boxed{F_{n0}^{SS}}_{8 \times 6} & \boxed{F_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{F_{n0}^{SS}}_{8 \times 6} & \boxed{F_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} \end{bmatrix}_{(8M+6) \times (8M+6)}$$

Када је  $m=0$  и  $n=0$  важе блок матрице  $\boxed{D_{00}^{SS}}_{6 \times 6}$  и  $\boxed{F_{00}^{SS}}_{6 \times 6}$ :

$$\boxed{D_{00}^{SS}}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} {}^1\delta_{1,0}^{SS} \sinh({}^1r_{1,0}^{SS}l) & {}^1\delta_{2,0}^{SS} \sinh({}^1r_{2,0}^{SS}l) & {}^1\delta_{3,0}^{SS} \sinh({}^1r_{3,0}^{SS}l) & 0 & 0 & 0 \\ \cosh({}^1r_{1,0}^{SS}l) & \cosh({}^1r_{2,0}^{SS}l) & \cosh({}^1r_{3,0}^{SS}l) & I_{7,0}^{SS} & I_{8,0}^{SS} & I_{9,0}^{SS} \\ -{}^1r_{1,0}^{SS} \sinh({}^1r_{1,0}^{SS}l) & -{}^1r_{2,0}^{SS} \sinh({}^1r_{2,0}^{SS}l) & -{}^1r_{3,0}^{SS} \sinh({}^1r_{3,0}^{SS}l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^2\gamma_{1,0}^{SS} \sinh({}^2r_{1,0}^{SS}\theta) & {}^2\gamma_{2,0}^{SS} \sinh({}^2r_{2,0}^{SS}\theta) & {}^2\gamma_{3,0}^{SS} \sinh({}^2r_{3,0}^{SS}\theta) \\ I_{17,0}^{SS} & I_{18,0}^{SS} & I_{19,0}^{SS} & \cosh({}^2r_{1,0}^{SS}\theta) & \cosh({}^2r_{2,0}^{SS}\theta) & \cosh({}^2r_{3,0}^{SS}\theta) \\ 0 & 0 & 0 & -({}^2r_{1,0}^{SS}/a) \sinh({}^2r_{1,0}^{SS}\theta) & -({}^2r_{2,0}^{SS}/a) \sinh({}^2r_{2,0}^{SS}\theta) & -({}^2r_{3,0}^{SS}/a) \sinh({}^2r_{3,0}^{SS}\theta) \end{bmatrix}$$

У случају Flügge-ове теорије чланови у боји су једнаки:  $\left[ ({}^2\gamma_{i,0}^{SS} - {}^2r_{i,0}^{SS})/a \right] \sinh({}^2r_{i,0}^{SS}l)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$$\boxed{F_{00}^{SS}}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} {}^1N_{x1,0}^{SS} \cosh({}^1r_{1,0}^{SS}l) & {}^1N_{x2,0}^{SS} \cosh({}^1r_{2,0}^{SS}l) & {}^1N_{x3,0}^{SS} \cosh({}^1r_{3,0}^{SS}l) & {}^2N_{x1,0}^{SS} I_{7,0}^{SS} & {}^2N_{x2,0}^{SS} I_{8,0}^{SS} & {}^2N_{x3,0}^{SS} I_{9,0}^{SS} \\ {}^1\bar{Q}_{x1,0}^{SS} \sinh({}^1r_{1,0}^{SS}l) & {}^1\bar{Q}_{x2,0}^{SS} \sinh({}^1r_{2,0}^{SS}l) & {}^1\bar{Q}_{x3,0}^{SS} \sinh({}^1r_{3,0}^{SS}l) & 0 & 0 & 0 \\ {}^1M_{x1,0}^{SS} \cosh({}^1r_{1,0}^{SS}l) & {}^1M_{x2,0}^{SS} \cosh({}^1r_{2,0}^{SS}l) & {}^1M_{x3,0}^{SS} \cosh({}^1r_{3,0}^{SS}l) & {}^2M_{x1,0}^{SS} I_{7,0}^{SS} & {}^2M_{x2,0}^{SS} I_{8,0}^{SS} & {}^2M_{x3,0}^{SS} I_{9,0}^{SS} \\ {}^1N_{\varphi1,0}^{SS} I_{17,0}^{SS} & {}^1N_{\varphi2,0}^{SS} I_{18,0}^{SS} & {}^1N_{\varphi3,0}^{SS} I_{19,0}^{SS} & {}^2N_{\varphi1,0}^{SS} \cosh({}^2r_{1,0}^{SS}\theta) & {}^2N_{\varphi2,0}^{SS} \cosh({}^2r_{2,0}^{SS}\theta) & {}^2N_{\varphi3,0}^{SS} \cosh({}^2r_{3,0}^{SS}\theta) \\ 0 & 0 & 0 & {}^2\bar{Q}_{\varphi1,0}^{SS} \sinh({}^2r_{1,0}^{SS}\theta) & {}^2\bar{Q}_{\varphi2,0}^{SS} \sinh({}^2r_{2,0}^{SS}\theta) & {}^2\bar{Q}_{\varphi3,0}^{SS} \sinh({}^2r_{3,0}^{SS}\theta) \\ {}^1M_{\varphi1,0}^{SS} I_{17,0}^{SS} & {}^1M_{\varphi2,0}^{SS} I_{18,0}^{SS} & {}^1M_{\varphi3,0}^{SS} I_{19,0}^{SS} & {}^2M_{\varphi1,0}^{SS} \cosh({}^2r_{1,0}^{SS}\theta) & {}^2M_{\varphi2,0}^{SS} \cosh({}^2r_{2,0}^{SS}\theta) & {}^2M_{\varphi3,0}^{SS} \cosh({}^2r_{3,0}^{SS}\theta) \end{bmatrix}$$

