

**УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ**

**ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ**

**Станко Б. Ћорић**

**НЕЛИНЕАРНА АНАЛИЗА  
СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА**

**докторска дисертација**

**Београд, 2013**

**UNIVERSITY OF BELGRADE**  
**FACULTY OF CIVIL ENGINEERING**

**Stanko B. Ćorić**

**NONLINEAR STABILITY ANALYSIS**  
**OF THE FRAME STRUCTURES**

**doctoral dissertation**

**Belgrade, 2013**

МЕНТОР:

др Станко Брчић, редовни професор  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

1. др Станко Брчић, редовни професор  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду
2. др Александар Прокић, редовни професор  
Грађевински факултет у Суботици,  
Универзитет у Новом Саду
3. др Елена Думова-Јованоска, редовни професор  
Грађевински факултет у Скопју,  
Универзитет Св. Кирил и Методиј
4. др Растислав Мандић, ванредни професор  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду
5. др Мира Петронијевић, ванредни професор  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

ДАТУМ ОДБРАНЕ:

## **ЗАХВАЛНОСТ**

Желим да захвалим свом ментору, проф. др Станку Брчићу, на драгоценој помоћи и сугестијама током израде докторске дисертације.

Захваљујем на подршци и разумевању и члановима Катедре за Техничку механику и теорију конструкција, а посебно колегама са предмета Техничка механика.

На крају, захваљујем се својој породици, пре свега супрузи Маји, која је преузела многе моје обавезе и омогућила ми несметан рад на дисертацији.

## НЕЛИНЕАРНА АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА

### Резиме

У овој докторској дисертацији приказана је нелинеарна анализа стабилности оквирних носача, односно истраживан је феномен губитка стабилности оквирних носача у еласто-пластичној области. Нумеричка анализа је спроведена применом методе коначних елемената. Матрице крутости су изведене коришћењем тригонометријских интерполационих функција које се односе на тачно решење диференцијалне једначине савијања штапа према теорији другог реда. У случају када се извијање конструкције дешава у пластичној области, константан модул еластичности  $E$  у матрици крутости замењен је тангентним модулом  $E_t$  који прати промену крутости штапа у нееластичној области и функција је нивоа оптерећења у штапу. За потребе ове дисертације формиран је део рачунарског програма ALIN који може да се користи за еластичну и еласто-пластичну анализу стабилности оквирних конструкција. Овај програм је написан у C++ програмском језику. Применом овог програма омогућено је и одређивање критичног оптерећења оквирних носача у еластичној и нееластичној области. У дисертацији је формиран и алгоритам за прорачун дужина извијања притиснутих штапова стубова оквирних носача, а који се базира на прорачуну глобалне анализе стабилности оквирне конструкције. Резултати применом овог алгоритма упоређени су са решењима која се добијају коришћењем европских EC3 и домаћих ЈУС стандарда за оквирне челичне конструкције, а која су приближног карактера. Важно је нагласити да у наведеним европским и домаћим стандардима и критична сила у пластичној области одређује се само приближним прорачуном. Овај поступак предвиђа да се прво одреди критична сила у еластичној области, а затим се на бази кривих извијања дефинисаних преко приближних, емпиријских формула, одређује критична сила у пластичној области. У оквиру ове дисертације формулисан је алгоритам нумеричког прорачуна којим се овај приближан, „мешовит“ прорачун замењује тачнијим прорачуном који омогућује праћење феномена губитка стабилности оквирног носача у пластичној области и директно одређивање његове критичне силе у тој области.

Кључне речи: стабилност конструкција, оквирни носачи, нелинеарна еласто-пластична анализа, метод коначних елемената, дужина извијања.

Научна област: Грађевинарство

Ужа научна област: Техничка механика и теорија конструкција

УДК:624.046:624.072.2:519.62 (043.3)

## NONLINEAR STABILITY ANALYSIS OF THE FRAME STRUCTURES

### **Abstract**

In this doctoral thesis the nonlinear stability analysis of frame structures is presented. The phenomenon of instability of frames in elasto-plastic domain was investigated. Numerical analysis was performed by the finite element method. Stiffness matrices were derived using the trigonometric shape functions related to exact solution of the differential equation of bending according to the second order theory. When the buckling of structure occurs in plastic domain, it is necessary to replace the constant modulus of elasticity  $E$  with the tangent modulus  $E_t$ . Tangent modulus is stress dependent function and takes into account the changes of the member stiffness in the inelastic range. For the purposes of numerical investigation in this thesis, part of the computer program ALIN was created in a way that this program now can be used for elastic and elasto-plastic stability analysis of frame structures. This program is developed in the C++ programming language. Using this program, it is possible to calculate the critical load of frames in the elastic and inelastic domain. In this thesis, the algorithm for the calculation of buckling lengths of compressed columns of the frames was established. The algorithm is based on the calculation of the global stability analysis of frame structures. Results obtained using this algorithm were compared with the approximate solutions from the European (EC3) and national (JUS) standards for the steel structures. It is important to emphasize that in these standards, calculation of the critical load in the plastic domain is also based on the approximate procedure. This procedure means that the critical load in the elastic domain should be calculated first, and after that, on the basis of the buckling curves, the critical load in the plastic domain can be obtained. These curves are defined by the approximate, empirical formulas. Instead of such "mixed" procedure given in the standards, in this thesis a more accurate procedure is presented. By this procedure it is possible to follow the behavior of the plane frames in plastic domain and to calculate the real critical load in that domain.

Key words: stability of structures, frame structures, nonlinear elasto-plastic analysis, finite element method, buckling length

Scientific field: Civil engineering

Specific scientific field: Engineering mechanics and theory of structures

UDK: 624.046:624.072.2:519.62 (043.3)



## САДРЖАЈ

1. УВОД .....	1
2. ПРЕГЛЕД ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА У ОБЛАСТИ СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА .....	5
2.1 Стабилност изолованог штапа са различитим граничним условима ...	6
2.2 Прорачун вишеспратног оквира са једним пољем .....	15
2.3 Прорачун вишеспратног оквира са више поља .....	18
2.4 Примена енергетског поступка .....	20
2.5 Један поступак за повећање тачности приближних решења .....	22
2.6 Примена методе коначних елемената коришћењем геометријске матрице крутости .....	26
3. СТАБИЛНОСТ ЛИНИЈСКИХ НОСАЧА У ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНОЈ ОБЛАСТИ .....	30
3.1 Анализа стабилности у еластичној области .....	30
3.2 Анализа стабилности у нееластичној области .....	42
4. ПРОГРАМ ALIN ЗА ПРОРАЧУН СТАБИЛНОСТИ НОСАЧА .....	53
4.1 Анализа коначних елемената .....	55
4.1.1 Вектор генералисаних померања и генералисаних сила .....	55
4.1.2 Матрица крутости .....	56
4.1.3 Вектор еквивалентног оптерећења .....	61
4.1.4 Редукција матрице крутости и вектора еквивалентног оптерећења .	63
4.1.5 Матрица трансформације .....	65
4.2 Анализа носача .....	67
4.2.1 Директно формирање матрице крутости и вектора еквивалентног оптерећења система .....	67
4.2.2 Нумеричко моделирање контурних услова .....	70
4.2.3 Анализа система елемената по теорији првог реда .....	71
4.2.4 Анализа система елемената по теорији другог реда .....	73

4.2.5	Анализа стабилности система у еластичној и нееластичној области	75
4.3	Програм ALIN	78
4.3.1	Концепт програма	78
4.3.2	Улазна датотека	78
4.3.3	Излазна датотека	85
4.3.4	Организација програма	86
4.4	Примери и контрола програмом ALIN	93
4.4.1	Анализа оквира према теорији првог и другог реда	93
4.4.2	Анализа стабилности појединачног штапа	99
5.	ИСТРАЖИВАЊЕ СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА ПРИМЕНОМ ПРОГРАМА ALIN	105
5.1	Понашање оквирних конструкција у еласто-пластичној области	105
5.1.1	Једносратни оквир са померљивим чворовима	105
5.1.2	Једносратни оквир са непомерљивим чворовима	109
5.1.3	Двоосратни оквири са померљивим чворовима	111
5.1.4	Двоосратни оквири са непомерљивим чворовима	113
5.1.5	Шестосратни оквири са померљивим чворовима	116
5.1.6	Шестосратни оквири са непомерљивим чворовима	119
5.2	Одређивање дужина извијања и носивости притиснутих штапова оквирних носача	124
5.2.1	Одређивање дужине извијања притиснутог штапа	124
5.2.2	Одређивање носивости притиснутог штапа	127
5.3	Параметарска анализа стабилности оквирних носача са оценом тачности решења датих у стандардима за прорачун челичних оквирних конструкција	131
5.3.1	Једносратни оквир	132
5.3.2	Вишесратни оквири	136
5.3.2.1	Вишесратни оквирни носач са константним оптерећењем у стубовима	136
5.3.2.2	Вишесратни оквирни носач са променљивим (скоковитим) оптерећењем	142

5.3.2.3 Вишеспратни оквирни носач код кога крутост стубова прати повећање аксијалне силе у стубовима . . . . .	146
5.3.2.4 Упоредна анализа вишеспратних укљештених оквирних носача са померљивим чворовима . . . . .	149
5.3.2.5 Зглобно ослоњени вишеспратни оквири . . . . .	165
5.3.3 Једносратни оквир са непомерљивим чворовима . . . . .	172
5.3.4 Вишеспратни оквири са непомерљивим чворовима . . . . .	177
6. ЗАКЉУЧАК . . . . .	183
Литература . . . . .	186
Анекс . . . . .	190
Биографија аутора . . . . .	199
Изјава о ауторству . . . . .	200
Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада . . . . .	201
Изјава о коришћењу . . . . .	202

## 1. УВОД

Предмет ове докторске дисертације је нелинеарна анализа стабилности оквирних носача, односно истраживање феномена губитка стабилности оквирних носача у еласто-пластичној области.

Проблеми губитка стабилности армирано бетонских, а још више челичних конструкција, веома су актуелни, а посебно имајући у виду жеље пројектаната да граде атрактивне објекте великих висина и распона, односно велике виткости. Прорачун оваквих објеката, посебно са гледишта анализе њихове стабилности, захтева примену сложених нумеричких модела. Иако постоји значајан број радова у литератури који су посвећени разним проблемима стабилности конструкција, и даље има доста нерешених или недовољно решених проблема, посебно када је реч о понашању реалних грађевинских конструкција у еласто-пластичној области.

Један од главних циљева ове дисертације је формирање сопственог рачунарског програма који може да се користи за нелинеарну, односно еласто-пластичну анализу стабилности оквирних конструкција. Због своје сложености овај вид нелинеарне анализе није заступљен у стандардним инжењерским прорачунима грађевинских конструкција, па зато ни у стандардним комерцијалним програмима за прорачун оквирних конструкција

Треба напоменути да се у постојећим европским и националним стандардима (па и у нашим ЈУС стандардима), критична сила у пластичној области, за притиснуте штапове у челичним оквирним конструкцијама, одређује само приближним прорачуном. Овај поступак предвиђа да се прво одреди критична сила у еластичној области, а затим се на бази кривих извијања дефинисаних преко приближних, емпиријских формула, одређује критична сила у пластичној области.

У оквиру ове дисертације формулисаће се алгоритам нумеричког прорачуна којим ће се овај приближан, „мешовит“ прорачун заменити тачнијим прорачуном који

омогућује праћење феномена губитка стабилности оквирног носача у пластичној области и директно одређивање његове критичне силе у тој области. У ту сврху овде ће се формирати део компјутерског програма ALIN (Анализа ЛИнијских Носача) за решавање како геометријски тако и физички (материјално) нелинеарних проблема.

Прорачун дужине извијања притиснутих штапова оквирних конструкција веома је присутан у рутинским инжењерским прорачунима, па је као такав нашао место и у стандардима за анализу стабилности оквирних конструкција. Овај прорачун је такође приближног карактера и састоји се у томе да се из конструкције као целине издвајају поједини изоловани штапови и формирају једноставни рачунски модели. На тај начин се до решења долази релативно лако помоћу одговарајућих формула и дијаграма.

Један од циљева истраживања у оквиру ове дисертације је и формирање алгорита за прорачун дужина извијања који за разлику од напред наведеног, даје тачније резултате, а базира се на прорачуну глобалне анализе стабилности оквирне конструкције. Овај алгоритам прорачуна биће такође имплементиран у програму ALIN и његовим коришћењем истраживаће се у којој су мери приближни прорачуни дати у европским ЕС3 и нашим ЈУС стандардима за челичне конструкције тачни, односно да ли се и под којим условима и даље могу користити.

Ова рад је подељен у шест поглавља.

У овом првом, уводном поглављу, формулисан је основни предмет и циљ истраживања, а затим је приказана структура докторске дисертације по поглављима.

Поглавље 2 даје преглед досадашњих истраживања и предложених решења у области стабилности оквирних носача. Прати се историјски развој тих метода почевши од првих решења која се односе на испитивање стабилности притиснутог штапа са различитим граничним условима. У наставку се даје приказ приближних метода прорачуна које се заснивају на формирању једноставних рачунских модела оквирне конструкције. Ове приближне методе су значајне за анализу зато што

чине основу прорачуна који се примењује у постојећим националним и европским прописима за стабилност челичних конструкција. На крају поглавља је дат и приказ савремених метода прорачуна, као што су енергетска метода и метода коначних елемената заснована на примени геометријске матрице крутости.

У трећем поглављу приказане су теоријске основе прорачуна који је примењен у оквиру ове докторске дисертације за анализу стабилности оквирних носача у еласто-пластичној области. Како је за нумеричку анализу примењена метода коначних елемената, у овом поглављу су изведене матрице крутости аксијално притиснутог и затегнутог штапа. При томе је важно напоменути да су уместо стандардног решења преко геометријске матрице крутости, овде матрице крутости изведене коришћењем интерполационих функција које се односе на тачно решење диференцијалне једначине савијања штапа према теорији другог реда. Пошто се у прорачуну осим геометријске уводи и материјална (физичка) нелинеарност, матрице крутости су изведене и коришћењем тангентног модула еластичности који прати промену крутости штапа у нееластичној области. На крају овог поглавља дати су и нумерички примери који илуструју тачност примењеног поступка прорачуна.

Програм ALIN приказан је у четвртном поглављу. Овај програм је написан у C++ програмском језику и омогућује комплексну анализу линијских носача у равни и простору. Основне могућности програма су статички и динамички прорачуни конструкција по теорији првог и другог реда. У оквиру ове дисертације обављено је проширење програма тако што је направљен део који омогућује и прорачун стабилности оквирних носача у еластичној и нееластичној области. Теоријске основе овог прорачуна, као и изрази за одговарајуће матрице крутости приказани су у трећем поглављу. Применом програма урађени су контролни примери који су илустровани улазним и излазним датотекама. Ови примери су послужили за верификацију тачности програма, тако што су резултати према теорији другог реда упоређени са решењима која су добијена коришћењем програма MASTAN2 и TOWER, док су резултати који се односе на стабилност штапова упоређени са познатим решењима из литературе.

Истраживање понашања стабилности оквирних носача применом програма ALIN спроведено је у петом поглављу. Формулисана је метода за прорачун критичне силе, односно дужине извијања оквирних конструкција, а која се заснива на анализи глобалне стабилности конструкције. Тако срачуната сила омогућује да се даље срачунају и критичне силе, односно дужине извијања појединих притиснутих штапова у конструкцији. У оквиру нумеричке анализе прво је приказан прорачун критичног оптерећења у еласто-пластичној области. Анализирани су примери једносратних и вишесратних носача са померљивим и непомерљивим чворовима. Указано је на грешке када се користи методологија прорачуна на бази кривих извијања које су дате у постојећим прописима. Затим је обављена и параметарска анализа стабилности оквирних носача са оценом тачности решења датих у европским ЕС3 и домаћим ЈУС стандардима за прорачун челичних конструкција. Испитивано је у којој мери сложеност статичког система и оптерећења утичу на тачност приближних решења из стандарда. Ради лакшег увида у упоређивање резултата који су добијени коришћењем програма ALIN са резултатима према стандардима, у Анексу ове тезе приложен је део европских стандарда ЕС3 и домаћих ЈУС стандарда који се односе на дужине извијања притиснутих штапова у челичним конструкцијама.

У завршном, шестом поглављу, на бази добијених резултата дати су одговарајући закључци који се односе на допринос ове дисертације у области истраживања нелинеарног понашања стабилности оквирних носача.

На крају, као што је то и уобичајено, дат је приказ литературе која је коришћена при изради ове докторске дисертације.

## **2. ПРЕГЛЕД ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА У ОБЛАСТИ СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА**

Истраживања у области стабилности линијских носача, почевши од првих радова Euler-а крајем осамнаестог века па све до недавно, углавном су се базирала на решавању диференцијалних једначина извијања штапа изведених према теорији другог реда. Да би се тај проблем лакше решио када су у питању сложене конструкције, истраживачи су вршили одређена упрошћења тако да су, на пример, конструкције поделили на системе штапова са непомерљивим чворовима и системе штапова са померљивим чворовима. Такође су посебно изучавали штапове са еластичним укљештењима на једном или оба краја, и то у комбинацији са еластичним ослонцима или без њих. Таква упрошћена решења су затим послужила за формулисање поступака прорачуна вишеспратних оквира са једним пољем, а касније и за вишеспратне оквире са више поља. У оквиру овог поглавља укратко ће бити приказане теоријске основе и резултати наведених истраживања која су омогућила формулисање релативно једноставних, приближних метода прорачуна стабилности оквирних носача. Ове методе коришћене су затим при формулисању постојећих стандарда за пројектовање и прорачун грађевинских конструкција.

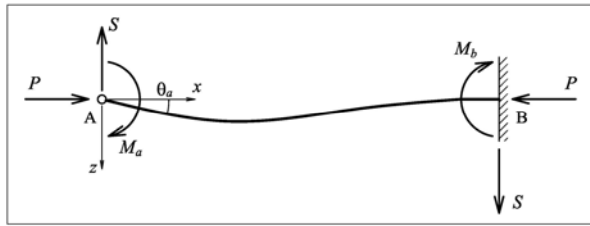
У наставку овог поглавља дат је и преглед новијих метода прорачуна, међу којима се посебно истиче метода коначних елемената заснована на примени геометријске матрице крутости. Она се данас сматра као најефикаснија нумеричка метода за инжењерске прорачуне укључујући и оне из домена стабилности конструкција, па је као таква широко примењена код савремених комерцијалних програма који решавају проблем стабилности оквирних носача.



## 2.1 СТАБИЛНОСТ ИЗОЛОВАНОГ ШТАПА СА РАЗЛИЧИТИМ ГРАНИЧНИМ УСЛОВИМА

### » Штап (систем) са непомерљивим чворовима

Посматра се штап који је на једном крају слободно ослоњен, док је на другом крају укљештен. Ако се у чвору А зада моменат  $M_a$  и сила  $P$ , јавиће се реакције веза које су приказане на слици 2.1.



слика 2.1 Штап зглобно везан у А и укљештен у В оптерећен моментом  $M_a$

У пресеку штапа на одстојању  $x$  од левог краја, моменат савијања  $M$  износи:

$$M = +Pw + Sx + M_a = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.1)$$

одакле следи

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \mu^2 w = -\frac{Sx}{EI} - \frac{M_a}{EI} \quad \text{где је} \quad \mu^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.2)$$

Решење горње диференцијалне једначине гласи:

$$w = A \cdot \sin \mu x + B \cdot \cos \mu x - \frac{Sx}{P} - \frac{M_a}{P} \quad (2.3)$$

Користећи граничне услове:

$$x = 0: \quad w = 0, \quad w' = \theta_a, \quad x = L: \quad w = 0, \quad w' = 0,$$

моменти савијања на крају штапа добијају се у облику

$$M_a = sk\theta_a \quad M_b = cM_a \quad (2.4 \text{ a b})$$

$$\text{где је: } s = \frac{(\mu L / 2) \cdot (1 - \mu L \cot \mu L)}{\tan(\mu L / 2) - (\mu L / 2)}, \quad c = \frac{\mu L - \sin \mu L}{\sin \mu L - \mu L \cos \mu L}, \quad k = \frac{EI}{L} \quad (2.5 \text{ a b, c})$$

Као што се из претходних израза види, функције  $s$  и  $c$  зависе од аксијалног оптерећења  $P$ , крутости штапа  $EI$  и његове дужине  $L$ . Величина  $s$  се назива

„ротациона крутост“ штапа у чвору А, док је величина  $c$  „преносни фактор“ за моменат са чвора А на чвор В: као у [1].