Када је  $m \geq 1$  и  $n \geq 1$  важе блок матрице  $\boxed{D_{nm}^{SS}}_{8 \times 8}$  и  $\boxed{F_{nm}^{SS}}_{8 \times 8}$ :

$$\boxed{D_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} {}^1\delta_{1,m}^{SS} \sinh({}^1r_{1,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & {}^1\delta_{2,m}^{SS} \sinh({}^1r_{2,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & {}^1\delta_{3,m}^{SS} \sinh({}^1r_{3,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & {}^1\delta_{4,m}^{SS} \sinh({}^1r_{4,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\gamma_{1,m}^{SS} \cosh({}^1r_{1,m}^{SS}l) I_{2,nn}^{SS} & {}^1\gamma_{2,m}^{SS} \cosh({}^1r_{2,m}^{SS}l) I_{2,nn}^{SS} & {}^1\gamma_{3,m}^{SS} \cosh({}^1r_{3,m}^{SS}l) I_{2,nn}^{SS} & {}^1\gamma_{4,m}^{SS} \cosh({}^1r_{4,m}^{SS}l) I_{2,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{1,m}^{SS} (-1)^m I_{3,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{2,m}^{SS} (-1)^m I_{4,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{3,m}^{SS} (-1)^m I_{5,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{4,m}^{SS} (-1)^m I_{6,nn}^{SS} \\ \cosh({}^1r_{1,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & \cosh({}^1r_{2,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & \cosh({}^1r_{3,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & \cosh({}^1r_{4,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & (-1)^m I_{7,nn}^{SS} & (-1)^m I_{8,nn}^{SS} & (-1)^m I_{9,nn}^{SS} & (-1)^m I_{10,nn}^{SS} \\ -{}^1r_{1,m}^{SS} \sinh({}^1r_{1,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & -{}^1r_{2,m}^{SS} \sinh({}^1r_{2,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & -{}^1r_{3,m}^{SS} \sinh({}^1r_{3,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & -{}^1r_{4,m}^{SS} \sinh({}^1r_{4,m}^{SS}l) I_{1,nn}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2\gamma_{1,m}^{SS} \sinh({}^2r_{1,m}^{SS}\theta) I_{16,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{2,m}^{SS} \sinh({}^2r_{2,m}^{SS}\theta) I_{16,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{3,m}^{SS} \sinh({}^2r_{3,m}^{SS}\theta) I_{16,nn}^{SS} & {}^2\gamma_{4,m}^{SS} \sinh({}^2r_{4,m}^{SS}\theta) I_{16,nn}^{SS} \\ {}^1\delta_{1,m}^{SS} (-1)^m I_{11,nn}^{SS} & {}^1\delta_{2,m}^{SS} (-1)^m I_{12,nn}^{SS} & {}^1\delta_{3,m}^{SS} (-1)^m I_{13,nn}^{SS} & {}^1\delta_{4,m}^{SS} (-1)^m I_{14,nn}^{SS} & {}^2\delta_{1,m}^{SS} \cosh({}^2r_{1,m}^{SS}\theta) I_{15,nn}^{SS} & {}^2\delta_{2,m}^{SS} \cosh({}^2r_{2,m}^{SS}\theta) I_{15,nn}^{SS} & {}^2\delta_{3,m}^{SS} \cosh({}^2r_{3,m}^{SS}\theta) I_{15,nn}^{SS} & {}^2\delta_{4,m}^{SS} \cosh({}^2r_{4,m}^{SS}\theta) I_{15,nn}^{SS} \\ (-1)^m I_{17,nn}^{SS} & (-1)^m I_{18,nn}^{SS} & (-1)^m I_{19,nn}^{SS} & (-1)^m I_{20,nn}^{SS} & \cosh({}^2r_{1,m}^{SS}\theta) I_{15,nn}^{SS} & \cosh({}^2r_{2,m}^{SS}\theta) I_{15,nn}^{SS} & \cosh({}^2r_{3,m}^{SS}\theta) I_{15,nn}^{SS} & \cosh({}^2r_{4,m}^{SS}\theta) I_{15,nn}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -{}^2r_{1,m}^{SS} \sinh({}^2r_{1,m}^{SS}\theta) I_{16,nn}^{SS}/a & -{}^2r_{2,m}^{SS} \sinh({}^2r_{2,m}^{SS}\theta) I_{16,nn}^{SS}/a & -{}^2r_{3,m}^{SS} \sinh({}^2r_{3,m}^{SS}\theta) I_{16,nn}^{SS}/a & -{}^2r_{4,m}^{SS} \sinh({}^2r_{4,m}^{SS}\theta) I_{16,nn}^{SS}/a \end{bmatrix}$$

У случају Flügge-ове теорије чланови у боји су једнаки:  $\left[ ({}^2\gamma_{i,m}^{SS} - {}^2r_{i,m}^{SS})/a \right] \sinh({}^2r_{i,m}^{SS}\theta) I_{16,nn}^{SS}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$\boxed{F_{nm}^{SS}}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} {}^1N_{x1,m}^{SS} \cosh({}^1r_{1,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^1N_{x2,m}^{SS} \cosh({}^1r_{2,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^1N_{x3,m}^{SS} \cosh({}^1r_{3,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^1N_{x4,m}^{SS} \cosh({}^1r_{4,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^2N_{x1,m}^{SS} (-1)^m I_{7,nm}^{SS} & {}^2N_{x2,m}^{SS} (-1)^m I_{8,nm}^{SS} & {}^2N_{x3,m}^{SS} (-1)^m I_{9,nm}^{SS} & {}^2N_{x4,m}^{SS} (-1)^m I_{10,nm}^{SS} \\ {}^1\bar{N}_{\varphi 1,m}^{SS} \sinh({}^1r_{1,m}^{SS}l) I_{2,nm}^{SS} & {}^1\bar{N}_{\varphi 2,m}^{SS} \sinh({}^1r_{2,m}^{SS}l) I_{2,nm}^{SS} & {}^1\bar{N}_{\varphi 3,m}^{SS} \sinh({}^1r_{3,m}^{SS}l) I_{2,nm}^{SS} & {}^1\bar{N}_{\varphi 4,m}^{SS} \sinh({}^1r_{4,m}^{SS}l) I_{2,nm}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\bar{Q}_{x1,m}^{SS} \sinh({}^1r_{1,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^1\bar{Q}_{x2,m}^{SS} \sinh({}^1r_{2,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^1\bar{Q}_{x3,m}^{SS} \sinh({}^1r_{3,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^1\bar{Q}_{x4,m}^{SS} \sinh({}^1r_{4,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1M_{x1,m}^{SS} \cosh({}^1r_{1,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^1M_{x2,m}^{SS} \cosh({}^1r_{2,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^1M_{x3,m}^{SS} \cosh({}^1r_{3,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^1M_{x4,m}^{SS} \cosh({}^1r_{4,m}^{SS}l) I_{1,nm}^{SS} & {}^2M_{x1,m}^{SS} (-1)^m I_{7,nm}^{SS} & {}^2M_{x2,m}^{SS} (-1)^m I_{8,nm}^{SS} & {}^2M_{x3,m}^{SS} (-1)^m I_{9,nm}^{SS} & {}^2M_{x4,m}^{SS} (-1)^m I_{10,nm}^{SS} \\ {}^1N_{\varphi 1,m}^{SS} (-1)^m I_{17,nm}^{SS} & {}^1N_{\varphi 2,m}^{SS} (-1)^m I_{18,nm}^{SS} & {}^1N_{\varphi 3,m}^{SS} (-1)^m I_{19,nm}^{SS} & {}^1N_{\varphi 4,m}^{SS} (-1)^m I_{20,nm}^{SS} & {}^2N_{\varphi 1,m}^{SS} \cosh({}^2r_{1,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} & {}^2N_{\varphi 2,m}^{SS} \cosh({}^2r_{2,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} & {}^2N_{\varphi 3,m}^{SS} \cosh({}^2r_{3,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} & {}^2N_{\varphi 4,m}^{SS} \cosh({}^2r_{4,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2N_{\varphi x1,m}^{SS} \sinh({}^2r_{1,m}^{SS}\theta) I_{15,nm}^{SS} & {}^2N_{\varphi x2,m}^{SS} \sinh({}^2r_{2,m}^{SS}\theta) I_{15,nm}^{SS} & {}^2N_{\varphi x3,m}^{SS} \sinh({}^2r_{3,m}^{SS}\theta) I_{15,nm}^{SS} & {}^2N_{\varphi x4,m}^{SS} \sinh({}^2r_{4,m}^{SS}\theta) I_{15,nm}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2\bar{Q}_{\varphi 1,m}^{SS} \sinh({}^2r_{1,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} & {}^2\bar{Q}_{\varphi 2,m}^{SS} \sinh({}^2r_{2,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} & {}^2\bar{Q}_{\varphi 3,m}^{SS} \sinh({}^2r_{3,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} & {}^2\bar{Q}_{\varphi 4,m}^{SS} \sinh({}^2r_{4,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} \\ {}^1M_{\varphi 1,m}^{SS} (-1)^m I_{17,nm}^{SS} & {}^1M_{\varphi 2,m}^{SS} (-1)^m I_{18,nm}^{SS} & {}^1M_{\varphi 3,m}^{SS} (-1)^m I_{19,nm}^{SS} & {}^1M_{\varphi 4,m}^{SS} (-1)^m I_{20,nm}^{SS} & {}^2M_{\varphi 1,m}^{SS} \cosh({}^2r_{1,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} & {}^2M_{\varphi 2,m}^{SS} \cosh({}^2r_{2,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} & {}^2M_{\varphi 3,m}^{SS} \cosh({}^2r_{3,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} & {}^2M_{\varphi 4,m}^{SS} \cosh({}^2r_{4,m}^{SS}\theta) I_{16,nm}^{SS} \end{bmatrix}$$

Када је  $m \geq 1$  и  $n = 0$  важе блок матрице  $\boxed{D_{0m}^{SS}}_{6 \times 8}$  и  $\boxed{F_{0m}^{SS}}_{6 \times 8}$  које се добијају када се из блок матрица  $\boxed{D_{nm}^{SS}}_{8 \times 8}$  и  $\boxed{F_{nm}^{SS}}_{8 \times 8}$  уклоне 2. и 6. врста.

Пошто је  $m \neq n$  интеграл  $I_{1,nm}^{SS}$  и  $I_{16,nm}^{SS}$  су једнаки нули.

$$\boxed{D_{0m}^{SS}}_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^m I_{7,0m}^{SS} & (-1)^m I_{8,0m}^{SS} & (-1)^m I_{9,0m}^{SS} & (-1)^m I_{10,0m}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-1)^m I_{17,0m}^{SS} & (-1)^m I_{18,0m}^{SS} & (-1)^m I_{19,0m}^{SS} & (-1)^m I_{20,0m}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F_{0m}^{SS}}_{6 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2N_{x1,m}^{SS} (-1)^m I_{7,0m}^{SS} & {}^2N_{x2,m}^{SS} (-1)^m I_{8,0m}^{SS} & {}^2N_{x3,m}^{SS} (-1)^m I_{9,0m}^{SS} & {}^2N_{x4,m}^{SS} (-1)^m I_{10,0m}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2M_{x1,m}^{SS} (-1)^m I_{7,0m}^{SS} & {}^2M_{x2,m}^{SS} (-1)^m I_{8,0m}^{SS} & {}^2M_{x3,m}^{SS} (-1)^m I_{9,0m}^{SS} & {}^2M_{x4,m}^{SS} (-1)^m I_{10,0m}^{SS} \\ {}^1N_{\varphi 1,m}^{SS} (-1)^m I_{17,0m}^{SS} & {}^1N_{\varphi 2,m}^{SS} (-1)^m I_{18,0m}^{SS} & {}^1N_{\varphi 3,m}^{SS} (-1)^m I_{19,0m}^{SS} & {}^1N_{\varphi 4,m}^{SS} (-1)^m I_{20,0m}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1M_{\varphi 1,m}^{SS} (-1)^m I_{17,0m}^{SS} & {}^1M_{\varphi 2,m}^{SS} (-1)^m I_{18,0m}^{SS} & {}^1M_{\varphi 3,m}^{SS} (-1)^m I_{19,0m}^{SS} & {}^1M_{\varphi 4,m}^{SS} (-1)^m I_{20,0m}^{SS} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Блок матрице  $\boxed{D_{n0}^{SS}}_{8 \times 6}$  и  $\boxed{F_{n0}^{SS}}_{8 \times 6}$  важе када је  $m = 0$  и  $n \geq 1$ :