У случају када у штапу нема аксијалне силе ( $P = 0$ ), може се показати да је:

$$s = 4 \text{ и } c = 0.5.$$

Уколико се зада обртање  $\theta_a$  (слика 2.2), моменти на крајевима штапа су дати изразима (2.4 а, б).



слика 2.2 Задато обртање чвора  $\theta_a$  на анализираном штапу

На слици 2.3 приказан је исти штап, стим што је чвор В ротиран за  $\theta_b$ , а чвор А је укљештен.



слика 2.3 Задато обртање чвора  $\theta_b$  на анализираном штапу

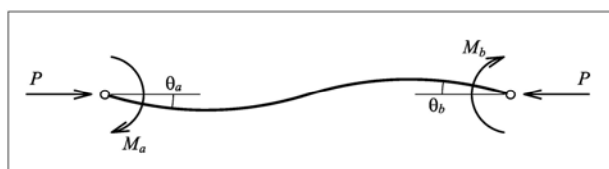
Суперпозицијом утицаја услед обртања  $\theta_a$  и  $\theta_b$  налазе се вредности за моменте:

$$M_a = k(s\theta_a + sc\theta_b), \quad M_b = k(s\theta_b + sc\theta_a) \quad (2.6 \text{ а, б})$$

Ови изрази се користе при прорачуну стабилности оквирних носача, како ће то касније бити показано.

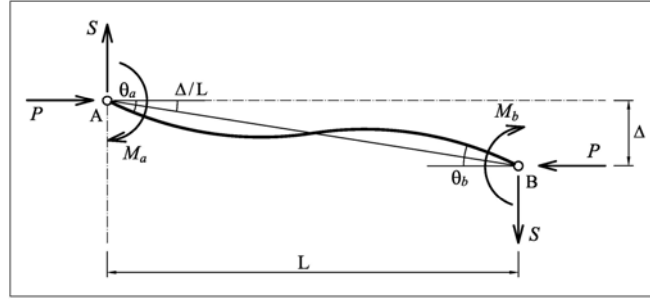
### » Штап (систем) са померљивим чворовима

Посматра се штап који је приказан на слици 2.4.



слика 2.4 Задата обртања чворова  $\theta_a$  и  $\theta_b$  на анализираном штапу

Претпоставља се да се овом штапу осим обртања  $\theta_a$  и  $\theta_b$  задаје и померање чвора В управно на недеформисану осу за величину  $\Delta$  (слика 2.5).


 слика 2.5 Задата обртања чворова  $\theta_a$  и  $\theta_b$  и померање чвора B за  $\Delta$ 

У овом случају добијају се вредности момената:

$$M_a = k \left( s\theta_a + sc\theta_b - s(I+c)\frac{\Delta}{L} \right), \quad M_b = k \left( s\theta_b + sc\theta_a - s(I+c)\frac{\Delta}{L} \right) \quad (2.7 \text{ a, b})$$

Сила S износи:

$$S = -\frac{M_a + M_b}{L} - P\frac{\Delta}{L} \quad (2.8)$$

односно, коришћењем израза 2.7 а) и 2.7 б) добија се:

$$S = -s(I+c)\frac{k}{L}(\theta_a + \theta_b) + \left\{ 2\frac{k}{L}s(I+c) - P \right\} \frac{\Delta}{L} \quad (2.9)$$

Често се овај израз приказује и у функцији Euler-ове силе, односно количника  $P/P_E$ :

$$S = -\frac{M_a + M_b}{L} - \frac{\pi^2 P}{P_E} \frac{k}{L} \frac{\Delta}{L} \quad (2.10)$$

$$S = -s(I+c)\frac{k}{L}(\theta_a + \theta_b) + \frac{k}{L} \left\{ 2s(I+c) - \frac{\pi^2 P}{P_E} \right\} \frac{\Delta}{L} \quad (2.11)$$

У случају да је сила S једнака нули добија се:

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{m}{2}(\theta_a + \theta_b) \quad (2.12)$$

$$\text{где је: } m = \left( 1 - \frac{\pi^2}{2s(I+c)} \frac{P}{P_E} \right)^{-1} \quad (2.13)$$

Заменом израза  $\Delta/L$  у једначине 2.7 а), б) добијају се вредности момента у облику:

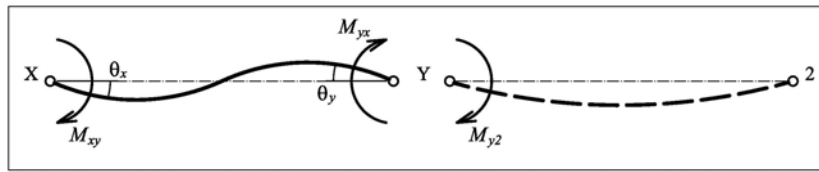
$$M_a = k(s_1\theta_a + s_1c_1\theta_b), \quad M_b = k(s_1\theta_b + s_1c_1\theta_a) \quad (2.14 \text{ a, b})$$

$$\text{где су: } s_1 = s - s(1+c)\frac{m}{2}, \quad s_1 c_1 = sc - s(1+c)\frac{m}{2} \quad (2.15)$$

Коефицијенти  $s_1$  и  $c_1$  имају исто значење као и раније изведени коефицијенти  $s$  и  $c$ , само што се не односе на случај штапа са непомерљивим ослоњцима, већ на случај штапа са померљивим ослоњцима у коме је трансверзална сила једнака нули.

### » Штап са еластичним укљештењем на једном крају

На слици 2.6 приказан је штап XY који је у чвору X слободно ослоњен, док је у чвору Y еластично укљештен. Ово укљештење је могуће приказати увођењем новог штапа Y2, као у [1], који репрезентује крутост конструкције са којом је везан штап XY.



слика 2.6 Штап XY еластично укљештен у чвору Y преко суседног елемента Y2

Постављајући услов равнотеже у чвору Y, добија се

$$M_{yx} + M_{y2} = 0 \quad (2.16)$$

односно

$$k(s\theta_y + sc\theta_x) + G_{y2}\theta_y = 0 \quad (2.17)$$

где је са  $G_{y2}$  обележена ротациона крутост штапа Y2, а вредности  $k$ ,  $s$  и  $c$  се односе на штап XY, и њихове вредности су приказане код примера штапа са непомерљивим чворовима.

Решењем претходних једначина добија се:

$$\theta_y = -\frac{ksc}{ks + G_{y2}}\theta_x, \quad \text{па је } M_{xy} = k(s\theta_x + sc\theta_y) = ks\theta_x \left(1 - \frac{ksc^2}{ks + G_{y2}}\right) \quad (2.18)$$

и коначно:

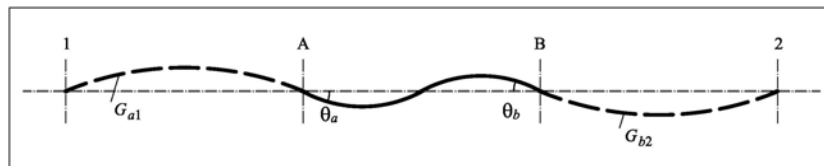
$$\frac{M_{xy}}{\theta_x} = ks \left(1 - \frac{sc^2}{s + (G_{y2}/k)}\right) = G_{xy} \quad (2.19)$$

Ова једначина омогућује да се одреди ротациона крутост  $G_{xy}$  једног краја штапа XY када је позната ротациона крутост  $G_{y2}$  конструкције која је везана за други крај штапа.

### » Штап са еластичним укљештењем на оба краја

Упрошћен модел који се често користи при анализи стабилности оквирних носача приказан је на сликама 2.7 и 2.9. Наиме, да би се одредила критична сила, на пример, за штап АВ, он се „издваја“ из конструкције, а утицај конструкције се замењује са два штапа одговарајуће крутости. При томе се могу посматрати два карактеристична случаја.

#### а) Штап са непомерљивим крајевима



слика 2.7 Штап АВ еластично укљештен преко суседних елемента А1 и В2

На слици 2.7 приказан је штап АВ који је на левом крају везан за штап А1, а на десном крају за штап В2. Као што је већ речено, ови штапови замењују утицај конструкције из које је издвојен штап АВ.

Ротациона крутост штапа А1 обележава се са  $G_{a1}$  и она представља вредност момента која изазива јединично обртање штапа А1 у чвору А. Аналогно томе уводи се и ротациона крутост  $G_{b2}$  која се односи на штап В2.

Претпоставља се да су у чворовима А и В нанети momenti  $M_A$  и  $M_B$ . Коришћењем једначина (2.6 а,б) ови momenti могу да се прикажу у функцији обртања чворова  $\theta_a$  и  $\theta_b$  у облику:

$$M_A = M_{a1} + M_{ab} = G_{a1}\theta_a + k(s\theta_a + sc\theta_b) \quad (2.20 \text{ a})$$

$$M_B = M_{b2} + M_{ba} = G_{b2}\theta_b + k(s\theta_b + sc\theta_a) \quad (2.20 \text{ б})$$

Собзиром да је zgodно да се рачуна са бездимензионалним вредностима које дефинишу крутост штапа, уводе се обележавања:

$$\xi_{a1} = \frac{G_{a1}}{k}, \quad \xi_{b2} = \frac{G_{b2}}{k}, \quad \text{где је } k = \frac{EI}{L} \quad (2.21)$$

Претходни систем једначина може да се прикаже и у матричном облику:

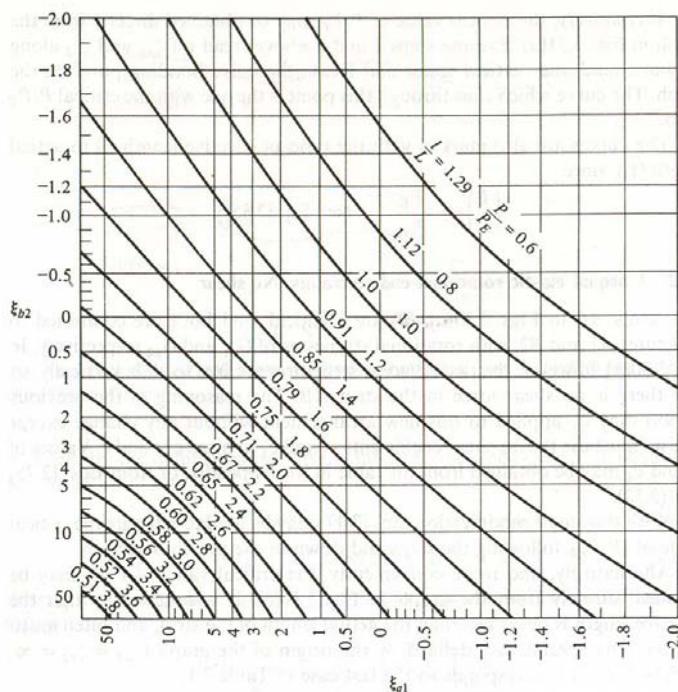
$$k \begin{bmatrix} s + \xi_{a1} & sc \\ sc & s + \xi_{b2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

Када је у питању проблем стабилности, онда су  $M_A = M_B = 0$ . Из услова за нетривијално решење обртања  $\theta_a$  и  $\theta_b$ , добија се:

$$\begin{vmatrix} s + \xi_{a1} & sc \\ sc & s + \xi_{b2} \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (s + \xi_{a1})(s + \xi_{b2}) - s^2c^2 = 0 \quad (2.23)$$

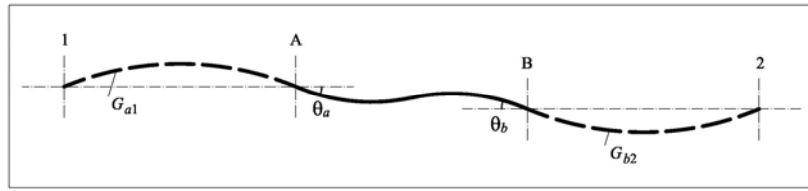
Према томе, одређивање критичног оптерећења штапа АВ своди се на тражење најмање вредности оптерећења  $P$  (односно вредности  $s$  и  $c$ ) када детерминанта (2.23) има нулту вредност.

Графички приказ решења једначине (2.23) приказан је на слици 2.8. Еквивалентни дијаграми дати су на пример у [1], [2], као и у препорукама Европске комисије за челичне конструкције [3].



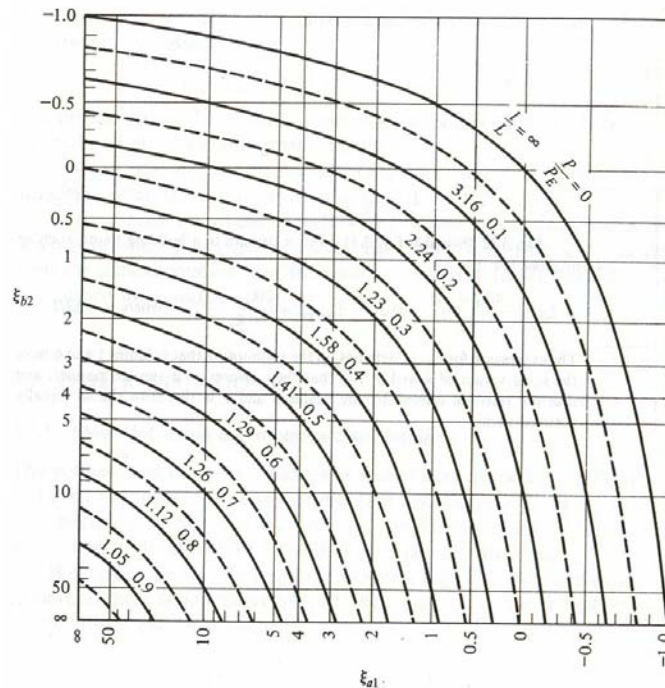
слика 2.8 Критично оптерећење еластично ослоњеног штапа са непомерљивим чворовима (дијаграм преузет из [1])

б) Штап са померљивим чворовима



слика 2.9 Штап АВ еластично укљештен преко суседних елемента А1 и В2

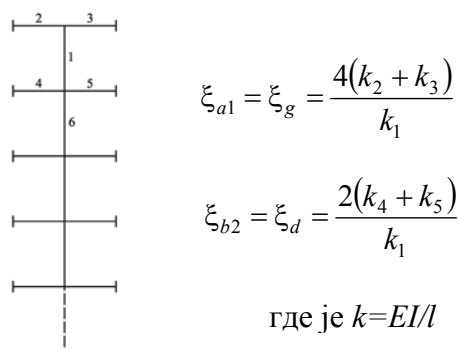
На слици 2.9 приказан је случај када се штапови А1 и В2, односно делови конструкције лево и десно од штапа АВ могу транслаторно померати у вертикалном правцу. У том случају у штапу АВ нема трансверзалне силе. Прорачун критичног оптерећења може да се спроведе на потпуно исти начин као и када су крајеви А и В непомерљиви. При томе је потребно само да се коефицијенти  $s$  и  $c$  замене са коефицијентима  $s_1$  и  $c_1$ . Решења за критичну силу, односно ефективну дужину извијања у овом случају су дата на слици 2.10.



слика 2.10 Критично оптерећење еластично ослоњеног штапа са померљивим чворовима (дијаграм преузет из [1])

Да би се користили дијаграми са слика 2.8 и 2.10 потребно је да се одреде бездимензиони коефицијенти  $\xi_{a1}$  и  $\xi_{b2}$ . На слици 2.11 приказано је одређивање ових коефицијената за стуб 1 као дела рамовске конструкције. При томе је

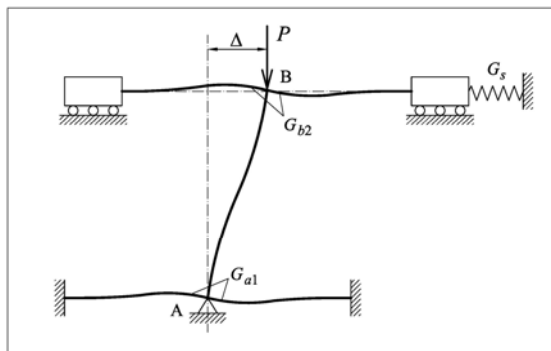
усвојена претпоставка да у риглама нема аксијалне силе и да стубови 1 и 6 имају исте вредности  $k$ .



слика 2.11 Пример одређивање коефицијената  $\xi_{a1}$  и  $\xi_{b2}$

» Штап са еластичним укљештењима и ослонцима

У овом случају се у систем уносе и еластични ослонци, тако да је сада систем сложенији од претходно разматраног. Наиме, осим ротационих крутости  $G_{a1}$  и  $G_{b2}$ , уводи се и крутост на бочно померање  $G_s$  која представља силу која се јавља при јединичном бочном померању система, слика 2.12



слика 2.12 Штап АВ са ротационим ослонцима и ослонцима против бочног померања

Да би се дошло до једначине за одређивање критичног оптерећења, у чворовима А и В се наносе спољашњи моменти  $M_A$  и  $M_B$ . Коришћењем једначина (2.7 а,б) ови моменти могу да се прикажу и у облику:

$$M_A = M_{a1} + M_{ab} = G_{a1}\theta_a + k\left(s\theta_a + sc\theta_b - s(l+c)\frac{\Delta}{L}\right) \quad (2.24 \text{ а})$$

$$M_B = M_{b2} + M_{ba} = G_{b2}\theta_b + k\left(s\theta_b + sc\theta_a - s(l+c)\frac{\Delta}{L}\right) \quad (2.24 \text{ б})$$



Једначином (2.9) била је дефинисана трансверзална сила у штапу:

$$S = -s(I+c)\frac{k}{L}(\theta_a + \theta_b) + \frac{k}{L}\left\{2s(I+c) - \frac{\pi^2 P}{P_E}\right\}\frac{\Delta}{L} = -G_s \Delta \quad (2.25)$$

Из једначине (2.25) може да се добије:

$$s(I+c)\frac{\Delta}{L} = \alpha(\theta_a + \theta_b), \quad \text{где је} \quad \alpha = \frac{s^2(I+c)^2}{2s(I+c) - \left(\frac{\pi^2 P}{P_E}\right) + \left(\frac{L^2 G_s}{k}\right)} \quad (2.26)$$

Коришћењем једначине (2.26), систем једначина (2.24 а,б) може да се прикаже и у матричном облику:

$$k \begin{bmatrix} s + \xi_{a1} - \alpha & sc - \alpha \\ sc - \alpha & s + \xi_{b2} - \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

То омогућује да се нађе критично оптерећење штапа АВ коришћењем услова о нултој вредности детерминанте:

$$\begin{vmatrix} s + \xi_{a1} - \alpha & sc - \alpha \\ sc - \alpha & s + \xi_{b2} - \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (2.28)$$

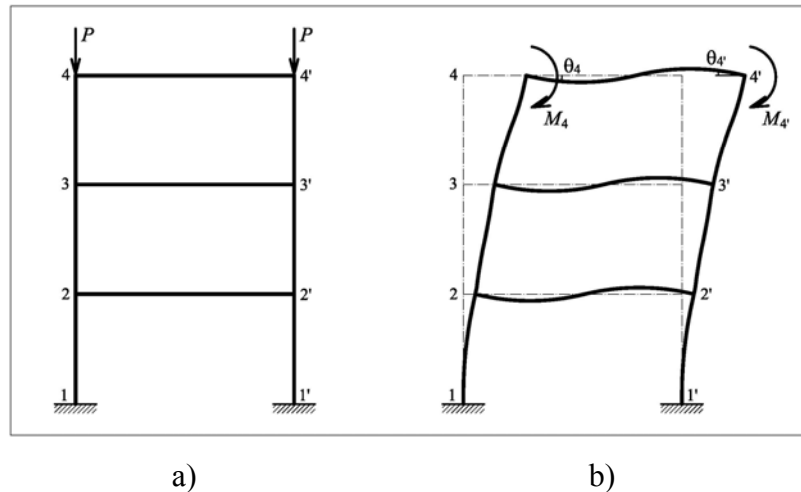
односно једначине

$$(s + \xi_{a1} - \alpha)(s + \xi_{b2} - \alpha) - (sc - \alpha)^2 = 0 \quad (2.29)$$

Треба напоменути да у случају ако је крутост  $G_s$  веома велика (тј. бесконачна), једначина (2.29) постаје индентична једначини (2.23), што одговара штапу са непомерљивим чворовима. У случају да је крутост  $G_s$  једнака нули, добија се једначина за штап са померљивим ослонцима, стим што је потребно  $s$  и  $c$  заменити са  $s_1$  и  $c_1$ .