$$\boxed{D_{n0}^{SS}}_{8 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^2\gamma_{1,0}^{SS} I_{3,n0}^{SS} & {}^2\gamma_{2,0}^{SS} I_{4,n0}^{SS} & {}^2\gamma_{3,0}^{SS} I_{5,n0}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & I_{7,n0}^{SS} & I_{8,n0}^{SS} & I_{9,n0}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\delta_{1,0}^{SS} I_{11,n0}^{SS} & {}^1\delta_{2,0}^{SS} I_{12,n0}^{SS} & {}^1\delta_{3,0}^{SS} I_{13,n0}^{SS} & 0 & 0 & 0 \\ I_{17,n0}^{SS} & I_{18,n0}^{SS} & I_{19,n0}^{SS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F_{n0}^{SS}}_{8 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & {}^2N_{x1,0}^{SS} I_{7,n0}^{SS} & {}^2N_{x2,0}^{SS} I_{8,n0}^{SS} & {}^2N_{x3,0}^{SS} I_{9,n0}^{SS} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^2M_{x1,0}^{SS} I_{7,n0}^{SS} & {}^2M_{x2,0}^{SS} I_{8,n0}^{SS} & {}^2M_{x3,0}^{SS} I_{9,n0}^{SS} \\ {}^1N_{\varphi1,0}^{SS} I_{17,n0}^{SS} & {}^1N_{\varphi2,0}^{SS} I_{18,n0}^{SS} & {}^1N_{\varphi3,0}^{SS} I_{19,n0}^{SS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1M_{\varphi1,0}^{SS} I_{17,n0}^{SS} & {}^1M_{\varphi2,0}^{SS} I_{18,n0}^{SS} & {}^1M_{\varphi3,0}^{SS} I_{19,n0}^{SS} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Интеграли:

$$I_{1,nm}^{SS} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \cos \frac{m\pi\varphi}{\theta} \cos \frac{n\pi\varphi}{\theta} d\varphi = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases}$$

$$I_{2,nm}^{SS} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \sin \frac{m\pi\varphi}{\theta} \sin \frac{n\pi\varphi}{\theta} d\varphi = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \neq 0 \\ 0; & m = n = 0 \end{cases}$$

$$I_{j,nm}^{SS} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \sinh({}^2r_{i,m}^{SS}\varphi) \sin \frac{n\pi\varphi}{\theta} d\varphi = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ -\frac{2n\pi(-1)^n \sinh({}^2r_{i,m}^{SS}\theta)}{n^2\pi^2 + ({}^2r_{i,m}^{SS}\theta)^2}; & n > 0 \end{cases}$$

$j=3,4,5,6$   
 $i=1,2,3,4$

$$I_{j,nm}^{SS} = \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \cosh({}^2r_{i,m}^{SS}\varphi) \cos \frac{n\pi\varphi}{\theta} d\varphi = \begin{cases} \frac{\sinh({}^2r_{i,m}^{SS}\theta)}{{}^2r_{i,m}^{SS}\theta}; & n = 0 \\ \frac{2{}^2r_{i,m}^{SS}\theta(-1)^n \sinh({}^2r_{i,m}^{SS}\theta)}{n^2\pi^2 + ({}^2r_{i,m}^{SS}\theta)^2}; & n > 0 \end{cases}$$

$j=7,8,9,10$   
 $i=1,2,3,4$

$$I_{j,nm}^{SS} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sinh({}^1r_{i,m}^{SS}x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0; & n = 0 \\ -\frac{2n\pi(-1)^n \sinh({}^1r_{i,m}^{SS}l)}{n^2\pi^2 + ({}^1r_{i,m}^{SS}l)^2}; & n > 0 \end{cases}$$

$j=11,12,13,14$   
 $i=1,2,3,4$

$$I_{15,nm}^{SS} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \neq 0 \\ 0; & m = n = 0 \end{cases}$$

$$I_{16,nm}^{SS} = \frac{1}{l} \int_{-a}^a \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases}$$

$$I_{j,nm}^{SS} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cosh({}^1r_{i,m}^{SS}x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{\sinh({}^1r_{i,m}^{SS}l)}{{}^1r_{i,m}^{SS}l}; & n = 0 \\ \frac{2{}^1r_{i,m}^{SS}l(-1)^n \sinh({}^1r_{i,m}^{SS}l)}{n^2\pi^2 + ({}^1r_{i,m}^{SS}l)^2}; & n > 0 \end{cases}$$

$j=17,18,19,20$   
 $i=1,2,3,4$

### 9.3.2 SA део

Матрице  $\tilde{D}^{SA}$  и  $\tilde{F}^{SA}$  се састоје од четири различита блока матрица:

$$\boxed{\tilde{D}^{SA}} = \begin{bmatrix} \boxed{D_{00}^{SA}}_{3 \times 3} & \boxed{D_{0m}^{SA}}_{3 \times 8} & \dots & \boxed{D_{0m}^{SA}}_{3 \times 8} \\ \boxed{D_{n0}^{SA}}_{8 \times 3} & \boxed{D_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} & \dots & \boxed{D_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{D_{n0}^{SA}}_{8 \times 3} & \boxed{D_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} & \dots & \boxed{D_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} \end{bmatrix}_{(8M+3) \times (8M+3)}$$

$$\boxed{\tilde{F}^{SA}} = \begin{bmatrix} \boxed{F_{00}^{SA}}_{3 \times 3} & \boxed{F_{0m}^{SA}}_{3 \times 8} & \dots & \boxed{F_{0m}^{SA}}_{3 \times 8} \\ \boxed{F_{n0}^{SA}}_{8 \times 3} & \boxed{F_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} & \dots & \boxed{F_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{F_{n0}^{SA}}_{8 \times 3} & \boxed{F_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} & \dots & \boxed{F_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} \end{bmatrix}_{(8M+3) \times (8M+3)}$$