## 2.2 ПРОРАЧУН ВИШЕСПРАТНОГ ОКВИРА СА ЈЕДНИМ ПОЉЕМ

Коришћењем израза наведених у претходном поглављу, прорачун оквира са слике 2.13 а) може да се обави на релативно једноставан начин, као што је то разматрано од стране више аутора, на пример у радовима [1], [4]:



слика 2.13 Симетричан троспратни оквир са антимеричном деформацијом

У чворовима 4 и 4' на врху приказаног оквира задају се моменти  $M_4$  и  $M_{4'}$  и на основу тога се изводе једначине које успостављају везу између момената и обртања чворова посматраног оквира.

За било коју риглу (које се означава нпр, ab), важи релација

$$M_{ab} = \frac{EI}{L}(4\theta_a + 2\theta_b) \quad (2.30)$$

Како је у питању симетричан оквир са померљивим чворовима, при извијању ће наступити његова антимерична деформација, као што је то приказао на слици 2.13b). У случају антимеричне деформације је  $\theta_a = \theta_b$ , односно

$$M_{ab} = 6\theta_a \frac{EI}{L} \quad (2.31)$$

а) пример прорачуна коришћењем једначина обртања (slope deflection equations)

Коришћењем већ добијених израза за стубове (2.14) и греде (2.30), добијају се изрази за моменте у чворовима 2, 3 и 4. У овом примеру се усваја да је за греде  $EI/L=1/3$ , а за стубове  $EI/L=2$  и  $P/P_E=0.1$  :

$$\begin{aligned}
 M_4 &= M_{44'} + M_{43} &= \frac{1}{3}(6\theta_4) + 2(s_1\theta_4 + s_1c_1\theta_3) \\
 M_3 &= M_{33'} + M_{34} + M_{32} &= \frac{1}{3}(6\theta_3) + 2(s_1\theta_3 + s_1c_1\theta_4) + 2(s_1\theta_3 + s_1c_1\theta_2) \\
 M_2 &= M_{22'} + M_{23} + M_{21} &= \frac{1}{3}(6\theta_2) + 2(s_1\theta_2 + s_1c_1\theta_3) + 2(s_1\theta_2 + s_1c_1\theta_1)
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Горњи систем једначина може да се прикаже и у матричном облику, узимајући у обзир гранични услов  $\theta_l = 0$ .

$$2 \begin{bmatrix} 1+2s_1 & s_1c_1 & 0 \\ s_1c_1 & 1+2s_1 & s_1c_1 \\ 0 & s_1c_1 & 1+s_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{Bmatrix} \tag{2.33}$$

Критично оптерећење се налази из услова о нетривијалности решења:

$$\det \begin{vmatrix} (1+2s_1) & s_1c_1 & 0 \\ s_1c_1 & (1+2s_1) & s_1c_1 \\ 0 & s_1c_1 & (1+s_1) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.34}$$

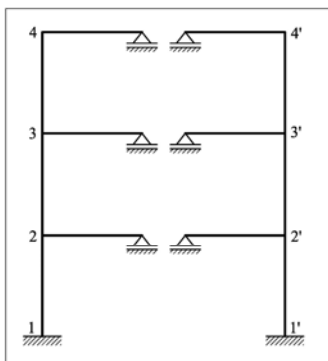
За усвојене вредности, за стубове  $EI/L=2$  и за греде  $EI/L=1/3$ , добија се вредност критичне силе:  $P_{cr} = 1.421 \frac{EI}{L}$ .

b) прорачун коришћењем израза за ротациону крутост (stiffness distribution equations)

У анализи штапа са еластичним укљештењем на једном крају показано је да се ротациона крутост у чвору X штапа XY (слика 2.6) може срачунати из једначине (2.18), у случају када је крутост конструкције са десне стране (Y2) позната. У случају када чвор X може да се помера транслаторно, при чему нема трансверзалне силе у штапу XY, једначина (2.18) остаје да важи, стим што је потребно да се величине  $s$  и  $c$  замене са величинама  $s_l$  и  $c_l$ . То омогућује да се срачунају крутости и код система са померљивим чворовима, као што је случај код носача са слике 2.13.

Прорачун критичне силе у овом случају је једноставнији ако се посматрани носач подели на два дела као што је приказано на слици 2.14. Наиме, као што је већ речено, у питању је носач који при извијању има антисиметричну деформацију, тако

да је довољно да се посматра само једна његова половина. Овде је то лева половина носача.



слика 2.14 Симетричан троспратни оквир подељен на два дела

У овом примеру тражи се крутост у чвору 4. Полази се од супротног краја и тражи се, sukcesивно, крутост на врху стуба 21, стуба 32 и стуба 43.

$$G_{21} = 2s_l \left( 1 - \frac{s_l c_l^2}{s_l + \infty} \right)$$

$$G_{32} = 2s_l \left( 1 - \frac{s_l c_l^2}{s_l + (G_{21} + 2)/2} \right)$$

$$G_{43} = 2s_l \left( 1 - \frac{s_l c_l^2}{s_l + (G_{32} + 2)/2} \right)$$

Укупна ротациона крутост чвора 4 је сума крутости стуба и ригле који су спојени у том чвору:  $G_4 = G_{43} + 2.0$

Поступак одређивање критичне силе и у овом случају се своди на варирање вредности силе  $P$  (односно вредности  $s_l$  и  $c_l$ ) и одређивање најмање вредности при којој посматрана крутост у чвору 4 мења знак, односно достиже нулту вредност. Може да се покаже да је и у овом случају:

$$P_{cr} = 1.421 \frac{EI}{L}$$

Треба напоменути да се наведени поступак може применити на било који чвор посматраног носача, и да при томе доводи до истог резултата. Тако, на пример, ако се посматра чвор 2, потребно је кренути одозго од чвора 4 ка чвору 3 и чвору 2, а одоздо од чвора 1 ка чвору 2.

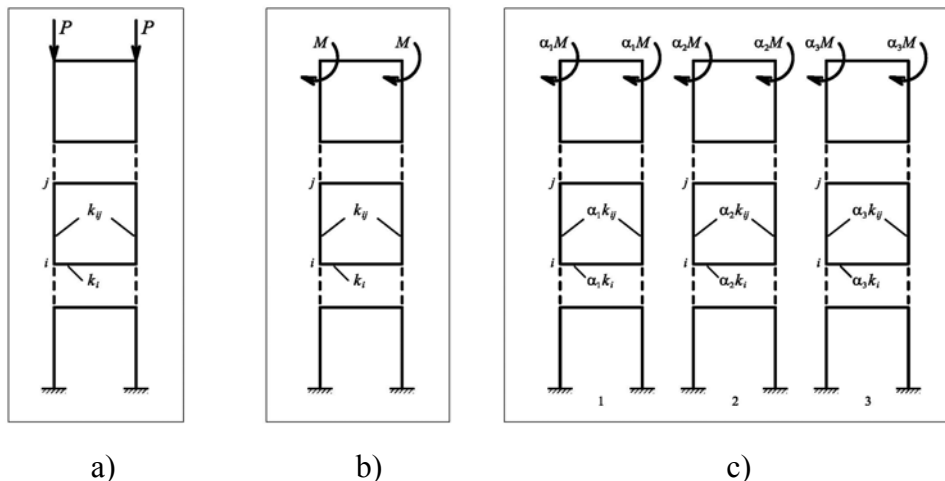
### 2.3 ПРОРАЧУН ВИШЕСПРАТНОГ ОКВИРА СА ВИШЕ ПОЉА

Приказани поступак прорачуна вишеспратног оквира са једним пољем може да се у извесним случајевима примени и када су у питању знатно сложеније конструкције оквира са више поља.

Посматра се вишеспратни симетрични оквир са једним пољем, симетрично оптерећен аксијалним силама  $P$ , слика 2.15 а). За штапове се усвајају следеће карактеристике, као и у [1]:

стубови “ $ij$ ”:  $EI/L = k_{ij}$ ,    греде на спрату “ $i$ ”:  $EI/L = k_i$ .

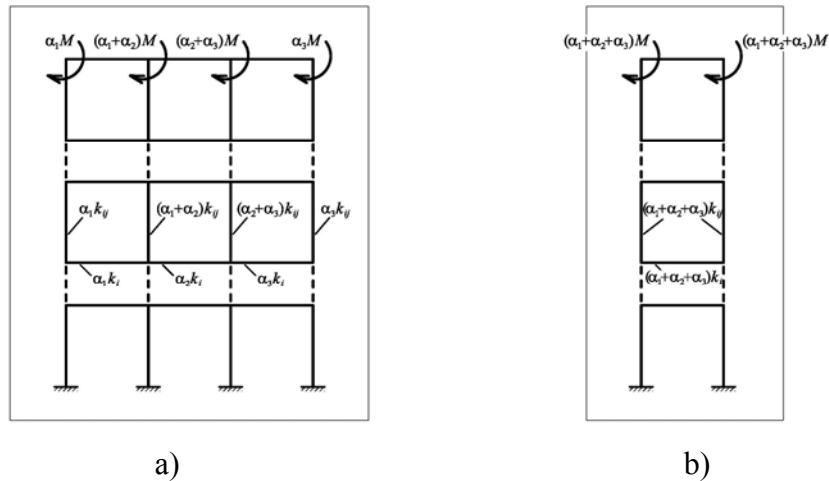
На врху оквира нанесу се моменти савијања  $M$  (слика 2.15 б), који ће, као и раније, послужити да се из настале деформације носача одреди критично оптерећење.



слика 2.15 Анализа вишеспратног оквира са више поља

Затим се формира нови носач чије су вредности  $EI/L$  стубова и ригли, као и момената  $M$ , помножене са  $\alpha_1$ , при чему су вредности аксијалних сила у стубовима остале непромењене. На слици 2.15 с) приказани су још два таква носача добијена множењем  $EI/L$  и  $M$  са  $\alpha_2$ , односно  $\alpha_3$ .

Три оквира на слици 2.15 с) имају, услед задатих оптерећења, идентичну деформацију, односно обртања и померања чворова. То значи да се могу „скупити“ у један оквир са три поља чије су карактеристике стубова, ригли и оптерећења дати на слици 2.16 а). Овакав оквир може затим да се „сабере“ у оквир са једним пољем који је приказан на слици 2.16 б).

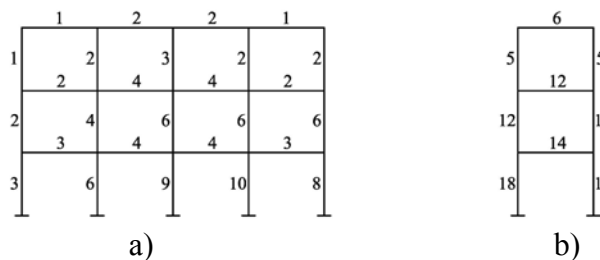


слика 2.16 Оквири добијени суперпонирањем оквира са слике 2.15 с)

На основу напред изнетог јасно је да се прорачун оквира са више поља може свести на прорачун еквивалентног оквира са једним пољем који има следеће карактеристике:

- у нивоу сваког спрата ( $i$ ) вредност  $EI / L$  греде представља суму вредности крутости греда оригиналног оквира,
- у нивоу између два спрата ( $ij$ ) вредност  $EI / L$  стуба представља половину суме вредности крутости стубова оригиналног оквира,
- задато оптерећење моментима представља половину суме задатих момената код оригиналног оквира,
- вредности аксијалних сила у стубовима се не сабирају, већ одговарају силама код оригиналних оквира.

Запажања која се базирају на оваквим закључцима дата су и у [5], [6]. На слици 2.17 а) дат је пример једног вишеспратног оквира са четири поља. Применом овде наведеног поступка, његов прорачун се поједностављује и своди на прорачун вишеспратног оквира са само једним пољем (слика 2.17 б). Бројеви на стубовима и гредама оквира приказују вредности њихових крутости (тј. односа  $EI / L$ ).



слика 2.17 Крутости греда и стубова еквивалентног оквира са једним пољем

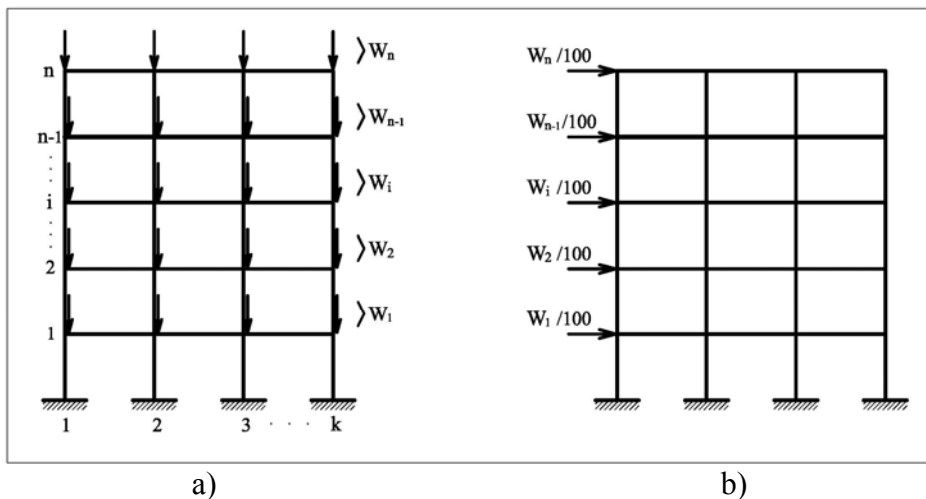
## 2.4 ПРИМЕНА ЕНЕРГЕТСКОГ ПОСТУПКА

У општем случају, због различитих димензија стубова и ригли, као и различитог оптерећења, вишеспратни оквири са више поља не могу да се замене једним еквивалентним оквиром и да се на тај начин одреди њихово критично оптерећење. Уместо тога, поједини аутори [7], [8] су решење проблема потражили у примени енергетског поступка, као што ће овде бити приказано.

Посматра се оквир на слици 2.18 а) где је на сваком спрату задато вертикално оптерећење. Са  $W_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) се обележава сума тог оптерећења по сваком спрату. Сада се ово вертикално оптерећење замени са хоризонталним оптерећењем

$$S_i = W_i / 100$$

које делује у нивоу сваког спрата, као што је приказано на слици 2.18 б).



слика 2.18 Вертикално и замењујуће хоризонтално оптерећење оквира

Применом линеарне анализе могуће је одредити хоризонтално померање сваког спрата услед тако дефинисаног хоризонталног оптерећења. Релативно хоризонтално померање спрата  $i$  се обележава са  $u_i$ , а висина тог спрата са  $h_i$ . Потребно је да се израчуна однос  $u_i/h_i$  за сваки спрат појединачно, као и да се одреди његова највећа вредност

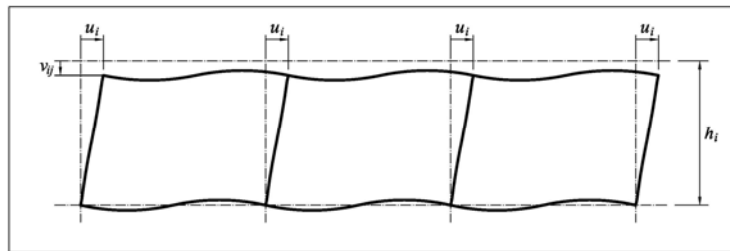
$$(u_i / h_i)_{max}$$

Критично оптерећење се сада добија тако што се вредности вертикалног оптерећења  $W_1, W_2, \dots, W_n$  множе заједничким фактором

$$\lambda = \frac{0.009}{(u_i / h_i)_{max}} \tag{2.35}$$

Аутори овог прорачуна доказују да ово решење даје доњу границу за критично оптерећење са грешком мањом од 20%. Ако се вредност 0.009 у решењу замени са 0.010, више није у питању доња граница, али је зато грешка у границама од 10%. Наведени израз за критично оптерећење изведен је применом енергетског поступка на следеће начин:

Претпостави се да се при извијању услед критичне силе оквирни носач, односно његов спрат „ $i$ “, има деформацију која је приказана на слици 2.19.



слика 2.19 Померања  $i$ -тог спрата анализираниг оквира

Рад вертикалног оптерећења по свим спратовима износи

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \lambda P_{ij} v_{ij} \quad (2.36)$$

где је са  $n$  означен број спратова, а са  $k$  број сила у оквиру једног спрата. Са индексом  $i$  се означава одређени спрат, а са  $j$  стуб оквирног носача. Вредност  $\lambda$  је фактор извијања који треба да се израчуна.

Рад хоризонталних сила  $S_i$  у овом случају гласи:

$$\sum \frac{1}{2} S_i u_i \quad (2.37)$$

Изједначавањем израза (2.36) и (2.37) добија се фактор извијања  $\lambda$  у облику:

$$\lambda = \frac{\sum \frac{1}{2} S_i u_i}{\sum \sum P_{ij} v_{ij}} \quad (2.38)$$

Применом Rayleigh-Ritz-овог поступка, Ногне [7] је показао да се вредности померања  $v_{ij}$  налазе између  $0.5 u_i^2/h_i$  (ако су стубови крути) и  $0.6 u_i^2/h_i$  (ако су греде круте). На тај начин се дошло до израза

$$\lambda = \frac{0.5m}{c} \frac{I}{(u_i/h_i)_{max}} \quad (2.39)$$

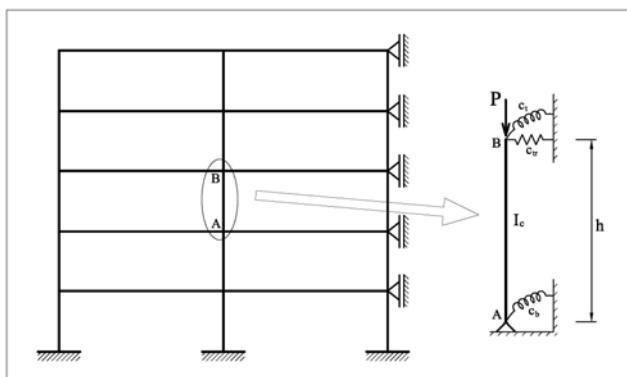
где је  $c = 0.556$ , а  $m = 1/100$ .