Када је  $m = 0$  и  $n = 0$  важе блок матрице  $\boxed{D_{00}^{SA}}_{3 \times 3}$  и  $\boxed{F_{00}^{SA}}_{3 \times 3}$ , односно када је  $m = 0$  и  $n \geq 1$  важе блок матрице  $\boxed{D_{n0}^{SA}}_{8 \times 3}$  и  $\boxed{F_{n0}^{SA}}_{8 \times 3}$ :

$$\boxed{D_{00}^{SA}}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} {}^1\delta_{1,0}^{SA} \cosh({}^1r_{1,0}^{SA}l) & {}^1\delta_{2,0}^{SA} \cosh({}^1r_{2,0}^{SA}l) & {}^1\delta_{3,0}^{SA} \cosh({}^1r_{3,0}^{SA}l) \\ \sinh({}^1r_{1,0}^{SA}l) & \sinh({}^1r_{2,0}^{SA}l) & \sinh({}^1r_{3,0}^{SA}l) \\ -{}^1r_{1,0}^{SA} \cosh({}^1r_{1,0}^{SA}l) & -{}^1r_{2,0}^{SA} \cosh({}^1r_{2,0}^{SA}l) & -{}^1r_{3,0}^{SA} \cosh({}^1r_{3,0}^{SA}l) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{D_{n0}^{SA}}_{8 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^1\delta_{1,0}^{SA} I_{11,n0}^{SA} & {}^1\delta_{2,0}^{SA} I_{12,n0}^{SA} & {}^1\delta_{3,0}^{SA} I_{13,n0}^{SA} \\ I_{17,n0}^{SA} & I_{18,n0}^{SA} & I_{19,n0}^{SA} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F_{00}^{SA}}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} {}^1N_{x1,0}^{SA} \sinh({}^1r_{1,0}^{SA}l) & {}^1N_{x2,0}^{SA} \sinh({}^1r_{2,0}^{SA}l) & {}^1N_{x3,0}^{SA} \sinh({}^1r_{3,0}^{SA}l) \\ {}^1\bar{Q}_{x1,0}^{SA} \cosh({}^1r_{1,0}^{SA}l) & {}^1\bar{Q}_{x2,0}^{SA} \cosh({}^1r_{2,0}^{SA}l) & {}^1\bar{Q}_{x3,0}^{SA} \cosh({}^1r_{3,0}^{SA}l) \\ {}^1M_{x1,0}^{SA} \sinh({}^1r_{1,0}^{SA}l) & {}^1M_{x2,0}^{SA} \sinh({}^1r_{2,0}^{SA}l) & {}^1M_{x3,0}^{SA} \sinh({}^1r_{3,0}^{SA}l) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F_{n0}^{SA}}_{8 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^1N_{\varphi 1,0}^{SA} I_{17,n0}^{SA} & {}^1N_{\varphi 2,0}^{SA} I_{18,n0}^{SA} & {}^1N_{\varphi 3,0}^{SA} I_{19,n0}^{SA} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}^1M_{\varphi 1,0}^{SA} I_{17,n0}^{SA} & {}^1M_{\varphi 2,0}^{SA} I_{18,n0}^{SA} & {}^1M_{\varphi 3,0}^{SA} I_{19,n0}^{SA} \end{bmatrix}$$

Када је  $m \geq 1$  и  $n \geq 1$  важе блок матрице  $\boxed{D_{nm}^{SA}}_{8 \times 8}$  и  $\boxed{F_{nm}^{SA}}_{8 \times 8}$ :

$$\boxed{D_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} {}^1\delta_{1,m}^{SA} \cosh({}^1r_{1,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & {}^1\delta_{2,m}^{SA} \cosh({}^1r_{2,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & {}^1\delta_{3,m}^{SA} \cosh({}^1r_{3,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & {}^1\delta_{4,m}^{SA} \cosh({}^1r_{4,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\gamma_{1,m}^{SA} \sinh({}^1r_{1,m}^{SA}l) I_{2,mm}^{SA} & {}^1\gamma_{2,m}^{SA} \sinh({}^1r_{2,m}^{SA}l) I_{2,mm}^{SA} & {}^1\gamma_{3,m}^{SA} \sinh({}^1r_{3,m}^{SA}l) I_{2,mm}^{SA} & {}^1\gamma_{4,m}^{SA} \sinh({}^1r_{4,m}^{SA}l) I_{2,mm}^{SA} & {}^2\gamma_{1,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{3,mm}^{SA} & {}^2\gamma_{2,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{4,mm}^{SA} & {}^2\gamma_{3,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{5,mm}^{SA} & {}^2\gamma_{4,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{6,mm}^{SA} \\ \sinh({}^1r_{1,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & \sinh({}^1r_{2,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & \sinh({}^1r_{3,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & \sinh({}^1r_{4,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & (-1)^{(m-1)} I_{7,mm}^{SA} & (-1)^{(m-1)} I_{8,mm}^{SA} & (-1)^{(m-1)} I_{9,mm}^{SA} & (-1)^{(m-1)} I_{10,mm}^{SA} \\ -{}^1r_{1,m}^{SA} \cosh({}^1r_{1,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & -{}^1r_{2,m}^{SA} \cosh({}^1r_{2,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & -{}^1r_{3,m}^{SA} \cosh({}^1r_{3,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & -{}^1r_{4,m}^{SA} \cosh({}^1r_{4,m}^{SA}l) I_{1,mm}^{SA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2\gamma_{1,m}^{SA} \sinh({}^2r_{1,m}^{SA}\theta) I_{16,mm}^{SA} & {}^2\gamma_{2,m}^{SA} \sinh({}^2r_{2,m}^{SA}\theta) I_{16,mm}^{SA} & {}^2\gamma_{3,m}^{SA} \sinh({}^2r_{3,m}^{SA}\theta) I_{16,mm}^{SA} & {}^2\gamma_{4,m}^{SA} \sinh({}^2r_{4,m}^{SA}\theta) I_{16,mm}^{SA} \\ {}^1\delta_{1,m}^{SA} (-1)^m I_{11,mm}^{SA} & {}^1\delta_{2,m}^{SA} (-1)^m I_{12,mm}^{SA} & {}^1\delta_{3,m}^{SA} (-1)^m I_{13,mm}^{SA} & {}^1\delta_{4,m}^{SA} (-1)^m I_{14,mm}^{SA} & {}^2\delta_{1,m}^{SA} \cosh({}^2r_{1,m}^{SA}\theta) I_{15,mm}^{SA} & {}^2\delta_{2,m}^{SA} \cosh({}^2r_{2,m}^{SA}\theta) I_{15,mm}^{SA} & {}^2\delta_{3,m}^{SA} \cosh({}^2r_{3,m}^{SA}\theta) I_{15,mm}^{SA} & {}^2\delta_{4,m}^{SA} \cosh({}^2r_{4,m}^{SA}\theta) I_{15,mm}^{SA} \\ (-1)^m I_{17,mm}^{SA} & (-1)^m I_{18,mm}^{SA} & (-1)^m I_{19,mm}^{SA} & (-1)^m I_{20,mm}^{SA} & \cosh({}^1r_{1,m}^{SA}\theta) I_{15,mm}^{SA} & \cosh({}^2r_{2,m}^{SA}\theta) I_{15,mm}^{SA} & \cosh({}^2r_{3,m}^{SA}\theta) I_{15,mm}^{SA} & \cosh({}^2r_{4,m}^{SA}\theta) I_{15,mm}^{SA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -{}^2r_{1,m}^{SA} \sinh({}^2r_{1,m}^{SA}\theta) I_{16,mm}^{SA} / a & -{}^2r_{2,m}^{SA} \sinh({}^2r_{2,m}^{SA}\theta) I_{16,mm}^{SA} / a & -{}^2r_{3,m}^{SA} \sinh({}^2r_{3,m}^{SA}\theta) I_{16,mm}^{SA} / a & -{}^2r_{4,m}^{SA} \sinh({}^2r_{4,m}^{SA}\theta) I_{16,mm}^{SA} / a \end{bmatrix}$$