## 2.5 ЈЕДАН ПОСТУПАК ЗА ПОВЕЋАЊЕ ТАЧНОСТИ ПРИБЛИЖНИХ РЕШЕЊА

Као што је већ речено, теоријске основе прорачуна штапа приказане у делу 2.1 биле су база за доношење националних и европских прописа о стабилности оквирних носача. Међутим, примена ових прописа указала је да такав прорачун у појединим случајевима доводи до грешака зато што је у питању приближан прорачун. Услед тога, последњих година чине се покушаји на побољшању ових приближних метода прорачуна. Овде ће бити приказани резултати једне од таквих анализа [9], [10] које имају за циљ да се побољшају улазни параметри који дефинишу крутост оквирног носача, а која се користи као гранични услов при анализи извијања стубова.

Посматра се стуб АВ који је издвојен из оквира на слици 2.20.



слика 2.20 Челични оквир и модел стуба који се анализира

Ротациона крутост оквирне конструкције у тачкама А и В замени се опругама чије су константе  $c_b$  и  $c_t$ . Крутост оквира на хоризонтално померање се уводи преко хоризонталне опруге чија је константа  $c_{br}$ .

Укупна ротациона крутост система на почетку и крају стуба једнака је збиру крутости свих штапова који се сустичу у тим чворовима:









$$c_b = \sum_i c_{b,i} , \quad c_t = \sum_j c_{t,j} \quad (2.40)$$

У случају система са непомерљивим чворовима, крутост  $c_{br}$  на хоризонтална померања је веома велика, а кад су у питању системи са померљивим чворовима усваја се да је ова крутост практично занемарљива.

Јасно је да тачност одређивања критичне силе, односно дужине извијања посматраног стуба директно зависи од тачности наведених крутости. Може се констатовати да досадашњи прописи које користе инжењери доводе до грешака у прорачуну, посебно када су у питању системи са померљивим чворовима. Разлог лежи у чињеници што прописи не дају решења за све случајеве који могу да се јаве у пракси.

Зато се аутори у свом раду [10] баве одређивањем крутости за најразличитије граничне услове, који нису обухваћени прописима, а могу се јавити у пракси. Ови резултати су приказани у табели 2.1.

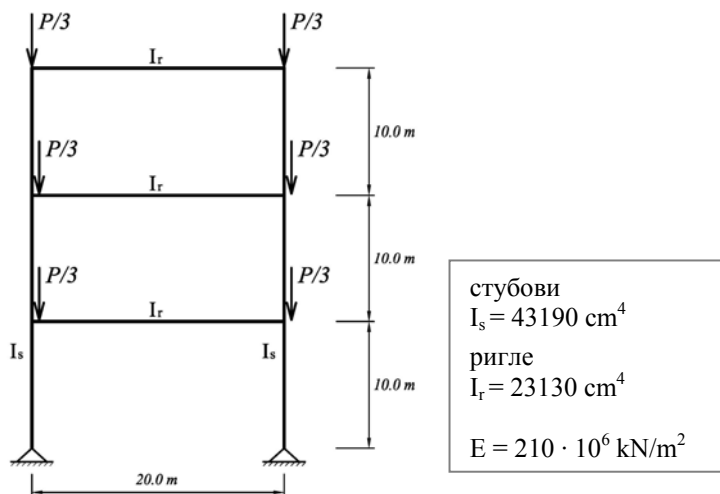
табела 2.1 Вредности ротационе крутости за различите граничне услове у случају штапа са и без аксијалне силе (табела преузета из [10])

Rotational boundary conditions of far end	Without axial force	With axial force	
		Exact	Approximate
Fixed support 	$c_i = 4\bar{c}_i$	$c_i = \bar{c}_i \pi \sqrt{n_I} \left( \frac{\pi \sqrt{n_I} \cot(\pi \sqrt{n_I}) - 1}{\pi \sqrt{n_I} - 2 \tan\left(\frac{1}{2}\pi \sqrt{n_I}\right)} \right)$	$c_i = 4\bar{c}_i(1 - 0.33n_I)$
Roller fixed support 	$c_i = \bar{c}_i$	$c_i = \bar{c}_i \frac{1}{2} \pi \sqrt{n_I} \cot\left(\frac{1}{2}\pi \sqrt{n_I}\right)$	$c_i = \bar{c}_i(1 - 0.82n_I)$
Pinned support 	$c_i = 3\bar{c}_i$	$c_i = \bar{c}_i n_I \left( \frac{\pi^2}{1 - \pi \sqrt{n_I} \cot(\pi \sqrt{n_I})} \right)$	$c_i = 3\bar{c}_i(1 - 0.66n_I)$
Simple curvature 	$c_i = 2\bar{c}_i$	$c_i = \bar{c}_i \pi \sqrt{n_I} \cot\left(\frac{1}{2}\pi \sqrt{n_I}\right)$	$c_i = 2\bar{c}_i(1 - 0.82n_I)$
Double curvature 	$c_i = 6\bar{c}_i$	$c_i = \bar{c}_i n_I \left( \frac{\pi^2}{2 - \pi \sqrt{n_I} \cot\left(\frac{1}{2}\pi \sqrt{n_I}\right)} \right)$	$c_i = 6\bar{c}_i(1 - 0.16n_I)$
Roller support 	$c_i = 0\bar{c}_i$	$c_i = -\bar{c}_i n_I \left( \frac{\pi \tan(\pi \sqrt{n_I})}{\sqrt{n_I}} \right)$	$c_i = \bar{c}_i(0 - 9.87n_I)$
Rotational spring support 	$c_i = \frac{\bar{c}_i c^\#}{1 + c^\#}$	$c_i = \bar{c}_i \frac{(c^\# - \pi \sqrt{n_I} \tan(\pi \sqrt{n_I}))}{(1 + c^\# \frac{\tan(\pi \sqrt{n_I})}{\pi \sqrt{n_I}})}$	$c_i = \bar{c}_i \frac{(c^\# - \pi^2 n_I (1 + \pi^2 n_I / 3))}{(1 + c^\# (1 + \pi^2 n_I / 3))}$
Pinned and rotational spring support 	$c_i = 4\bar{c}_i \frac{3 + c^\#}{4 + c^\#}$	$c_i = \bar{c}_i \frac{(c^\# + \pi^2 n_I) \sqrt{n_I} \sin(\pi \sqrt{n_I}) - c^\# \pi \cos(\pi \sqrt{n_I})}{(1 - c^\#) \sqrt{n_I} \sin(\pi \sqrt{n_I}) - (2c^\# \pi^{-1} + \pi n_I) \sqrt{n_I} \cos(\pi \sqrt{n_I}) + 2c^\# \pi^{-1}}$	$c_i = 2\bar{c}_i \frac{303 + c^\#(4 + c^\#) - (24 + c^\#(9 + c^\#))\pi n_I}{15(4 + c^\#)^2}$

$\bar{c}_i$ : bottom or top nodes of the column under consideration

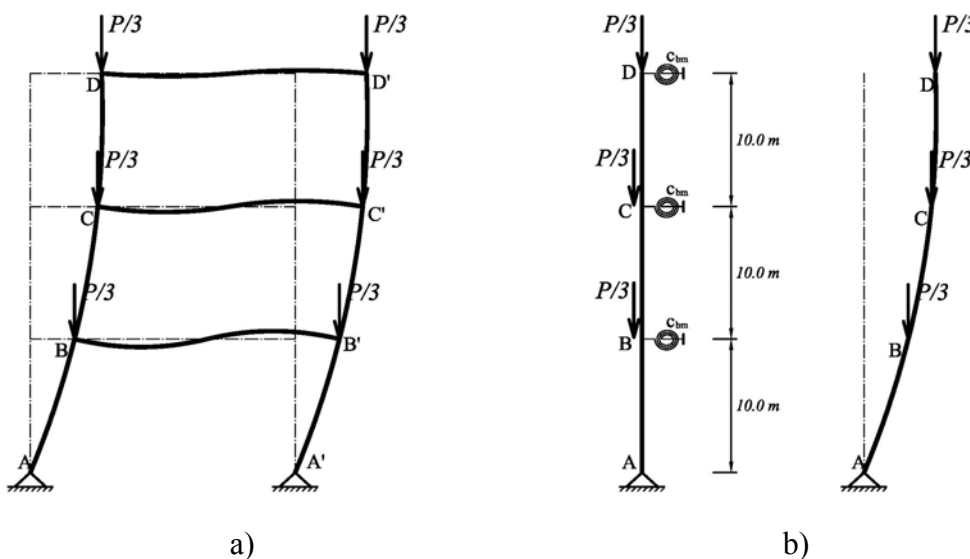
» Нумерички пример

Примена овде описаног поступка прорачуна илустроваће се на примеру троспратног оквирног носача који је приказан на слици 2.21.



слика 2.21 Карактеристике анализаног троспратног оквира

Како је у питању симетричан носач који је симетрично оптерећен, облик извијања имаће антисиметричну форму која је приказана на слици 2.22 а).



слика 2.22 а) Облик извијања анализаног оквира,  
 б) Еквивалентан модел оквира и његов облик извијања

Предложени поступак прорачуна подразумева да се из посматраног оквира издвоји један део конструкције и да се он анализира узимајући при томе и утицај осталог дела конструкције на “издвојени део”. У овом случају може се, нпр. издвојити низ стубова А-В-С-Д, а утицај осталог дела конструкције заменити одговарајућим опругама које имају ротациону крутост која је срачуната и приказана у табели 2.1 (слика 2.22 б).

За овај случај може се показати да (коришћењем табеле 2.1) ротациона крутост усвојених опруга има вредност:

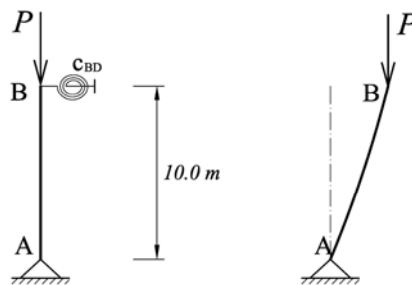
$$c_{bm} = \frac{6EI_{bm}}{L} = 14571.9 \text{ kNm},$$

а критична сила за стуб АВ износи 1012.69 kN.

Уколико се спроведе тачнији начин прорачуна применом матричне анализе конструкција, а што ће бити приказано у наредном делу овог поглавља, критична сила за стуб АВ износи 1009.36 kN.

Ако се прорачун спроведе према Европским прописима (ЕС3), који су дати у Анексу овог рада, критична сила за овај стуб се добија 560.03 kN. Очигледно је да у овом случају прорачун према прописима значајно подцењује носивост овог штапа, односно даје значајно већу вредност дужине извијања.

До критичне силе за штап АВ може се доћи и ако се само он издвоји из конструкције, а остали део носача замени еластичним опругама, како је приказано на слици 2.23.



слика 2.23 Еквивалентан модел и његов облик извијања

У овом случају крутост опруге износи  $c_{BD} = c'_{BC} + c_{bm} = 17042.1 \text{ kNm}$ , док се за критичну силу добија 1012.13 kN.

## 2.6 ПРИМЕНА МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА КОРИШЋЕЊЕМ ГЕОМЕТРИЈСКЕ МАТРИЦЕ КРУТОСТИ

Применом методе коначних елемената у анализи стабилности линијских носача бавио се велики број истраживача, као нпр. [11], [12]. Као резултат тих истраживања, формиран је стандардни матрични поступак за нумерички прорачун стабилности оквирних носача, који ће овде укратко бити приказан.

Као што је познато, у линеарној теорији првог реда матрица крутости коначног елемента зависи од геометрије елемента и од механичких карактеристика материјала. Кад је у питању проблем стабилности, он не може да се реши према теорији првог реда и потребно је спровести прорачун према теорији другог реда. То има за последицу да је неопходно у прорачун увести матрицу крутости која зависи и од аксијалних сила.

Уобичајено упрошћење у овом прорачуну према теорији другог реда је да се проблем аксијалног напрезања и проблем савијања штапа дефинишу независно један од другог. То омогућује да се и одређивање матрице аксијалне и трансверзалне крутости штапа може разматрати раздвојено, као два међусобно независна проблема.

Показало се да се до погодног израза за наведене матрице може доћи ако се функције промене померања  $u(x)$  и  $v(x)$  дуж штапа претпоставе у облику полинома. При томе се померање  $u(x)$  у правцу осе штапа описује полиномом првог степена, а померање нормално на правац штапа  $v(x)$  полиномом трећег степена.

$$u(x) = b_1 + b_2x, \quad (2.41 \text{ a})$$

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (2.41 \text{ b})$$

Горњи изрази представљају решење диференцијалних једначина за аксијално напрезање и савијање штапа према теорији првог реда.

Сада је могуће, уобичајеним поступком који се користи у методи коначних елемената, извести везу између матрице крутости штапа и одговарајућих генералисаних померања  $q$  у случају аксијално притиснутог штапа:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_G) \cdot q = 0 \quad (2.42)$$

Матрична једначина (2.42) формално је иста као и у теорији првог реда с том разликом што се овде матрица крутости јавља у виду збира две матрице: конвенционалне матрице крутости  $\mathbf{K}$  и геометријске матрице крутости  $\mathbf{K}_G$ . Изрази за обе матрице дати су једначинама (2.43) и (2.44). Важно је нагласити да прорачун критичног оптерећења према овде приказаном поступку даје само приближна (апроксимативна) решења, јер су при извођењу матричне једначине коришћене функције померања према теорији првог реда (2.41).

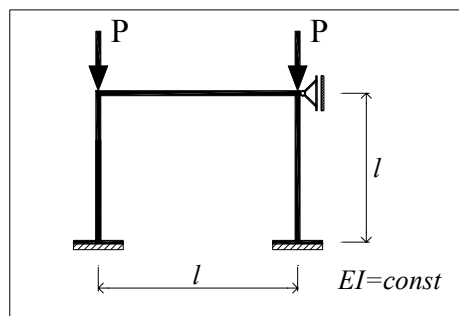
$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{simetr.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{P}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ & & 36 & -3l \\ \text{simetr.} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

### » Нумерички примери

У овом делу приказана су два примера који илуструју примену овако дефинисане методе коначних елемената при прорачуну стабилности оквирних носача.

У првом примеру је задат најједноставнији једноспратни оквир, слика 2.24.



слика 2.24 Анализирани пример једноспратног оквира

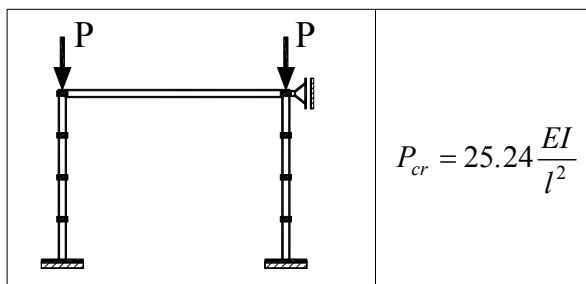
При решавању овог задатка усваја се да је сваки штап један коначни елемент. Собзиром да је задати носач са непомерљивим чворовима, једине две непознате различите од нуле су обртања у „горњим“ крутим угловима. Применом матричне

једначине (2.42), где су матрица крутости по теорији првог реда, као и геометријска матрица крутости дате једначинама (2.43) и (2.44), лако се долази до једначине стабилности:

$$\begin{bmatrix} \frac{8EI}{l} - P\frac{4l}{30} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{8EI}{l} - P\frac{4l}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad P^2 \cdot \left(\frac{4l}{30}\right)^2 - P \cdot \frac{32EI}{15} + 60 \cdot \left(\frac{EI}{l}\right)^2 = 0.$$

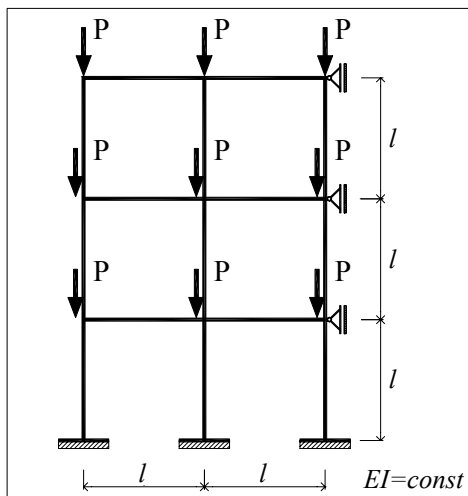
Решавањем ове једначине добија се вредност критичне силе:  $P_{cr} = 45.0 \frac{EI}{l^2}$ .

Међутим, уколико се усвоји већи број коначних елемената на штапу, резултат ће се значајно мењати. Тако, тек када се аксијално притиснути штапови поделе на по четири коначна елемента резултат се „устаљује“ и добија се вредност приказана на слици 2.25.



слика 2.25 Подела штапова на коначне елементе

У следећем примеру је разматран сложенији троспратни оквир на два поља код кога оптерећење делује у стубовима на свим етажама, слика 2.26.



слика 2.26 Анализирани случај троспратног оквира

Применом наведене матричне анализе, у случају када се узима да је сваки штап један коначни елемент, на исти начин као и у претходном примеру израчунава се критична сила:  $P_{cr} = 12.86 \frac{EI}{l^2}$ . Међутим, и у овом случају када се сваки аксијално притиснути штап подели на по четири коначна елемента добија се тачнија вредност, тј.  $P_{cr} = 8.30 \frac{EI}{l^2}$ .

Одавде се лако може уочити да се код оваквог концепта одређивања критичне силе добијају велике разлике у решењу у зависности од тога колики је број елемената усвојен на сваком штапу. Те грешке премашују чак и 50%. Јасно је да се са већим бројем коначних елемената резултати уједначавају, али се увек поставља питање колики је број елемената по штапу неопходан да би се добило прохватљиво тачно решење.



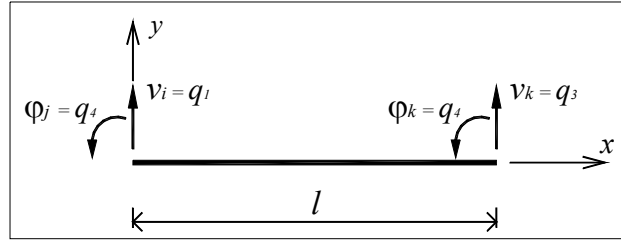
### **3. СТАБИЛНОСТ ЛИНИЈСКИХ НОСАЧА У ЕЛАСТО- ПЛАСТИЧНОЈ ОБЛАСТИ**

Као што је већ раније истакнуто, метода коначних елемената је најефикаснија савремена нумеричка метода за прорачун стабилности оквирних носача, па ће се користити и у овој докторској дисертацији

У делу 2.6 приказана је примена методе коначних елемената, и то на начин како се она користи у стандардним комерцијалним програмима за прорачун инжењерских конструкција. Истакнуто је да је главна мана овог поступка то што даје приближна решења уколико се дуж сваког штапа усвоји само по један коначни елемент. Да би се то избегло, при формирању мреже коначних елемената потребно је усвојити већи број елемената што донекле компликује прорачун. Зато ће се у окиру овог рада приказати нумерички поступак који даје тачна решења проблема стабилности и у случају да се дуж штапа усвоји само по један коначни елемент. Овај поступак имплементираће се даље у програму ALIN, који је приказан у поглављу 4. У наставку овог поглавља посматраће се посебно случај када је у питању извијање носача у еластичној области, као и општи случај када се услед оптерећења материјал понаша нелинеарно па се извијање дешава у нееластичној области.

#### **3.1. АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ У ЕЛАСТИЧНОЈ ОБЛАСТИ**

Као што је познато, при извијању штапа долази до његовог савијања услед аксијалне силе. Зато се за усвојени модел правог штапа коначне дужине  $l$  бирају генерализана померања  $v$  на крајевима штапа нормална на првобитну (недеформисану) осу штапа, као и обртања  $\varphi$  крајева штапа (слика 3.1).



слика 3.1 Генералисана померања на крајевима штапа у равни  $xy$

Вектор генералисаних померања у овом случају гласи:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_j \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ v(l) \\ \varphi(l) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

У случају решавања проблем стабилности, користи се диференцијална једначина равнотеже штапа у облику:

$$v^{iv} + k^2 v'' = 0, \quad (3.2)$$

где је :  $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ ,

$P$  – аксијална сила,

$EI$  – крутост штапа на савијање.