У случају *Flügge*-ове теорије чланови у боји су једнаки:  $\left[ ({}^2\gamma_{i,m}^{SA} - {}^2r_{i,m}^{SA}) / a \right] \sinh({}^2r_{i,m}^{SA}\theta) I_{16,mm}^{SA}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .



$$\boxed{F_{nm}^{SA}}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} {}^1N_{x1,m}^{SA} \sinh({}^1r_{1,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^1N_{x2,m}^{SA} \sinh({}^1r_{2,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^1N_{x3,m}^{SA} \sinh({}^1r_{3,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^1N_{x4,m}^{SA} \sinh({}^1r_{4,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^2N_{x1,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{7,7m}^{SA} & {}^2N_{x2,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{8,8m}^{SA} & {}^2N_{x3,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{9,9m}^{SA} & {}^2N_{x4,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{10,10m}^{SA} \\ {}^1\bar{N}_{xp1,m}^{SA} \cosh({}^1r_{1,m}^{SA}l) I_{2,2m}^{SA} & {}^1\bar{N}_{xp2,m}^{SA} \cosh({}^1r_{2,m}^{SA}l) I_{2,2m}^{SA} & {}^1\bar{N}_{xp3,m}^{SA} \cosh({}^1r_{3,m}^{SA}l) I_{2,2m}^{SA} & {}^1\bar{N}_{xp4,m}^{SA} \cosh({}^1r_{4,m}^{SA}l) I_{2,2m}^{SA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\bar{Q}_{x1,m}^{SA} \cosh({}^1r_{1,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^1\bar{Q}_{x2,m}^{SA} \cosh({}^1r_{2,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^1\bar{Q}_{x3,m}^{SA} \cosh({}^1r_{3,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^1\bar{Q}_{x4,m}^{SA} \cosh({}^1r_{4,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1M_{x1,m}^{SA} \sinh({}^1r_{1,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^1M_{x2,m}^{SA} \sinh({}^1r_{2,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^1M_{x3,m}^{SA} \sinh({}^1r_{3,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^1M_{x4,m}^{SA} \sinh({}^1r_{4,m}^{SA}l) I_{1,1m}^{SA} & {}^2M_{x1,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{7,7m}^{SA} & {}^2M_{x2,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{8,8m}^{SA} & {}^2M_{x3,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{9,9m}^{SA} & {}^2M_{x4,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{10,10m}^{SA} \\ {}^1N_{\varphi1,m}^{SA} (-1)^m I_{17,17m}^{SA} & {}^1N_{\varphi2,m}^{SA} (-1)^m I_{18,18m}^{SA} & {}^1N_{\varphi3,m}^{SA} (-1)^m I_{19,19m}^{SA} & {}^1N_{\varphi4,m}^{SA} (-1)^m I_{20,20m}^{SA} & {}^2N_{\varphi1,m}^{SA} \cosh({}^2r_{1,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} & {}^2N_{\varphi2,m}^{SA} \cosh({}^2r_{2,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} & {}^2N_{\varphi3,m}^{SA} \cosh({}^2r_{3,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} & {}^2N_{\varphi4,m}^{SA} \cosh({}^2r_{4,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2N_{\varphi x1,m}^{SA} \sinh({}^2r_{1,m}^{SA}\theta) I_{15,15m}^{SA} & {}^2N_{\varphi x2,m}^{SA} \sinh({}^2r_{2,m}^{SA}\theta) I_{15,15m}^{SA} & {}^2N_{\varphi x3,m}^{SA} \sinh({}^2r_{3,m}^{SA}\theta) I_{15,15m}^{SA} & {}^2N_{\varphi x4,m}^{SA} \sinh({}^2r_{4,m}^{SA}\theta) I_{15,15m}^{SA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2\bar{Q}_{\varphi1,m}^{SA} \sinh({}^2r_{1,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} & {}^2\bar{Q}_{\varphi2,m}^{SA} \sinh({}^2r_{2,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} & {}^2\bar{Q}_{\varphi3,m}^{SA} \sinh({}^2r_{3,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} & {}^2\bar{Q}_{\varphi4,m}^{SA} \sinh({}^2r_{4,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} \\ {}^1M_{\varphi1,m}^{SA} (-1)^m I_{17,17m}^{SA} & {}^1M_{\varphi2,m}^{SA} (-1)^m I_{18,18m}^{SA} & {}^1M_{\varphi3,m}^{SA} (-1)^m I_{19,19m}^{SA} & {}^1M_{\varphi4,m}^{SA} (-1)^m I_{20,20m}^{SA} & {}^2M_{\varphi1,m}^{SA} \cosh({}^2r_{1,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} & {}^2M_{\varphi2,m}^{SA} \cosh({}^2r_{2,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} & {}^2M_{\varphi3,m}^{SA} \cosh({}^2r_{3,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} & {}^2M_{\varphi4,m}^{SA} \cosh({}^2r_{4,m}^{SA}\theta) I_{16,16m}^{SA} \end{bmatrix}$$

Када је  $m \geq 1$  и  $n = 0$  важе блок матрице  $\boxed{D_{0m}^{SA}}_{3 \times 8}$  и  $\boxed{F_{0m}^{SA}}_{3 \times 8}$  које се добијају када се из блок матрица  $\boxed{D_{nm}^{SA}}_{8 \times 8}$  и  $\boxed{F_{nm}^{SA}}_{8 \times 8}$  уклоне 2., 5., 6., 7 и 8. врста. Пошто је  $m \neq n$  интеграл  $I_{1,1m}^{SA}$  је једнак нули.