Када се извијање дешава у еластичној области, модул еластичности  $E$  има константну вредност.

Једначином (3.2) дефинисан је према теорији другог реда проблем извијања правога штапа константног попречног пресека, који је притиснут аксијалним силама  $P$  на крајевима, где се знак плус односи на аксијалну силу притиска. У случају када делује аксијална сила затезања у једначини (3.2) је знак минус.

Као што је већ истакнуто, у методи коначних елемената уобичајено је да се ова диференцијална једначина решава користећи приближно решење у облику полинома, израз (2.41 b). Међутим, циљ овог докторског рада је да се дође до тачних решења проблема стабилности оквирних носача, тако се овде користи тачно решење диференцијалне једначине (3.2), приказано нпр. у [13], које је дато преко тригонометријских функција:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 kx + \alpha_3 \sin(kx) + \alpha_4 \cos(kx) \quad (3.3)$$

Применом матричног начина обележавања, једначина (3.3) гласи:

$$v(x) = A \alpha, \quad (3.4)$$

$$\text{где су: } A = [1 \quad kx \quad \sin kx \quad \cos kx], \quad \alpha^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4] \quad (3.5)$$

Увођењем обележавања:

$$\omega = k l \quad (3.6)$$

и коришћењем граничних услова, добија се:

$$\begin{aligned} \text{Чвор "i", } x=0, \Rightarrow \quad v(0) = q_1 &= \alpha_1 + 0 + 0 + \alpha_4 \\ \varphi(0) = q_2 &= 0 + \alpha_2 \cdot k + \alpha_3 \cdot k + 0 \\ \text{Чвор "k", } x=l, \Rightarrow \quad v(l) = q_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \omega + \alpha_3 \cdot \sin \omega + \alpha_4 \cdot \cos \omega \\ \varphi(l) = q_4 &= 0 + \alpha_2 \cdot k + \alpha_3 \cdot k \cdot \cos \omega - \alpha_4 \cdot k \cdot \sin \omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

Систем од четири једначине (3.7), може да се прикаже и у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & k & 0 \\ 1 & \omega & \sin \omega & \cos \omega \\ 0 & k & k \cos \omega & -k \sin \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

односно:

$$q = C \alpha \quad (3.9)$$

Решавањем израза (3.9) по интеграционим константама следи

$$\alpha = C^{-1} q \quad (3.10)$$

где је  $C^{-1}$  инверзна матрица матрице  $C$ , и има облик:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

чији елементи имају вредности:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (1 - \cos \omega - \omega \cdot \sin \omega) / \Delta & C_{12} &= (\omega \cdot \cos \omega - \sin \omega) / (k \cdot \Delta) \\ C_{41} = C_{13} = -C_{43} &= (1 - \cos \omega) / \Delta & C_{21} = -C_{31} = -C_{23} = C_{33} &= \sin \omega / \Delta \\ C_{32} &= (1 - \cos \omega - \omega \cdot \sin \omega) / (k \cdot \Delta) & C_{42} &= (\sin \omega - \omega \cdot \cos \omega) / (k \cdot \Delta) \\ C_{22} = C_{24} = -C_{34} &= (1 - \cos \omega) / (k \cdot \Delta) & C_{14} = -C_{44} &= (\sin \omega - \omega) / (k \cdot \Delta) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\text{где је: } \Delta = 2 ( 1 - \cos \omega ) - \omega \cdot \sin \omega \quad (3.13)$$

Сада, коначно, померања  $v(x)$  унутар коначног елемента могу да се прикажу у функцији генералисаних померања на крајевима штапа:

$$v(x) = A C^{-1} q \quad (3.14)$$

односно у облику:

$$v(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

или:

$$v(x) = N q = \sum_{i=1}^4 N_i(x) q_i \quad (3.16)$$

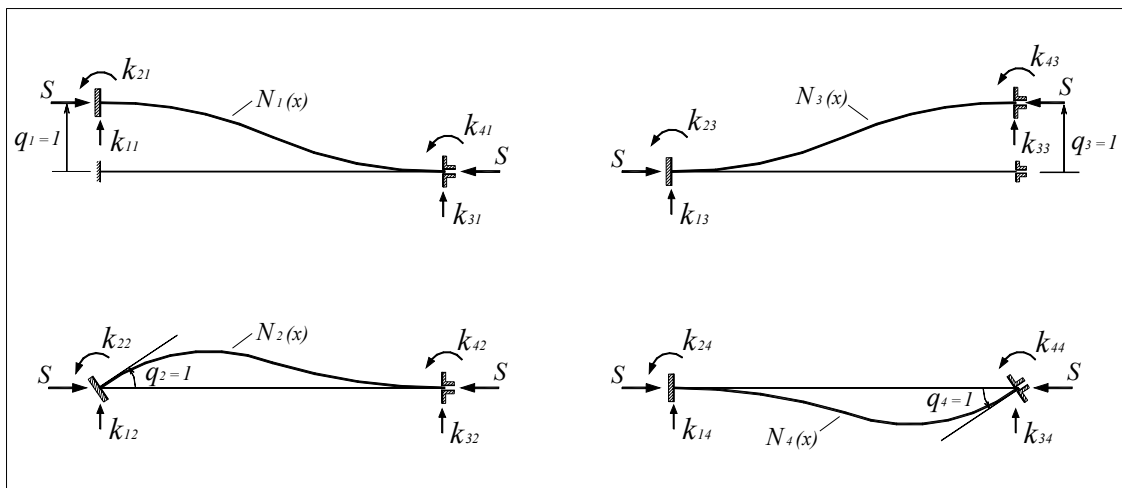
Матрица  $N$  се назива матрица интерполационих функција или матрица облика. Елементи ове матрице добијају се матричним множењем из једначине (3.14):

$$\begin{aligned} N_1(x) &= [1 - \cos \omega - \omega \cdot \sin \omega + (\omega \cdot \sin \omega) \cdot x/l - \sin \omega \cdot \sin kx + (1 - \cos \omega) \cdot \cos kx] / [\Delta] \\ N_2(x) &= [\omega \cdot \cos \omega - \sin \omega + kx \cdot (1 - \cos \omega) + (1 - \cos \omega - \omega \cdot \sin \omega) \cdot \sin kx + \\ &\quad + (\sin \omega - \omega \cdot \cos \omega) \cdot \cos kx] / [\Delta \cdot k] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$N_3(x) = [1 - \cos \omega - (\omega \cdot \sin \omega) \cdot x/l + \sin \omega \cdot \sin kx - (1 - \cos \omega) \cdot \cos kx] / [\Delta]$$

$$N_4(x) = [\sin \omega - \omega + \omega \cdot (1 - \cos \omega) \cdot x/l - (1 - \cos \omega) \cdot \sin kx + (\omega - \sin \omega) \cdot \cos kx] / [\Delta \cdot k]$$

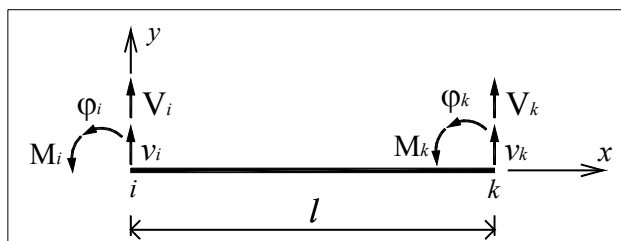
Аналогно као и у теорији првог реда, интерполационе функције  $N_i(x)$  и у теорији другог реда представљају еластичну линију обострано укљештеног штапа, оптерећеног аксијалном силом притиска на крајевима, услед јединичног генералисаног померања  $q_i$ , при чему су сва остала генералисана померања једнака нули (слика 3.2).



слика 3.2 Интерполационе функције  $N_i(x)$  за штап типа “k”

### » Матрица крутости штапа типа “k”

Прво ће се приказати одређивање матрице крутости штапа који је круто везан на своја оба краја, који се означава као штап типа “k”. На слици 3.3 приказане су осим усвојених генералисаних померања и одговарајуће генералисане силе, и то: трансверзалне силе  $V_i, V_k$  и моменти савијања  $M_i, M_k$  на крајевима штапа.



слика 3.3 Генералисане силе на крајевима штапа у равни  $xy$

Као што је познато, матрица крутости  $\mathbf{K}$  успоставља везу између вектора генералисаних сила  $\mathbf{R}$  и вектора генералисаних померања  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (3.18)$$

где је:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_k \\ M_k \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ sim. & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Елементи матрице крутости  $\mathbf{K}$  биће одређени директним поступком. Тако на пример, ако се претпостави да су све компоненте вектора  $\mathbf{q}$  једнаке нули осим компоненте  $q_l$  која је једнака јединици ( $q_l=1$ ), следи:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ sim. & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Значи, елементи прве колоне матрице крутости једнаки су генералисаним силама које настају услед генералисаног померања  $q_l=1$ , при чему су сва остала генералисана померања једнака нули. На сличан начин могу да се одреде и елементи осталих колона матрице крутости, како је то приказано на слици 3.2.

Тако се, користећи једначину (3.16), одређују изрази за елементе прве колоне матрице крутости:

$$v(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = N_1(x) \quad (3.22)$$

$$tj. \quad v(x) = [1 - \cos \omega - \omega \cdot \sin \omega + (\omega \cdot \sin \omega) \cdot x/l - \sin \omega \cdot \sin kx + (1 - \cos \omega) \cdot \cos kx]/[\Delta]$$

Диференцирањем се налази:

$$\begin{aligned} v' &= [(\omega \cdot \sin \omega)/l - k \cdot \sin \omega \cdot \cos kx - k \cdot (1 - \cos \omega) \cdot \sin kx]/[\Delta] \\ v'' &= [k^2 \cdot \sin \omega \cdot \sin kx - k^2 \cdot (1 - \cos \omega) \cdot \cos kx]/[\Delta] \\ v''' &= [k^3 \cdot \sin \omega \cdot \cos kx + k^3 \cdot (1 - \cos \omega) \cdot \sin kx]/[\Delta]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Како је:

$$M(x) = -EI v''(x) \quad (3.24)$$

добија се:

$$M(o) = \frac{EI}{l^3 \Delta} [\omega^2 l (1 - \cos \omega)], \quad M(l) = \frac{EI}{l^3 \Delta} [\omega^2 l (\cos \omega - 1)]. \quad (3.25)$$

Реакције на крајевима су:

$$V(x) = -EI v''' - S v' \quad (3.26)$$

$$V(o) = \frac{EI}{l^3 \Delta} [-\omega^3 \cdot \sin \omega] \quad V(l) = \frac{EI}{l^3 \Delta} [-\omega^3 \cdot \sin \omega].$$

Пошто се конвенција за позитивне генералисане силе у матричној анализи разликује од усвојене конвенције при извођењу основних диференцијалних једначина у теорији другог реда, потребно је променити знак у изразима за  $V(o)$  и  $M(l)$ .

Сличним поступком могу се одредити остале три колоне. Тако се добија МАТРИЦА КРУТОСТИ по теорији другог реда штапа типа “к”, који је оптерећен аксијалном силом притиска, у облику:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3 \Delta} \begin{bmatrix} \omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) & -\omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ & \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & \omega l^2 (\omega - \sin \omega) \\ & & \omega^3 \sin \omega & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ & \text{simetr.} & & \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

где је:  $\Delta = 2 (1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega$ .

Иако до губитка стабилности долази услед сила притиска, могуће је да у оквиру носача који се извија, постоје штапови који су затегнути, тако да је потребно одредити матрицу крутости и за тај случај.

Матрица крутости затегнутог штапа у теорији другог реда може да се одреди из диференцијалне једначине затегнутог штапа:

$$v^{iv} - k^2 v'' = 0, \quad (3.28)$$

користећи тачно решење ове једначине и примењујући поступак прорачуна као за притиснут штап.

Не упуштајући се детаљније у ово извођење, може се констатовати да, ако се у изразу за матрицу крутости притиснутог штапа (3.27)  $\omega$  замени са  $i\omega$  и искористе везе:  $ch(\omega) = \cos(i\omega)$ ,  $sh\omega = -i \sin(i\omega)$

добија се МАТРИЦА КРУТОСТИ затегнутог штапа типа “k” према теорији другог реда, у облику:

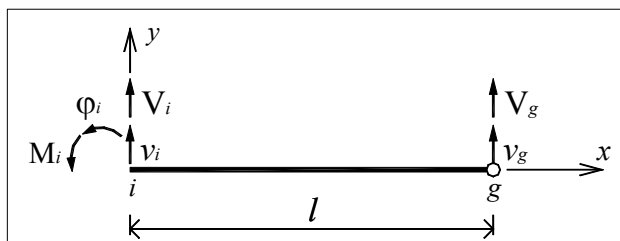
$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3 \Delta} \begin{bmatrix} \omega^3 sh\omega & \omega^2 l(ch\omega - 1) & -\omega^3 sh\omega & \omega^2 l(ch\omega - 1) \\ \omega l^2(-sh\omega + \omega ch\omega) & -\omega^2 l(ch\omega - 1) & \omega^3 sh\omega & -\omega^2 l(ch\omega - 1) \\ \text{simetr.} & & & \\ & & \omega l^2(-sh\omega + \omega ch\omega) & \omega^2 l(ch\omega - 1) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

где је:  $\Delta = 2(1 - ch\omega) + \omega \cdot sh\omega$ .

У случају да нема аксијалне силе у штапу, користи се добро познат израз (2.43) за МАТРИЦУ КРУТОСТИ штапа типа “k” према теорији првог реда

### » Матрица крутости штапа типа “g”

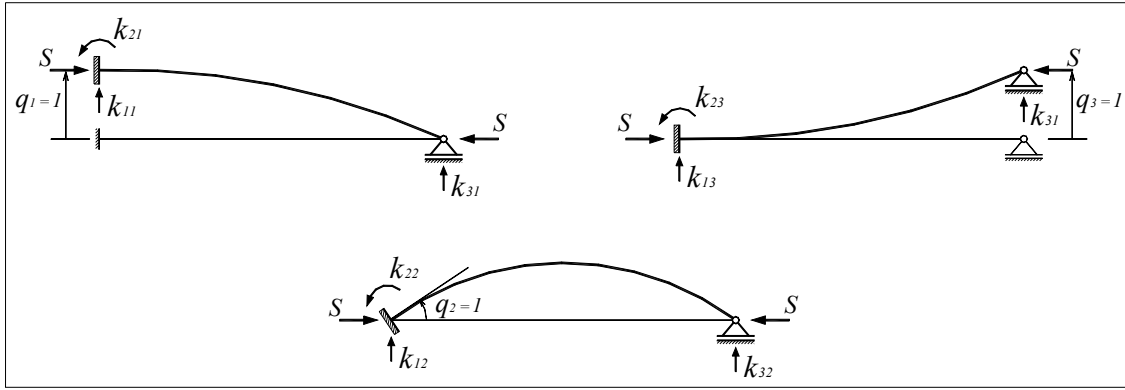
Матрица крутости штапа који је зглобно везан на једном крају (штап типа “g”) може да се изведе на исти начин као и за штап типа “k”, водећи рачуна да је у чвору g зглобна веза, па је моменат ту једнак нули. Усвојена генералисана померања и одговарајуће генералисане силе за штап типа “g” приказани су на слици 3.4.



слика 3.4 Генералисана померања и силе за штап типа “g”

И у овом случају, применом директног поступка, може да се покаже да елементи матрице крутости имају статичко значење, како је то приказано на слици 3.5.




 слика 3.5 Интерполационе функције  $N_i(x)$  за штап типа “g”

Уместо применом директног поступка, до израза за матрицу крутости штапа типа “g” може се доћи и краћим поступком. Наиме, једначина (3.18) у развијеном облику гласи:

$$\begin{bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_g \\ M_g \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3 \Delta} \begin{bmatrix} \omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) & -\omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ \omega^2 l (1 - \cos \omega) & \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & \omega l^2 (\omega - \sin \omega) \\ -\omega^3 \sin \omega & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & \omega^3 \sin \omega & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ \omega^2 l (1 - \cos \omega) & \omega l^2 (\omega - \sin \omega) & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_g \\ \varphi_g \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Ако се у последњој једначини (3.30) уведе гранични услов да је  $M_g = 0$ , тада се решавањем једначине по  $\varphi_g$  налази:

$$\varphi_g = \frac{1}{l(\sin \omega - \omega \cos \omega)} \left[ -\omega \cdot (1 - \cos \omega) \cdot v_i - l \cdot (\omega - \sin \omega) \cdot \varphi_i + \omega \cdot (1 - \cos \omega) \cdot v_g \right] \quad (3.31)$$

Заменом (3.31) у прве три једначине (3.30) добија се:

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{EI}{l^3 (\sin \omega - \omega \cos \omega)} \left[ (\omega^3 \cos \omega) \cdot v_i - (\omega^2 l \sin \omega) \cdot \varphi_i - (\omega^3 \cos \omega) \cdot v_g \right] \\ M_i &= \frac{EI}{l^3 (\sin \omega - \omega \cos \omega)} \left[ (\omega^2 l \sin \omega) \cdot v_i - (\omega^2 l^2 \sin \omega) \cdot \varphi_i - (\omega^2 l \sin \omega) \cdot v_g \right] \\ V_g &= \frac{EI}{l^3 (\sin \omega - \omega \cos \omega)} \left[ (-\omega^3 \cos \omega) \cdot v_i - (\omega^2 l \sin \omega) \cdot \varphi_i - (\omega^3 \cos \omega) \cdot v_g \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Три једначине (3.32) могу да се прикажу у матричном облику:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_g \mathbf{q} \quad (3.33)$$

где су:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_g \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_g \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Како матрица крутости  $\mathbf{K}_g$  успоставља везу између вектора генералисаних сила  $\mathbf{R}$  и вектора генералисаних померања  $\mathbf{q}$ , она представља МАТРИЦУ КРУТОСТИ по теорији другог реда штапа типа “g”, који је оптерећен аксијалном силом притиска:

$$\mathbf{K}_g = \frac{EI}{l^3 (\sin \omega - \omega \cos \omega)} \begin{bmatrix} \omega^3 \cos \omega & \omega^2 l \sin \omega & -\omega^3 \cos \omega \\ & \omega^2 l^2 \sin \omega & -\omega^2 l \sin \omega \\ \text{simetr.} & & \omega^3 \cos \omega \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Истим поступком, како је то наведено код штапа типа “k”, може да се изведе и МАТРИЦА КРУТОСТИ затегнутог штапа типа “g” према теорији другог реда:

$$\mathbf{K}_g = \frac{EI}{l^3 (sh \omega - \omega ch \omega)} \begin{bmatrix} -\omega^3 ch \omega & -\omega^2 l sh \omega & \omega^3 ch \omega \\ & -\omega^2 l^2 sh \omega & \omega^2 l sh \omega \\ \text{simetr.} & & -\omega^3 ch \omega \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

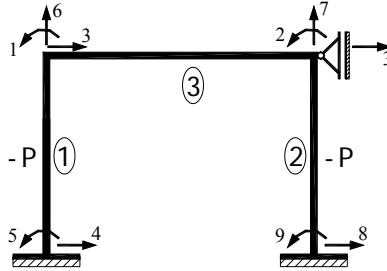
Уколико у штапу нема нормалне силе, користи се добро познат израз за МАТРИЦУ КРУТОСТИ штапа типа “g” према теорији првог реда:

$$\mathbf{K}_g = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & 3l & -3 \\ & 3l^2 & -3l \\ \text{sim} & & 3 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

### » Нумерички пример

Овде ће бити дат прорачун најједноставнијег оквирног носача применом приказане методе. Ради поређења са методом коначних елемената где се користи геометријска матрица крутости која је приказана у делу 2.6, прво је анализиран једноспратни оквир оптерећен једнаким аксијалним силама у оба стуба, слика 2.24. С обзиром да се користе тачна решења диференцијалне једначине аксијално оптерећеног штапа по теорији другог реда, сваки штап се посматра као један

коначан елемент. Тако су на слици 3.6 приказане усвојене непознате на крајевима елемената.



слика 3.6 Померања и обртања на крајевима елемената приказаног оквира

Матрице крутости за ова три елемента гласе (на основу израза (3.27) и (2.43)):

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EI}{l^3 \Delta} \begin{bmatrix} \omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) & -\omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & \omega^3 \sin \omega & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ \text{simetr.} & & \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) & \omega^2 l (1 - \cos \omega) \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{EI}{l^3 \Delta} \begin{bmatrix} \omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) & -\omega^3 \sin \omega & \omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) & \omega^3 \sin \omega & -\omega^2 l (1 - \cos \omega) \\ \text{simetr.} & & \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) & \omega^2 l (1 - \cos \omega) \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_3 = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{simetr.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{matrix}$$

У овом примеру једино су непознате 1 и 2, тј. обртања  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , различите од нуле, тако да матрица читавог система  $\mathbf{K}$  има облик:

$$\mathbf{K} = EI \begin{bmatrix} \frac{1}{l^3 \Delta} \cdot \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) + \frac{1}{L^3} \cdot 4L^2 & \frac{1}{L^3} \cdot 2L^2 \\ \frac{1}{L^3} \cdot 2L^2 & \frac{1}{l^3 \Delta} \cdot \omega l^2 (\sin \omega - \omega \cos \omega) + \frac{1}{L^3} \cdot 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\text{где је: } \Delta = 2 \cdot (1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot l$$

Познато је да је проблем стабилности посматраног оквирног носача дефинисан матричном једначином  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Користећи познат услов из теорије бифуркационе стабилности израчунава се критична сила:

$$\det\|\mathbf{K}\| = 0 \Rightarrow P_{cr} = 25.184 \frac{EI}{l^2}.$$

Поређењем овог резултата са оним добијеним у делу 2.6, јасно се види да ова вредност одговара резултату из „класичне“ методе коначних елемената када се усвоје четири или више коначних елемената на сваком штапу.

И у случају троспратног оквирног носача на два поља са слике 2.26 ситуација је иста. Наиме, тачно решење које се добија у овом случају:  $P_{cr} = 8.260 \frac{EI}{l^2}$  одговара вредности која се добија прорачуном у делу 2.6 када се на једном притиснутом штапу усвоје по пет коначних елемената.

Овим елементарним примерима је приказана оправданост коришћења приказане методе у којој се користе тригонометријске функције које представљају тачно решење диференцијалне једначине аксијално оптерећеног штапа по теорији другог реда, па ће она и бити коришћена у програму ALIN, као што ће бити приказано у поглављу 4.

### 3.2. АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ У НЕЕЛАСТИЧНОЈ ОБЛАСТИ

Као што је већ речено, у досадашњем делу ове дисертације анализа проблема стабилности заснивала се на прорачуну према теорији другог реда. То значи да се разматра геометријски нелинеаран проблем зато што су услови равнотеже написани на деформисаној конфигурацији носача, односно узима се у обзир измењена геометрија носача до које се долази услед деформација насталих под задатим оптерећењем.

Када је у питању величина напрезања у појединим штаповима носача, претпостављало се да је у питању проблем еластичне стабилности, односно да све време до достизања критичне силе напони ( $\sigma_{cr}$ ) у свим штаповима не прелазе границу пропорционалности ( $\sigma_p$ ) материјала од кога су направљени.

Прорачун на бази теорије еластичне стабилности широко је примењен у инжењерској пракси, пошто се полази од тога да се грађевинске конструкције углавном понашају еластично када су изложене свакодневним експлоатационим оптерећењима. Зато је разумљиво да овај вид прорачуна представља основу стандарда (прописа) за анализу стабилности оквирних конструкција. Он је дефинисан кроз одређивање тзв. „ефективне дужине“ извијања појединих штапова оквирних носача и детаљно је приказан у Анексу ове дисертације

Прорачун стабилности оквирних носача компликује се уколико пре достизања критичног оптерећења поједини штапови уђу у фазу нелинеарног понашања материјала. То значи да се у њима јављају напони који су већи од границе пропорционалности. Тиме овај прорачун добија још један вид нелинеарности зато што постаје и материјално (физички) нелинеаран проблем.

Као што је познато, полазећи од Euler-ове критичне силе, критични напон у штапу може се представити у функцији модула еластичности и виткости:

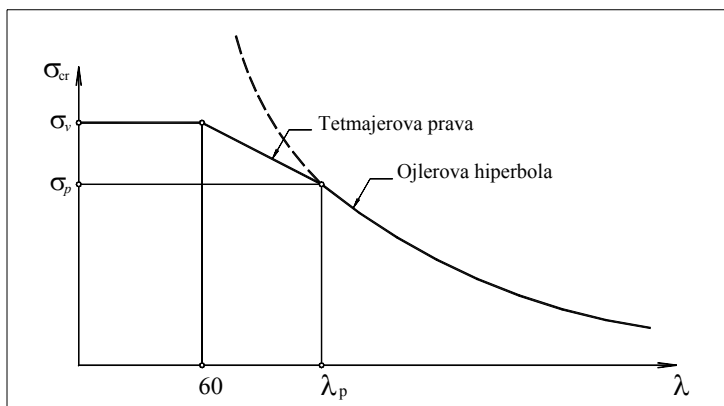
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l_i^2 A} = \pi^2 \frac{E}{\lambda_i^2} \quad (3.38)$$

где су:  $A$  - површина попречног пресека,

$i = \sqrt{I/A}$  - полупречник елипсе инерције,

$\lambda_i$  - виткост штапа.

Једначина ове хиперболе важи све док је критични напон мањи од границе пропорционалности, слика 3.7.



слика 3.7 Графички приказ Ојлерове хиперболе и Тетмајерове праве

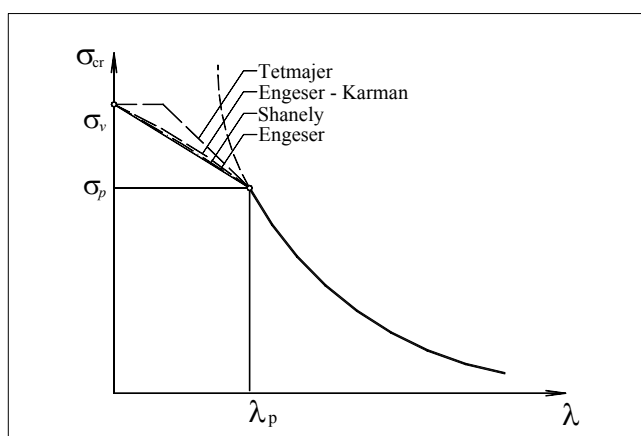
Када је овај напон прекорачен, извијање се дешава у пластичној области. Проучавањем стабилности штапова који се извијају у пластичној области први се бавио Vauschinger који је вршио експериментална истраживања крајем деветнаестог века. На бази ових резултата и сопствених истраживања, Тетмајер је нешто касније први дао израз за везу напона и виткости у пластичној области. Он је предложио линеарну везу у облику:

$$\sigma_{cr} = \sigma_v \quad \text{за } 0 < \lambda < 60$$

$$\sigma_{cr} = C_1 - C_2 \cdot \lambda \quad \text{за } 60 < \lambda < \lambda_p$$

где је  $\lambda_p = \pi \sqrt{E / \sigma_p}$  виткост на граници пропорционалности.

Графички приказ ове везе дат је на слици 3.7.



слика 3.8 Криве извијања у пластичној области

У оквиру даљих истраживања у овој области истиче се и рад Engeser-a [14] који уводи појам тангентног модула еластичности. Касније су се и многи други научници бавили овом проблематиком. Тако су на пример Karman i Shanley извршили модификацију Engeser-ove криве. Неке од најзначајних кривих извијања у пластичној области приказане су на слици 3.8.

И поред бројних истраживања, како експерименталних тако и теоријских, проблем извијања штапова, а посебно оквирних носача у еласто-пластичној области није до сада у потпуности решен. Тек се са развојем компјутерске технике створила могућност за свеобухватно решење овог проблема. Треба напоменути да су се овим проблемом у последње време бавили многи аутори чији су резултати приказани на пример у [15] - [19].

У овој докторској дисертацији је примењена метода коначних елемената као најефикаснија нумеричка методе за решавање стабилности оквирних носача.

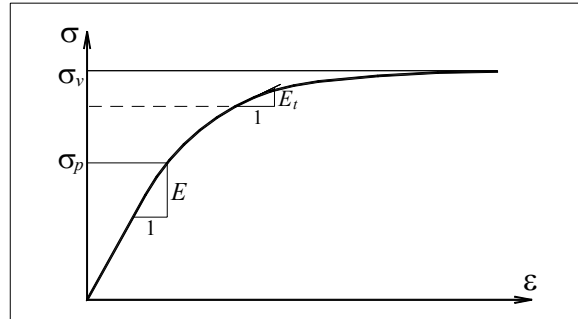
Као што је добро познато, за одређивање критичног оптерећења применом методе коначних елемената користи се матрична једначина у облику:

$$Kq = 0 \quad (3.39)$$

У оквиру теорије еластичне стабилности, матрична једначина (3.39) решава се инкременталним поступком тако што се оптерећење повећава у задатим инкрементима све док се не дође до критичне вредности. При томе, у сваком штапу модул еластичности  $E$  има константну вредност. Међутим, код еласто-пластичне анализе поступак прорачуна је компликованији. Наиме, при сваком инкременту оптерећења, у штаповима где је пређена граница пропорционалности, мора да се промени и крутост штапа, односно користи се нови тангентни модул  $E_t$  за тај штап. То значи и да су матрице крутости које се користе у случају нелинеарног понашања материјала комплексније.

Да би се спровео прорачун стабилности у нееластичној области, потребно је познавати физичко-механичке карактеристике материјала. Као што је познато, када су у питању грађевински материјали (челик, бетон,...), веза између напона и деформације изнад границе пропорционалности постаје нелинеарна. На бази експерименталних истраживања може се доћи до ове зависности, тј. дијаграма који приказују везу између напона и деформација све до нивоа напрезања када

долази до исцрпљења носивости материјала, односно лома носећих елемената конструкције. Типичан дијаграм, када је у питању грађевински челик, приказан је на слици 3.9.



слика 3.9  $\sigma$  -  $\epsilon$  дијаграм материјала

Овај дијаграм представља везу између напона  $\sigma$  и деформације  $\epsilon$  аксијално притиснутог штапа, где је са  $\sigma_p$  обележен напон на граници пропорционалности, а са  $\sigma_v$  напон течења. До границе пропорционалности модул еластичности  $E$  има константну вредност и функција је само врсте материјала. Са даљим растом оптерећења, овај модул постаје и функција нивоа напрезања  $E_t = f(\sigma)$  и назива се тангентни модул [20]. На бази експерименталних истраживања, једна од најчешће коришћених веза између ова два модула, када је у питању грађевински челик, може се усвојити у облику [21] - [23]:

$$E_t = 4E \cdot \left[ \frac{\sigma}{\sigma_v} \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_v} \right) \right] \quad (3.40)$$

Ова зависност биће коришћена у четвртном поглављу при формирању програма ALIN за нелинеарну еласто-пластичну анализа оквирних носача.

Матрице крутости код нелинеарног понашања материјала имају формално исти облик као и при линеарном понашању материјала, али се суштински битно разликују зато што се у свим члановима уместо  $\omega$  јавља  $\omega_t$ , а уместо константног модула еластичности  $E$  јавља се тангентни модул  $E_t$  који зависи од нивоа напрезања у елементу. Тако за случај штапа типа „k“ имамо:



$$\mathbf{K} = \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \begin{bmatrix} \omega_t^3 \sin \omega_t & \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & -\omega_t^3 \sin \omega_t & \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) \\ \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) & -\omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & \omega_t^3 \sin \omega_t & \omega_t l^2 (\omega_t - \sin \omega_t) \\ \text{simetr.} & & -\omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$\text{где је: } E_t = 4E \cdot \left[ \frac{P_{cr,i}}{A \cdot \sigma_v} \cdot \left( 1 - \frac{P_{cr,i}}{A \cdot \sigma_v} \right) \right] \quad (3.42)$$

$$\omega_t = \sqrt{\frac{P_{cr,i}}{E_t \cdot I}} \cdot l = \frac{1}{2} A \sigma_v l \cdot \sqrt{\frac{1}{EI (A \sigma_v - P_{cr,i})}} \quad (3.43)$$

$$\Delta_t = 2 \cdot (1 - \cos \omega_t) - \omega_t \cdot \sin \omega_t \quad (3.44)$$

За штап типа „g“ добија се:

$$\mathbf{K}_g = \frac{E I}{l^3 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t)} \begin{bmatrix} \omega_t^3 \cos \omega_t & \omega_t^2 l \sin \omega_t & -\omega_t^3 \cos \omega_t \\ \omega_t l^2 \sin \omega_t & -\omega_t^2 l \sin \omega_t \\ \text{simetr.} & \omega_t^3 \cos \omega_t \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Када су у питању затегнути штапови, матрице крутости за штапове типа „k“ и „g“ имају облик:

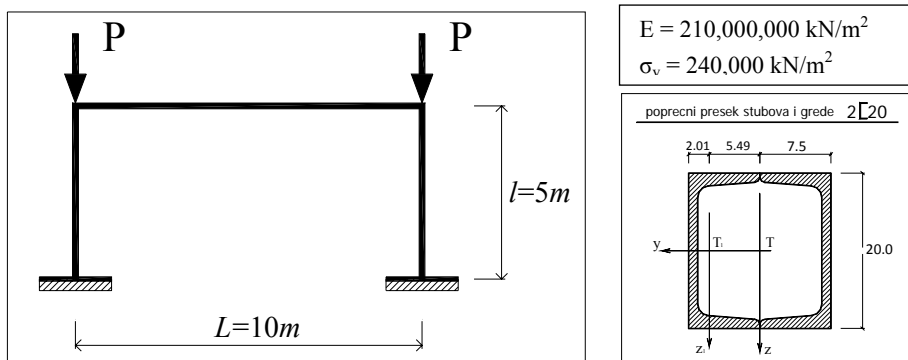
$$\mathbf{K} = \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \begin{bmatrix} \omega_t^3 sh \omega_t & \omega_t^2 l (ch \omega_t - 1) & -\omega_t^3 sh \omega_t & \omega_t^2 l (ch \omega_t - 1) \\ \omega_t l^2 (-sh \omega_t + \omega_t ch \omega_t) & -\omega_t^2 l (ch \omega_t - 1) & \omega_t^3 sh \omega_t & \omega_t l^2 (-\omega_t + sh \omega_t) \\ \text{simetr.} & & -\omega_t^2 l (ch \omega_t - 1) & \omega_t l^2 (-sh \omega_t + \omega_t ch \omega_t) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{K}_g = \frac{EI}{l^3 (sh \omega_t - \omega_t ch \omega_t)} \begin{bmatrix} -\omega_t^3 ch \omega_t & -\omega_t^2 l sh \omega_t & \omega_t^3 ch \omega_t \\ -\omega_t l^2 sh \omega_t & \omega_t^2 l sh \omega_t \\ \text{simetr.} & -\omega_t^3 ch \omega_t \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

У наставку овог дела биће приказано неколико нумеричких примера која илуструју еласто-пластичну анализу оквирних носача.

» Нумерички примери

Прво је приказан поступак прорачуна једносратног челичног оквира са померљивим чворовима, који је дат на слици 3.10. За разлику од претходних примера где је прорачун урађен у еластичној области па је усвојено да је EI константно, у овом случају модул еластичности (односно сада тангентни модул) постаје и функција нивоа напрезања.



слика 3.10 Једносратни челични оквир са померљивим чворовима

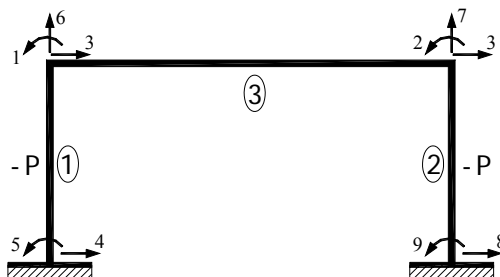
Као што је приказано на слици 3.10 сви елементи су истих карактеристика:

$$A = 2 \cdot 32.2 = 64.4 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 2 \cdot 1910 = 3820.0 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 2 \cdot (148 + 32.2 \cdot 5.49^2) = 2237.02 \text{ cm}^4 = I_{\min}$$

Собзиром да се у овом раду користе тачна решења диференцијалне једначине аксијално оптерећеног штапа по теорији другог реда, сваки штап може да се посматра као један коначан елемент. Тако су на слици 3.11 приказане усвојене непознате на крајевима елемената.



слика 3.11 Померања и обртања на крајевима елемената анализираниг оквира

Матрице крутости за ова три елемента гласе:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ \omega^3 \sin \omega_t & \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & -\omega_t^3 \sin \omega_t & \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) \\ & \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) & -\omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & \omega_t l^2 (\omega_t - \sin \omega_t) \\ & & \omega_t^3 \sin \omega_t & -\omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) \\ & \text{simetr.} & & \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 9 \\ \omega^3 \sin \omega_t & \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & -\omega_t^3 \sin \omega_t & \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) \\ & \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) & -\omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) & \omega_t l^2 (\omega_t - \sin \omega_t) \\ & & \omega_t^3 \sin \omega_t & -\omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) \\ & \text{simetr.} & & \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_3 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 & 2 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{simetr.} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \end{matrix}$$

У овом примеру постоје 3 непознате које су различите од нуле. Осим обртања која су означена са 1 и 2, непозната су и померања са ознаком 3. Тако матрица крутости система има облик:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \cdot \omega l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) + 4 \frac{E_t I}{L} & 2 \frac{E_t I}{L} & \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \cdot \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) \\ & \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \cdot \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) + \frac{E_t I}{L} & \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \cdot \omega_t^2 l (1 - \cos \omega_t) \\ & & 2 \cdot \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \cdot \omega_t^3 \sin \omega_t \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

где су вредности  $E_t$ ,  $\omega_t$  и  $\Delta_t$  дате изразима (3.42), (3.43) и (3.44).

Из услова да је детерминанта ове матрице једнака нули добија се вредност „нееластичне“ критичне силе:

$$P_{cr,inel} = 1040.00 \text{ kN.}$$

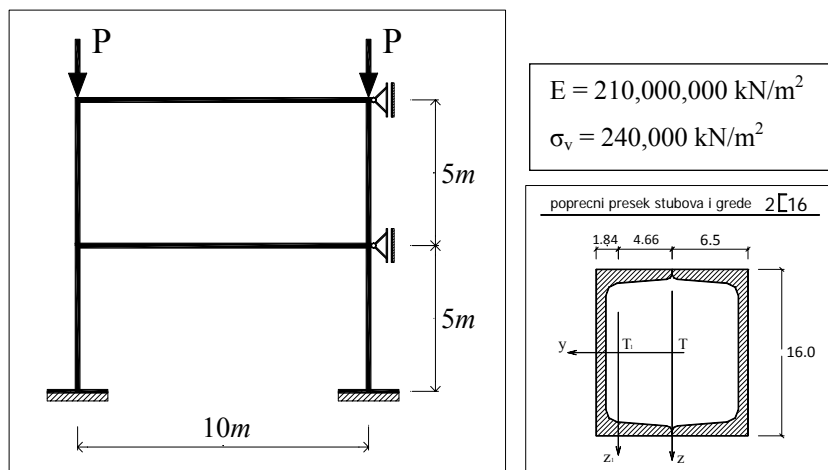
У тренутку достизања критичне силе, вредност тангентног модула износи:

$$E_t = 184,894,168 \text{ kN/m}^2.$$

Тада је критичан напон у аксијално притиснутим штаповима:

$$\sigma_{cr,i} = \frac{P_{cr,i}}{A} = \frac{1040.0 \text{ kN}}{0.00644 \text{ m}^2} = 161419 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}.$$

У другом примеру је анализиран двоспратни оквир са непомерљивим чворовима чије су карактеристике приказане на слици 3.12.