$$\boxed{D_{0m}^{SA}}_{3 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (-1)^{(m-1)} I_{7,7m}^{SA} & (-1)^{(m-1)} I_{8,8m}^{SA} & (-1)^{(m-1)} I_{9,9m}^{SA} & (-1)^{(m-1)} I_{10,10m}^{SA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{F_{0m}^{SA}}_{3 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2N_{x1,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{7,7m}^{SA} & {}^2N_{x2,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{8,8m}^{SA} & {}^2N_{x3,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{9,9m}^{SA} & {}^2N_{x4,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{10,10m}^{SA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2M_{x1,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{7,7m}^{SA} & {}^2M_{x2,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{8,8m}^{SA} & {}^2M_{x3,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{9,9m}^{SA} & {}^2M_{x4,m}^{SA} (-1)^{(m-1)} I_{10,10m}^{SA} \end{bmatrix}$$

Интеграли:

$$I_{j,1m}^{SA} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cosh({}^1r_{i,m}^{SA}x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} dx = \frac{4(1-2n)\pi(-1)^n \cosh({}^1r_{i,m}^{SA}l)}{(1-2n)^2\pi^2 + 4({}^1r_{i,m}^{SA}l)^2} \quad I_{15,1m}^{SA} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases}$$

$$I_{16,1m}^{SA} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} dx = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases} \quad I_{j,1m}^{SA} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sinh({}^1r_{i,m}^{SA}x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l} dx = -\frac{8 {}^1r_{i,m}^{SA} l (-1)^n \cosh({}^1r_{i,m}^{SA}l)}{(1-2n)^2\pi^2 + 4({}^1r_{i,m}^{SA}l)^2}$$

Интеграли од  $I_{1,1m}^{SA}$  до  $I_{10,1m}^{SA}$  су исти као за  $SS$  део уз смену  $SS \rightarrow SA$ .

### 9.3.3 AA део

За  $AA$  део је  $m \geq 1$  и  $n \geq 1$  тако да се матрице  $\tilde{D}^{AA}$  и  $\tilde{F}^{AA}$  састоје само од једног блока матрица:

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{\mathbf{D}}^{AA} \right] &= \begin{bmatrix} \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} \\ \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} \end{bmatrix}_{8M \times 8M} \quad \left[ \tilde{\mathbf{F}}^{AA} \right] = \begin{bmatrix} \boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} \\ \boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} & \cdots & \boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} \end{bmatrix}_{8M \times 8M} \\ \boxed{D_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} &= \begin{bmatrix} {}^1\delta_{1,m}^{AA} \cosh({}^1r_{1,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1\delta_{2,m}^{AA} \cosh({}^1r_{2,m}^{AA}l) I_{2,m}^{AA} & {}^1\delta_{3,m}^{AA} \cosh({}^1r_{3,m}^{AA}l) I_{3,m}^{AA} & {}^1\delta_{4,m}^{AA} \cosh({}^1r_{4,m}^{AA}l) I_{4,m}^{AA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\gamma_{1,m}^{AA} \sinh({}^1r_{1,m}^{AA}l) I_{2,m}^{AA} & {}^1\gamma_{2,m}^{AA} \sinh({}^1r_{2,m}^{AA}l) I_{2,m}^{AA} & {}^1\gamma_{3,m}^{AA} \sinh({}^1r_{3,m}^{AA}l) I_{2,m}^{AA} & {}^1\gamma_{4,m}^{AA} \sinh({}^1r_{4,m}^{AA}l) I_{2,m}^{AA} & {}^2\gamma_{1,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{3,m}^{AA} & {}^2\gamma_{2,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{4,m}^{AA} & {}^2\gamma_{3,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{5,m}^{AA} & {}^2\gamma_{4,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{6,m}^{AA} \\ \sinh({}^1r_{1,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & \sinh({}^1r_{2,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & \sinh({}^1r_{3,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & \sinh({}^1r_{4,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & (-1)^{(m-1)} I_{7,m}^{AA} & (-1)^{(m-1)} I_{8,m}^{AA} & (-1)^{(m-1)} I_{9,m}^{AA} & (-1)^{(m-1)} I_{10,m}^{AA} \\ -{}^1r_{1,m}^{AA} \cosh({}^1r_{1,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & -{}^1r_{2,m}^{AA} \cosh({}^1r_{2,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & -{}^1r_{3,m}^{AA} \cosh({}^1r_{3,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & -{}^1r_{4,m}^{AA} \cosh({}^1r_{4,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2\gamma_{1,m}^{AA} \cosh({}^2r_{1,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2\gamma_{2,m}^{AA} \cosh({}^2r_{2,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2\gamma_{3,m}^{AA} \cosh({}^2r_{3,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2\gamma_{4,m}^{AA} \cosh({}^2r_{4,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} \\ {}^1\delta_{1,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{11,m}^{AA} & {}^1\delta_{2,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{12,m}^{AA} & {}^1\delta_{3,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{13,m}^{AA} & {}^1\delta_{4,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{14,m}^{AA} & {}^2\delta_{1,m}^{AA} \sinh({}^2r_{1,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} & {}^2\delta_{2,m}^{AA} \sinh({}^2r_{2,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} & {}^2\delta_{3,m}^{AA} \sinh({}^2r_{3,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} & {}^2\delta_{4,m}^{AA} \sinh({}^2r_{4,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} \\ (-1)^{(m-1)} I_{17,m}^{AA} & (-1)^{(m-1)} I_{18,m}^{AA} & (-1)^{(m-1)} I_{19,m}^{AA} & (-1)^{(m-1)} I_{20,m}^{AA} & \sinh({}^1r_{1,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} & \sinh({}^1r_{2,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} & \sinh({}^1r_{3,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} & \sinh({}^1r_{4,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -{}^2r_{1,m}^{AA} \cosh({}^2r_{1,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} / a & -{}^2r_{2,m}^{AA} \cosh({}^2r_{2,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} / a & -{}^2r_{3,m}^{AA} \cosh({}^2r_{3,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} / a & -{}^2r_{4,m}^{AA} \cosh({}^2r_{4,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} / a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

У случају Flügge-ове теорије чланови у боји су једнаки:  $\left[ ({}^2\gamma_{i,m}^{AA} - {}^2r_{i,m}^{AA}) / a \right] \cosh({}^2r_{i,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$\boxed{F_{nm}^{AA}}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} {}^1N_{x1,m}^{AA} \sinh({}^1r_{1,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1N_{x2,m}^{AA} \sinh({}^1r_{2,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1N_{x3,m}^{AA} \sinh({}^1r_{3,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1N_{x4,m}^{AA} \sinh({}^1r_{4,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^2N_{x1,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{7,m}^{AA} & {}^2N_{x2,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{8,m}^{AA} & {}^2N_{x3,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{9,m}^{AA} & {}^2N_{x4,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{10,m}^{AA} \\ {}^1\bar{N}_{xp1,m}^{AA} \cosh({}^1r_{1,m}^{AA}l) I_{2,m}^{AA} & {}^1\bar{N}_{xp2,m}^{AA} \cosh({}^1r_{2,m}^{AA}l) I_{2,m}^{AA} & {}^1\bar{N}_{xp3,m}^{AA} \cosh({}^1r_{3,m}^{AA}l) I_{2,m}^{AA} & {}^1\bar{N}_{xp4,m}^{AA} \cosh({}^1r_{4,m}^{AA}l) I_{2,m}^{AA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1\bar{Q}_{x1,m}^{AA} \cosh({}^1r_{1,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1\bar{Q}_{x2,m}^{AA} \cosh({}^1r_{2,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1\bar{Q}_{x3,m}^{AA} \cosh({}^1r_{3,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1\bar{Q}_{x4,m}^{AA} \cosh({}^1r_{4,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1M_{x1,m}^{AA} \sinh({}^1r_{1,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1M_{x2,m}^{AA} \sinh({}^1r_{2,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1M_{x3,m}^{AA} \sinh({}^1r_{3,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^1M_{x4,m}^{AA} \sinh({}^1r_{4,m}^{AA}l) I_{1,m}^{AA} & {}^2M_{x1,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{7,m}^{AA} & {}^2M_{x2,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{8,m}^{AA} & {}^2M_{x3,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{9,m}^{AA} & {}^2M_{x4,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{10,m}^{AA} \\ {}^1N_{\phi1,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{17,m}^{AA} & {}^1N_{\phi2,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{18,m}^{AA} & {}^1N_{\phi3,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{19,m}^{AA} & {}^1N_{\phi4,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{20,m}^{AA} & {}^2N_{\phi1,m}^{AA} \sinh({}^2r_{1,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2N_{\phi2,m}^{AA} \sinh({}^2r_{2,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2N_{\phi3,m}^{AA} \sinh({}^2r_{3,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2N_{\phi4,m}^{AA} \sinh({}^2r_{4,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2N_{\phi x1,m}^{AA} \cosh({}^2r_{1,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} & {}^2N_{\phi x2,m}^{AA} \cosh({}^2r_{2,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} & {}^2N_{\phi x3,m}^{AA} \cosh({}^2r_{3,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} & {}^2N_{\phi x4,m}^{AA} \cosh({}^2r_{4,m}^{AA}\theta) I_{15,m}^{AA} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^2\bar{Q}_{\phi1,m}^{AA} \cosh({}^2r_{1,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2\bar{Q}_{\phi2,m}^{AA} \cosh({}^2r_{2,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2\bar{Q}_{\phi3,m}^{AA} \cosh({}^2r_{3,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2\bar{Q}_{\phi4,m}^{AA} \cosh({}^2r_{4,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} \\ {}^1M_{\phi1,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{17,m}^{AA} & {}^1M_{\phi2,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{18,m}^{AA} & {}^1M_{\phi3,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{19,m}^{AA} & {}^1M_{\phi4,m}^{AA} (-1)^{(m-1)} I_{20,m}^{AA} & {}^2M_{\phi1,m}^{AA} \sinh({}^2r_{1,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2M_{\phi2,m}^{AA} \sinh({}^2r_{2,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2M_{\phi3,m}^{AA} \sinh({}^2r_{3,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} & {}^2M_{\phi4,m}^{AA} \sinh({}^2r_{4,m}^{AA}\theta) I_{16,m}^{AA} \end{bmatrix}$$

Интеграли:

$$\begin{aligned} I_{1,nm}^{AA} &= \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \sin \frac{(2m-1)\pi\varphi}{2\theta} \sin \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} d\varphi = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases} & I_{2,nm}^{AA} &= \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \cos \frac{(2m-1)\pi\varphi}{2\theta} \cos \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} d\varphi = \begin{cases} 0; & m \neq n \\ 1; & m = n \end{cases} \\ I_{j,nm}^{AA} &= \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \cosh({}^2r_{i,m}^{AA}\varphi) \cos \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} d\varphi = \frac{4(1-2n)\pi(-1)^n \cosh({}^2r_{i,m}^{AA}\theta)}{(1-2n)^2\pi^2 + 4({}^2r_{i,m}^{AA}\theta)^2} & I_{j,nm}^{AA} &= \frac{1}{\theta} \int_{-\theta}^{\theta} \sinh({}^2r_{i,m}^{AA}\varphi) \sin \frac{(2n-1)\pi\varphi}{2\theta} d\varphi = -\frac{8{}^2r_{i,m}^{AA}\theta(-1)^n \cosh({}^2r_{i,m}^{AA}\theta)}{(1-2n)^2\pi^2 + 4({}^2r_{i,m}^{AA}\theta)^2} \end{aligned}$$

Интеграли од  $I_{11,nm}^{AA}$  до  $I_{20,nm}^{AA}$  су исти као за SA део уз смену  $SA \rightarrow AA$ .



## БИОГРАФИЈА АУТОРА

Невенка Коларевић је рођена у Београду 09.11.1981. године.

Пету београдску гимназију је завршила 2000. године, када и уписује студије на Грађевинском факултету Универзитета у Београду.

Дипломирала је 2006. године на Одсеку за Конструкције са просечном оценом 8.74. Дипломски рад под називом “Интеракција конструкција-тло код конзолних армиранобетонских дијафрагми” одбранила је са оценом 10.

Докторске студије на Грађевинском факултету у Београду уписала је 2007. године. Од јануара 2008. године запослена је у звању асистента-студента докторских студија на Катедри за Техничку механику и теорију конструкција.

Удата је и мајка је двоје деце.