слика 3.12 Двоспратни челични оквир са непомерљивим чворовима

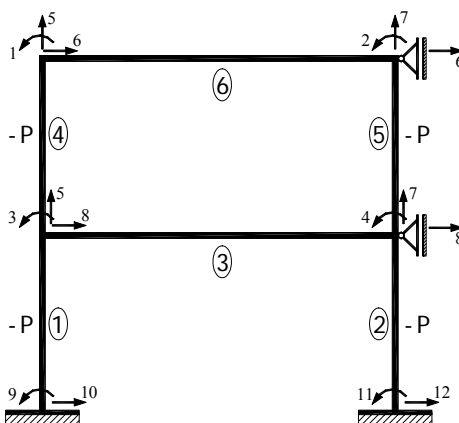
Карактеристике попречних пресека елемената овог носача су:

$$A = 2 \cdot 24.0 = 48.0 \text{ cm}^2$$

$$I_y = 2 \cdot 925 = 1850.0 \text{ cm}^4$$

$$I_z = 2 \cdot (85.3 + 24.0 \cdot 4.66^2) = 1212.95 \text{ cm}^4 = I_{\min}$$

На слици 3.13 приказане су усвојене непознате на крајевима елемената.



слика 3.13 Померања и обртања на крајевима елемената анализираниг оквира

Матрице крутости четири аксијално притиснута стуба формирају се према већ приказаним изразима (3.41), а две хоризонталне греде према (2.43). Са слике 3.13

уочава се да у овом примеру постоје четири непознате различите од нуле, и то су обртања у крутим угловима означени са 1, 2, 3 и 4. Тако се добијају елементи матрица крутости система, која је реда 4 x 4:

$$K_{11} = K_{22} = \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) + \frac{EI}{L^3} 4L^2$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{EI}{L^3} 2L^2$$

$$K_{13} = K_{31} = K_{24} = K_{42} = \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \omega_t l^2 (\omega_t - \sin \omega_t)$$

$$K_{14} = K_{41} = K_{23} = K_{32} = 0$$

$$K_{33} = K_{44} = \frac{E_t I}{l^3 \Delta_t} \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) + \frac{EI}{l^3 \Delta} \omega_t l^2 (\sin \omega_t - \omega_t \cos \omega_t) + \frac{EI}{L^3} 4L^2$$

$$K_{34} = K_{43} = \frac{EI}{L^3} 2L^2$$

$$\text{где је: } \Delta_t = 2 \cdot (1 - \cos \omega_t) - \omega_t \cdot \sin \omega_t, \quad \omega_t = \sqrt{\frac{P_{cr,i}}{E_t \cdot I}} \cdot l, \quad E_t = 4E \cdot \left[ \frac{P_{cr,i}}{A \cdot \sigma_v} \cdot \left( 1 - \frac{P_{cr,i}}{A \cdot \sigma_v} \right) \right].$$

Решавајући  $\det \|K\| = 0$  добија се нееластична критична сила:  $P_{cr,in} = 961.19 \text{ kN}$ .

Тада вредност тангентног модула износи:  $E_t = 116,086,252 \text{ kN/m}^2$ .

Критичан напон у овим штаповима износи:

$$\sigma_{cr,i} = \frac{961.19 \text{ kN}}{0.0048 \text{ m}^2} = 200248 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

У наставку овог примера приказан је стандардни начин за прорачун критичних напона у нееластичној области, (дат на пример у [24]) и добијени резултат је упоређен са резултатом предложеног поступка.

Применом еластичне анализе која је приказана у делу 3.1, израчунава се критична сила носача. Усвајају се исте непознате као раније (слика 3.13), једино што се за аксијално оптерећене штапове користе матрице крутости из израза (3.27). Тако се добија вредност „еластичне“ критичне силе:  $P_{cr,el} = 1561.31 \text{ kN}$ .

У овом случају критични напон у стубовима износи  $\sigma_{cr} = \frac{1561.31 \text{ kN}}{0.0048 \text{ m}^2} = 325273 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ , и

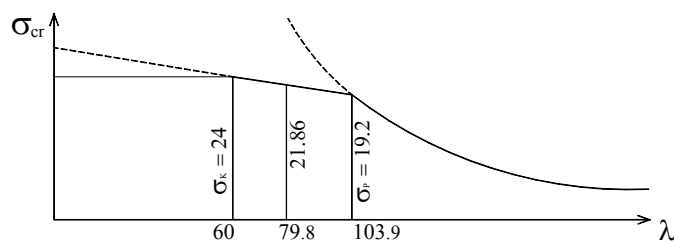
он је већи од границе пропорционалности. У том случају, да би се овај напон „оборио“. тј. добио реалан критичан напон извијања, обавља се следећи прорачун:

$$P_{cr,el} = 1561.31 \text{ kN} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 12.13 \cdot 10^{-6}}{1561.31 \cdot 5^2}} = 0.8025 \Rightarrow l_0 = \beta \cdot l = 4.013 \text{ m}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 0.0503 \text{ m} \Rightarrow \lambda = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{4.013}{0.0503} = 79.82$$

Одатле, на основу Tetmajer-ових израза који су графички приказани на слици 3.7, израчунава се критични напон извијања (слика 3.14):

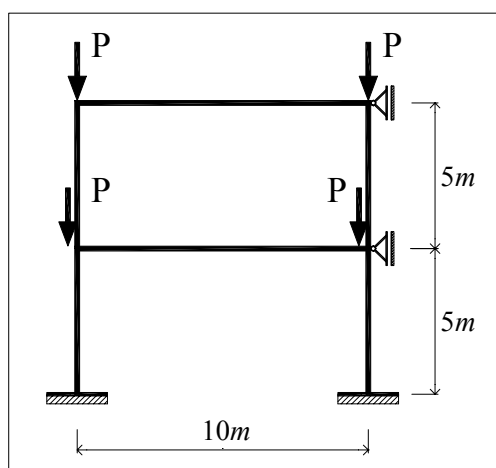
$$\sigma_{cr} = \sigma_0 - \sigma_1 \cdot \lambda = 30.56 - 0.109 \cdot 79.82 = 21.8591 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 218591 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$



слика 3.14 Тетмајерово решење за анализирани нумерички пример

Очигледно је да се предложеним нумеричким поступком добија тачнија вредност критичног напона и она је десетак процената мања од напона који се добија Tetmajer-овим поступком који базира на емпиријским, приближним формулама.

На крају ће бити приказан још и случај када је носач из претходног примера оптерећен аксијалним силама на оба спрата, као што је приказано на слици 3.15.



слика 3.15 Двоспратни челични оквир са непомерљивим чворовима и оптерећењем које делује на оба спрата

Значи, сада је аксијална сила у стубовима горње етаже  $P$ , док је у доњој етажи  $2P$ . Тако се, у односу на претходни пример, разликују елементи матрице крутости који се односе на доња два стуба. Зато се у изразима за  $E_t$ ,  $\omega_t$  и  $\Delta_t$  за доња два стуба уноси сила  $2P_{cr,i}$ . Прорачуном који се обавља на исти начин као и у претходном примеру, постављајући услов да је детерминанта матрице крутости система једнака нули, добија се резултат за критичну силу:

$$P_{cr,in} = 526.83 \text{ kN}.$$

Вредност тангентног модула је различита за горње и доње стубове, зато што је она функција оптерећења у елементу, и износи:

$$E_{t,g} = 208,469,463 \text{ kN/m}^2 \quad \text{и} \quad E_{t,d} = 65,589,815 \text{ kN/m}^2.$$

У овом случају сви вертикални стубови се извијају у нееластичној области.

Критични напони у стубовима износе:

$$\text{горњи стубови: } \sigma_{cr,i} = \frac{526.83 \text{ kN}}{0.0048 \text{ m}^2} = 109756 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\text{доњи стубови: } \sigma_{cr,i} = \frac{2 \cdot 526.83 \text{ kN}}{0.0048 \text{ m}^2} = 219512 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}.$$

#### 4. ПРОГРАМ ALIN ЗА АНАЛИЗУ СТАБИЛНОСТИ НОСАЧА

У овом поглављу приказан програм за прорачун стабилности носача. Програм је написан у програмском језику C++. Иако је проблем стабилности доминантно равански проблем, тј. разматара се углавном на примерима носача у равни, овај програм има могућност за анализу и просторних носача.

Програм је назван ALIN (Анализа ЛИнијских Носача) и намањен је за комплексну анализу линијских носача у равни и простору. Основне могућности овог програма су анализа по теорији првог реда и линеаризованој теорији другог реда (геометријски нелинеарна анализа), динамичка анализа, као и анализа стабилности, односно прорачун критичног оптерећења у еластичној и нееластичној области.

Треба истаћи да се један од главних доприноса ове докторске дисертације састоји у формирању програма ALIN у делу који омогућује ефикасно решавање проблема стабилности у еласто-пластичној области применом „тачних“ израза за матрице крутости које су изведене у претходном поглављу.

Развој програма ALIN укратко је приказан у овом раду, а детаљније је описан у [25] - [27]. Прво је дата анализа гредних елемената у простору у односу на локални координатни систем. Формиране су матрица крутости елемената, вектора еквивалентног оптерећења, и на крају матрица трансформације из локалног у глобални координатни систем. Као што је показано у поглављу 3, матрица крутости по теорији другог реда добијена је усвајањем интерполационих функција које представљају тачно решење диференцијалне једначине аксијално оптерећеног штапа по теорији другог реда. Затим су елементи вектора еквивалентног оптерећења гредног елемента добијени на основу тачног решења одговарајућих диференцијалних једначина теорије другог реда, тј. применом методе почетних параметара. На крају анализе гредног елемента приказан је



поступак редукције матрице крутости и вектора еквивалентног оптерећења у случајевима када су неке везе на његовом крају укинуге, тј. када је једна или више генералисаних сила у чворовима једнака нула. Након тога је дат поступак формирања матрице крутости и вектора еквивалентног оптерећења система међусобно повезаних елемената, а затим и нумеричко моделирање контурних услова.

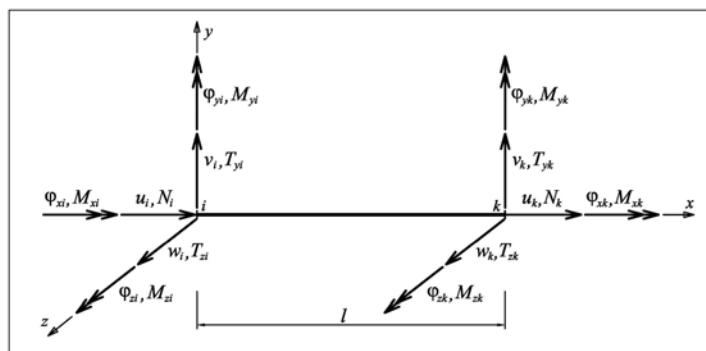
У овом поглављу дат је и концепт програма, његова организација, а приказане су и његове улазне и излазне датотеке. На крају је урађено и неколико нумеричких примера којима су приказане неке од могућности и извршене контроле прорачуна применом наведеног програма.

## 4.1 АНАЛИЗА КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА

У овом делу је, у основним цртама, приказан гредни елемент који је примењен при писању програма ALIN. Матрице крутости и вектор еквивалентног оптерећења су формирану у локалном координатном систему, а затим су дате и матрице трансформације из локалног у глобални координатни систем.

### 4.1.1 ВЕКТОР ГЕНЕРАЛИСАНИХ ПОМЕРАЊА И ГЕНЕРАЛИСАНИХ СИЛА

Један прав гредни елемент у простору, дужине  $l$  и произвољног попречног пресека константног по целој његовој дужини приказан је на слици 4.1. Просторни гредни елемент има 12 степени слободе, тј. по 6 у сваком чвору. Основне кинематичке величине у чворовима су генералисана померања  $u, v, w$  у правцима оса  $x, y, z$ , као и обртања  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  око истих тих оса. Конвенција о њиховим позитивним смеровима приказана је на слици 4.1, а исто означавање примењено је и у програму ALIN.



слика 4.1 Генералисане силе и генералисана померања у чворовима гредног елемента

Тако генералисана померања у чворовима  $i$  и  $j$  представљају компоненте вектора генералисаних померања:

$$\mathbf{q}^T = [ u_i \ v_i \ w_i \ \varphi_{xi} \ \varphi_{yi} \ \varphi_{zi} \ u_j \ v_j \ w_j \ \varphi_{xj} \ \varphi_{yj} \ \varphi_{zj} ] \quad (4.1)$$

Генералисаним померањима на крајевима елемента одговарају генералисане силе:

$$\mathbf{R}^T = [ N_i \ T_{yi} \ T_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi} \ N_j \ T_{yj} \ T_{zj} \ M_{xj} \ M_{yj} \ M_{zj} ] \quad (4.2)$$

#### 4.1.2 МАТРИЦА КРУТОСТИ

Као што је добро познато, преко матрице крутости  $\mathbf{K}$  успоставља се веза између вектора генералисаних сила  $\mathbf{R}$  и вектора генералисаних померања  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (4.3)$$

Матрица крутости може да се добије применом принципа суперпозиције, тј. раздвајањем просторног напонског стања елемента на: аксијално напрезање, савијање око осе  $z$  (у равни  $xy$ ), савијање око осе  $y$  (у равни  $xz$ ) и торзију. Тако је матрица крутости симетрична квадратна матрица дванаестог реда.

Матрица крутости која је коришћена у овом раду је облика који одговара редоследу генералисаних померања и генералисаних сила који су дати у изразима (4.1) и (4.2). Ту су према усвојеном редоследу „распоређена“ генералисана померања прво за чвор  $i$ , а затим и за чвор  $j$ .

У наставку овог дела приказана су решења за матрицу крутости по теорији првог реда и теорији другог реда.

#### Матрица крутости по теорији првог реда

Иако је главни предмет овог рада анализа носача по теорији другог реда, прво је приказана матрица крутости за случај анализе по теорији првог реда. Као што је већ речено, ова матрица се добија суперпозицијом матрице аксијалне крутости, матрице савијања око оса  $z$  и  $y$ , као и матрице торзионе крутости за гредни елемент са константним попречним пресеком, уз занемаривање транверзалних сила на деформације смицања. Ове вредности су добро познате из литетаратуре и дате су изразом (4.4). При томе су коришћене следеће ознаке:

$l$  – дужина посматраног елемента,

$A$  – површина попречног пресека,

$I_y, I_z$  – моменти инерције попр. прес. око главних централних оса инерције  $y$  и  $z$ ,

$I_x$  – торзиона константа (одређена је из претпоставке да је гредни елемент изложен Saint-Venantovoj слободној торзији),

$E$  – модул еластичности,

$G$  – модул клизања.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

#### Матрица крутости по теорији другог реда

Проблем аксијалног напрезања и торзије посматраног елемената су дефинисани на исти начин као и у теорији првог реда. То значи да су у овом случају прва и седма врста и колона, који дефинишу аксијално напрезање, као и четврта и десета врста и колона, који описују торзију, исте као и у случају матрице крутости по теорији првог реда (4.4).

Проблем савијања елемента који је оптерећена аксијалном силом  $P$  на крајевима елемента је детаљно описан у 3. поглављу овог рада. Ту је решење за матрицу крутости по теорији другог реда штапа типа “ $k$ ” који је оптерећен аксијалном силом притиска дато изразом (3.27). У случају затегнутог штапа, матрица крутости је приказана изразом (3.29). Пошто је у чвору  $i$  постављен локални координатни систем  $ixyz$  десне оријентације, тако да се оса  $x$  поклапа са осом елемента, а осе  $y$  и  $z$  са правцима главних оса инерције попречног пресека посматраног елемента, матрицама крутости (3.27), односно (3.29) дефинисан је проблем савијања у равнима  $xu$  и  $xz$  по теорији другог реда. Зато су у коначном решењу за матрицу крутости по теорији другог реда уведени индекси  $y$  и  $z$  код

моментата инерције попречног пресека око главних централних оса инерције. Та матрица је приказана изразом (4.5).

Иако се проблем који се анализира у овом раду доминантно односи на случај аксијалне силе притиска који делује на елемент, за потребе овог програма приказан је заједнички облик матрице крутости за притиснути и за затегнути елемент. Тако је уведена функција  $\phi_i$  ( $i=1,\dots,8$ ), као што се често и ради у литератури [28], чије вредности су за случај притиснутог и затегнутог елемента приказане у табели 4.1. Као што је наглашено у претходном случају, позиције елемената ове матрице одговарају редоследу генералисаних померања и генералисаних сила из израза (4.1) и (4.2).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{EI_z}{l^3}\phi_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{l^2}\phi_2 & 0 & -\frac{EI_z}{l^3}\phi_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{l^2}\phi_2 \\
 0 & 0 & \frac{EI_y}{l^3}\phi_5 & 0 & -\frac{EI_y}{l^2}\phi_6 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_y}{l^3}\phi_5 & 0 & -\frac{EI_y}{l^2}\phi_6 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{EI_y}{l^2}\phi_5 & 0 & \frac{EI_y}{l}\phi_8 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_y}{l^2}\phi_6 & 0 & \frac{EI_y}{l}\phi_7 & 0 \\
 0 & \frac{EI_z}{l^2}\phi_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{l}\phi_4 & 0 & -\frac{EI_z}{l^2}\phi_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{l}\phi_3 \\
 -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{EI_z}{l^3}\phi_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_z}{l^2}\phi_2 & 0 & \frac{EI_z}{l^3}\phi_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI_z}{l^2}\phi_2 \\
 0 & 0 & -\frac{EI_y}{l^3}\phi_5 & 0 & \frac{EI_y}{l^2}\phi_6 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_y}{l^3}\phi_5 & 0 & \frac{EI_y}{l^2}\phi_6 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{EI_y}{l^2}\phi_6 & 0 & \frac{EI_y}{l}\phi_7 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_y}{l^2}\phi_6 & 0 & \frac{EI_y}{l}\phi_8 & 0 \\
 0 & \frac{EI_z}{l^2}\phi_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{l}\phi_3 & 0 & -\frac{EI_z}{l^2}\phi_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI_z}{l}\phi_4
 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

табела 4.1 Функције  $\phi_i$  за гредни елемент у простору

функција	аксијална сила у гредном елементу у простору	
	притисак	затезање
$\phi_1$	$\frac{\omega_z^3 \sin \omega_z}{\Delta_z}$	$\frac{\omega_z^3 \text{sh} \omega_z}{\Delta_z}$
$\phi_2$	$\frac{\omega_z^2 (1 - \cos \omega_z)}{\Delta_z}$	$\frac{\omega_z^2 (\text{ch} \omega_z - 1)}{\Delta_z}$
$\phi_3$	$\frac{\omega_z (\omega_z - \sin \omega_z)}{\Delta_z}$	$\frac{\omega_z (\text{sh} \omega_z - \omega_z)}{\Delta_z}$

$\phi_4$	$\frac{\omega_z(\sin\omega_z - \omega_z\cos\omega_z)}{\Delta_z}$	$\frac{\omega_z(\omega_z\text{ch}\omega_z - \text{sh}\omega_z)}{\bar{\Delta}_z}$
$\phi_5$	$\frac{\omega_y^3\sin\omega_y}{\Delta_y}$	$\frac{\omega_y^3\text{sh}\omega_y}{\bar{\Delta}_y}$
$\phi_6$	$\frac{\omega_y^2(1 - \cos\omega_y)}{\Delta_y}$	$\frac{\omega_y^2(\text{ch}\omega_y - 1)}{\bar{\Delta}_y}$
$\phi_7$	$\frac{\omega_y(\omega_y - \sin\omega_y)}{\Delta_y}$	$\frac{\omega_y(\text{sh}\omega_y - \omega_y)}{\bar{\Delta}_y}$
$\phi_8$	$\frac{\omega_y(\sin\omega_y - \omega_y\cos\omega_y)}{\Delta_y}$	$\frac{\omega_y(\omega_y\text{ch}\omega_y - \text{sh}\omega_y)}{\bar{\Delta}_y}$

где су:

$$\omega_z = \sqrt{\frac{|P|}{EI_z}} \cdot l \quad \Delta_z = 2 \cdot (1 - \cos\omega_z) - \omega_z \cdot \sin\omega_z \quad \bar{\Delta}_z = 2 \cdot (1 - \text{ch}\omega_z) + \omega_z \cdot \text{sh}\omega_z$$

$$\omega_y = \sqrt{\frac{|P|}{EI_y}} \cdot l \quad \Delta_y = 2 \cdot (1 - \cos\omega_y) - \omega_y \cdot \sin\omega_y \quad \bar{\Delta}_y = 2 \cdot (1 - \text{ch}\omega_y) + \omega_y \cdot \text{sh}\omega_y$$

Лако се може уочити да елементи матрице крутости гредног елемента по теорији другог реда зависе и од аксијалне силе у елементу P (која је дата преко параметара  $\omega_z$  и  $\omega_y$ ), за разлику од матрице по теорији првог реда у којој сви елементи константе, тј. зависе од геометрије и карактеристика самог елемента. Тако је математички прорачун у овом случају знатно компликованији него код теорије првог реда.

Треба још једном нагласити да су у овој докторској дисертацији примењене трансцендентне интерполационе функције које се добијају као решења диференцијалне једначине савијања штапа по линеаризованој теорији другог реда. Познато је да у теорији постоји и други облик матрице крутости који се добија у случају када се интерполационе функције усвајају као кубни полиноми који се добијају као решење диференцијалне једначине савијања греде по линеарној теорији. Тада се матрица крутости добија у виду збира матрице крутости по теорији првог реда и геометријске матрице крутости. Иако се у том случају математички лакше долази до решења, он неће бити примењен због својих недостатака који су раније показани у овом раду.

Осим еластичне анализе стабилности, у овом раду је анализирано и извијање оквирних носача у неелатичној обласи. Као што је приказано у поглављу 3, у том

случају модул еластичности није више константа већ зависи од нивоа напрезања у носачу, израз (3.40). Тако, на основу израза (3.41) - (3.47), заједнички облик матрице крутости за притиснути и за затегнути елемент у овом случају гласи:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
 \frac{E_t A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_t A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{E_t I_z}{l^3} \phi_{t,1} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t I_z}{l^2} \phi_{t,2} & 0 & -\frac{E_t I_z}{l^3} \phi_{t,1} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t I_z}{l^2} \phi_{t,2} \\
 0 & 0 & \frac{E_t I_y}{l^3} \phi_{t,5} & 0 & -\frac{E_t I_y}{l^2} \phi_{t,6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_t I_y}{l^3} \phi_{t,5} & 0 & -\frac{E_t I_y}{l^2} \phi_{t,6} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{G_t I_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G_t I_x}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{E_t I_y}{l^2} \phi_{t,5} & 0 & \frac{E_t I_y}{l} \phi_{t,8} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t I_y}{l^2} \phi_{t,6} & 0 & \frac{E_t I_y}{l} \phi_{t,7} & 0 \\
 0 & \frac{E_t I_z}{l^2} \phi_{t,2} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t I_z}{l} \phi_{t,4} & 0 & -\frac{E_t I_z}{l^2} \phi_{t,2} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t I_z}{l} \phi_{t,3} \\
 -\frac{E_t A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t A}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{E_t I_z}{l^3} \phi_{t,1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_t I_z}{l^2} \phi_{t,2} & 0 & \frac{E_t I_z}{l^3} \phi_{t,1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_t I_z}{l^2} \phi_{t,2} \\
 0 & 0 & -\frac{E_t I_y}{l^3} \phi_{t,5} & 0 & \frac{E_t I_y}{l^2} \phi_{t,6} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t I_y}{l^3} \phi_{t,5} & 0 & \frac{E_t I_y}{l^2} \phi_{t,6} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{G_t I_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_t I_x}{l} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{E_t I_y}{l^2} \phi_{t,6} & 0 & \frac{E_t I_y}{l} \phi_{t,7} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t I_y}{l^2} \phi_{t,8} & 0 & \frac{E_t I_y}{l} \phi_{t,8} & 0 \\
 0 & \frac{E_t I_z}{l^2} \phi_{t,2} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t I_z}{l} \phi_{t,3} & 0 & -\frac{E_t I_z}{l^2} \phi_{t,2} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_t I_z}{l} \phi_{t,4}
 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

табела 4.2 Функције  $\phi_i$  за гредни елемент у простору у случају извијања у нееластичној области

функција	аксијална сила у гредном елементу у простору	
	притисак	затезање
$\phi_{t,1}$	$\frac{\omega_{t,z}^3 \sin \omega_{t,z}}{\Delta_{t,z}}$	$\frac{\omega_{t,z}^3 sh \omega_{t,z}}{\Delta_{t,z}}$
$\phi_{t,2}$	$\frac{\omega_{t,z}^2 (1 - \cos \omega_{t,z})}{\Delta_{t,z}}$	$\frac{\omega_{t,z}^2 (ch \omega_{t,z} - 1)}{\Delta_{t,z}}$
$\phi_{t,3}$	$\frac{\omega_{t,z} (\omega_{t,z} - \sin \omega_{t,z})}{\Delta_{t,z}}$	$\frac{\omega_{t,z} (sh \omega_{t,z} - \omega_{t,z})}{\Delta_{t,z}}$
$\phi_{t,4}$	$\frac{\omega_{t,z} (\sin \omega_{t,z} - \omega_{t,z} \cos \omega_{t,z})}{\Delta_{t,z}}$	$\frac{\omega_{t,z} (\omega_{t,z} ch \omega_{t,z} - sh \omega_{t,z})}{\Delta_{t,z}}$
$\phi_{t,5}$	$\frac{\omega_{t,y}^3 \sin \omega_{t,y}}{\Delta_{t,y}}$	$\frac{\omega_{t,y}^3 sh \omega_{t,y}}{\Delta_{t,y}}$
$\phi_{t,6}$	$\frac{\omega_{t,y}^2 (1 - \cos \omega_{t,y})}{\Delta_{t,y}}$	$\frac{\omega_{t,y}^2 (ch \omega_{t,y} - 1)}{\Delta_{t,y}}$
$\phi_{t,7}$	$\frac{\omega_{t,y} (\omega_{t,y} - \sin \omega_{t,y})}{\Delta_{t,y}}$	$\frac{\omega_{t,y} (sh \omega_{t,y} - \omega_{t,y})}{\Delta_{t,y}}$
$\phi_{t,8}$	$\frac{\omega_{t,y} (\sin \omega_{t,y} - \omega_{t,y} \cos \omega_{t,y})}{\Delta_{t,y}}$	$\frac{\omega_{t,y} (\omega_{t,y} ch \omega_{t,y} - sh \omega_{t,y})}{\Delta_{t,y}}$

где су:

$$E_t = 4E \cdot \left[ \frac{P_{in}}{A \cdot \sigma_v} \cdot \left( 1 - \frac{P_{in}}{A \cdot \sigma_v} \right) \right]$$

$$\omega_{t,z} = \frac{1}{2} A \sigma_v l \cdot \sqrt{\frac{1}{E_t I_z (A \sigma_v - P_{in})}} \quad \Delta_{t,z} = 2 \cdot (1 - \cos \omega_{t,z}) - \omega_{t,z} \cdot \sin \omega_{t,z} \quad \bar{\Delta}_{t,z} = 2 \cdot (1 - ch \omega_{t,z}) + \omega_{t,z} \cdot sh \omega_{t,z}$$

$$\omega_{t,y} = \frac{1}{2} A \sigma_v l \cdot \sqrt{\frac{1}{E_t I_y (A \sigma_v - P_{in})}} \quad \Delta_{t,y} = 2 \cdot (1 - \cos \omega_{t,y}) - \omega_{t,y} \cdot \sin \omega_{t,y} \quad \bar{\Delta}_{t,y} = 2 \cdot (1 - ch \omega_{t,y}) + \omega_{t,y} \cdot sh \omega_{t,y}$$

#### 4.1.3 ВЕКТОР ЕКВИВАЛЕНТНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА

Предмет ове докторске дисертације је истраживање проблема стабилности оквирних носача, тако да ће у нумеричкој анализи, у поглављу 5, бити разматрани искључиво оквири са аксијално оптерећеним елементима. Међутим, као што је већ речено, програм ALIN који је примењен у овом раду има могућност прорачуна и према теорији првог и другог реда. Зато је потребно дефинисати и појам вектора еквивалентног оптерећења које ће овде бити коришћено. Ипак, собзиром да то није главна тема овог рада, овде су приказани само основни изрази и коначна решења везана за овај проблем, док се детаљнија анализа приказана у [28], [29].

Тако, у случају када постоји расподељено оптерећење дуж гредног елемента основна једначина таквог елемента има облик:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{Q} \quad (4.7)$$

где је  $\mathbf{Q}$  вектор еквивалентног оптерећења:

$$\mathbf{Q}^T = [N_i^Q \quad T_{yi}^Q \quad T_{zi}^Q \quad M_{xi}^Q \quad M_{yi}^Q \quad M_{zi}^Q \quad N_j^Q \quad T_{yj}^Q \quad T_{zj}^Q \quad M_{xj}^Q \quad M_{yj}^Q \quad M_{zj}^Q] \quad (4.8)$$

Овај вектор представља концентрисано оптерећење на крајевима коначног елемента којим се замењују спољашњи утицаји који делују дуж осе елемента (аксијално оптерећење  $p_x$ , трансверзално оптерећење  $p_y$  и  $p_z$ , моменат торзије  $m_x$ ). Значи, његове компоненте су једнаке негативним вредностима реакција ослонаца на крајевима елементима услед наведеног оптерећења које делује дуж осе елемента. Конвенција је, наравно, иста као у случају вектора генерелисаних сила која је приказана у делу 4.1.1. Као и код матрице крутости, вектор еквивалентног



оптерећења се добија применом принципа суперпозиције четири наведена напонска стања.

У наставку су приказана решења у случају деловања расподељеног оптерећења (сила  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  и момената  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ ) дуж осе гредног елемента и то за случај теорије првог и теорије другог реда.

Вектор еквивалентног оптерећења по теорији првог реда

Коначан облик вектора еквивалентног оптерећења, када су његови елементи стављени на одговарајуће позиције у складу са распоредом одговарајућих кинематичких величина у изразу (4.1), је:

$$Q^T = \frac{L}{2} \left[ p_x \quad p_y \quad p_z \quad m_x \quad -\frac{p_z L}{6} \quad \frac{p_y L}{6} \quad p_x \quad p_y \quad p_z \quad m_x \quad \frac{p_z L}{6} \quad -\frac{p_y L}{6} \right] \quad (4.9)$$

Вектор еквивалентног оптерећења по теорији другог реда

Исто као и у случају матрице крутости просторног елемента по теорији другог реда, и овде су елементи овог вектора услед аксијалног напрезања и торзије исти као и код теорије првог реда. Наиме, диференцијалне једначине се једино разликују за случајеве оптерећења од трансверзалног расподељеног оптерећења  $p_y$  и  $p_z$ .

У овом случају диференцијалне једначине (3.2) постају нехомогене, па се оне најчешће решавају методом почетних параметара. Пошто тај проблем није главна тема овог рада, приказана су само коначна решења за случај притиснутог и затегнутог штапа, израз (4.10). Да би се за случајеве аксијалне силе притиска и затезања приказало решење у истом облику, у литератури [28] се уводе функције  $\gamma_y$  и  $\gamma_z$  које су дате у табели 4.3.

$$Q^T = \frac{L}{2} \left[ p_x \quad p_y \quad p_z \quad m_x \quad -\frac{p_z L}{6} \gamma_y \quad \frac{p_y L}{6} \gamma_z \quad p_x \quad p_y \quad p_z \quad m_x \quad \frac{p_z L}{6} \gamma_y \quad -\frac{p_y L}{6} \gamma_z \right] \quad (4.10)$$

табела 4.3 Функције  $\gamma_y$  и  $\gamma_z$  за гредни елемент у простору

функција	аксијална сила у гредном елементу у простору	
	притисак	затезање
$\gamma_y$	$\gamma_y = -\frac{6\omega_y \sin \omega_y + 12(\cos \omega_y - 1)}{\omega_y^2(1 - \cos \omega_y)}$	$\gamma_y = -\frac{6\omega_y \operatorname{sh} \omega_y + 12(1 - \operatorname{ch} \omega_y)}{\omega_y^2(1 - \operatorname{ch} \omega_y)}$

$\gamma_z$	$\gamma_z = -\frac{6\omega_z \sin\omega_z + 12(\cos\omega_z - 1)}{\omega_z^2(1 - \cos\omega_z)}$	$\gamma_z = -\frac{6\omega_z \operatorname{sh}\omega_z + 12(1 - \operatorname{ch}\omega_z)}{\omega_z^2(1 - \operatorname{ch}\omega_z)}$
------------	--	---

где су:

$$\omega_y = \sqrt{\frac{|P|}{EI_y}} \cdot l \quad \omega_z = \sqrt{\frac{|P|}{EI_z}} \cdot l$$

Одавде се види да се у односу на решење према теорији првог реда, у овом случају једино разликују моменти савијања који су у функцији аксијалне силе у елементу.

#### 4.1.4 РЕДУКЦИЈА МАТРИЦЕ КРУТОСТИ И ВЕКТОР ЕКВИВАЛЕНТНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА

Поступак редукције матрице крутости и вектора еквивалентног оптерећења у случају када су укинута неке везе на крајевима коначних елемената, односно ако су неке генералисане силе у чворовима једнаке нули, приказан је у овом делу.

На основу једначине (4.7) компоненте вектора генералисаних сила  $\mathbf{R}$  на крајевима елемената могу се написати у облику:

$$R_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j - Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.11)$$

где је код гредног елемента у простору укупан број генералисаних померања  $n=12$ .

Нека је  $k$ -ти елемент вектора генералисаних сила једнак нули:

$$R_k = \sum_{j=1}^n k_{kj} q_j - Q_k = 0 \quad (4.12)$$

Одатле се добија израз за  $k$ -ти елемент вектора генералисаних померања  $q$ :

$$q_k = -\frac{1}{k_{kk}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n k_{kj} q_j + \frac{1}{k_{kk}} Q_k \quad (4.13)$$

Компоненте вектора генералисаних сила  $\mathbf{R}$  на крајевима елемената, тј. једначине (4.11) могу да се напишу и на следећи начин:

$$R_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j - Q_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n k_{ij} q_j + k_{ik} q_k - Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.14)$$

Убацавањем израза (4.13) у (4.14) добија се:

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n k_{ij} q_j - \frac{k_{ik}}{k_{kk}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n k_{kj} q_j - Q_i + \frac{k_{ik}}{k_{kk}} Q_k \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.15)$$

односно:

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n k_{ij}^r q_j - Q_i^r \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.16)$$

где су:

$$k_{ij}^r = k_{ij} - k_{ik} \frac{k_{kj}}{k_{kk}} \quad (i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots, k-1, k+1,\dots,n) \quad (4.17)$$

$$Q_i^r = Q_i - \frac{k_{ik}}{k_{kk}} Q_k \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.18)$$

У последња три израза уведена је ознака „r“ у експоненту која означава да се ради о редукованој величини.

Пошто је:

$$k_{ik}^r = k_{ik} - k_{ik} \frac{k_{kk}}{k_{kk}} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.19)$$

у једначине (4.16) може да се укључи и члан са индексом  $j=k$ , тако да се добија:

$$R_i = \sum_{j=1}^n k_{ij}^r q_j - Q_i^r \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.20)$$

где је:

$$k_{ij}^r = k_{ij} - k_{ik} \frac{k_{kj}}{k_{kk}} \quad (i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,n) \quad (4.21)$$

Када се спроведе овај прорачун ред редуковане матрице крутости остаје  $n \times n$ , односно  $12 \times 12$  за гредни елемент у простору, с тим што су елементи  $k$ -те врсте и  $k$ -те колоне једнаки нули.

Ако постоји још генералисаних сила на крајевима елемената које су једнаке нули, овај поступак редукције треба да се понови, при чему се полази од редуковане матрице крутости и редукованог вектора еквивалентног оптерећења из претходног поступка редукције.

Тако сада израз за укупни вектор генералисаних сила у чворовима елемента гласи:

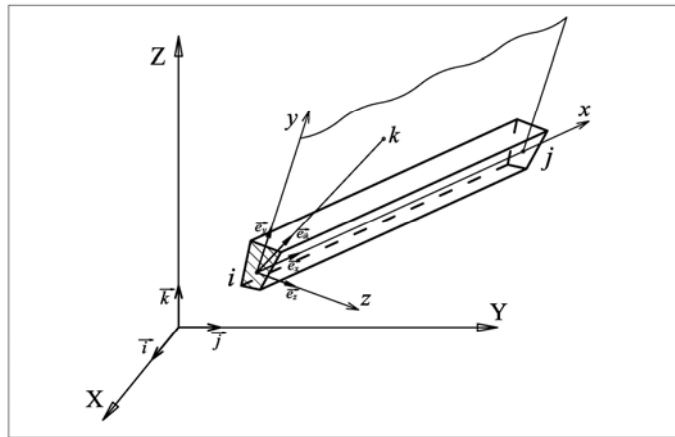
$$\mathbf{R} = \mathbf{K}^r - \mathbf{Q}^r \quad (4.22)$$

где је са  $\mathbf{K}^r$  означена редукована матрица крутости, а са  $\mathbf{Q}^r$  редуковани вектор еквивалентног оптерећења, којима су узета у обзир сва ослобађања на крајевима елемента.

#### 4.1.5 МАТРИЦА ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

У наставку овог поглавља (део 4.2) биће приказана анализа носача, тј. система међусобно повезаних гредних елемената. Зато је потребно да се све наведене векторске величине и матрице трансформишу из локалног координатног система ( $ixyz$ ) који одговара гредном елементу у глобални систем ( $OXYZ$ ).

На слици 4.2 приказани је призматичан гредни елемент у простору, као и локални координатни систем. Осе локалног координатног система су усвојене као и на почетку ове анализе.



слика 4.2 Локални и глобални координатни систем просторног гредног елемента

Да би се успоставила веза између оса локалног координатног система  $ixyz$  и оса глобалног координатног система  $OXYZ$ , прво се дефинише положај посматраног гредног елемента. На основу тога се успоставља веза између јединичних вектора локалних  $x, y$  и  $z$  и глобалних  $X, Y$  и  $Z$  оса преко израза:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

где је  $\Lambda = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}$  (4.24)

Пошто елементи матрице  $\Lambda$  представљају косинусе углова између оса локалног и глобалног координатног система, ова матрица се користи за трансформацију векторских величина из глобалног у локални координатни систем, а њена транспонована вредност за трансформацију из локалног у глобални координатни систем.

Тако је матрица трансформације величина из глобалног у локални координатни систем добијена преко подматрица  $\Lambda$ , тј.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

На основу овога, приказане су везе између основних величина у локалном и глобалном координатном систему, где су величине у глобалном систему означене са \*:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T} \mathbf{q}^* \quad (4.26)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{T} \mathbf{R}^* \quad (4.27)$$

односно

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{q} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{R} \quad (4.29)$$

Да би се добила и матрица крутости у глобалном координатном систему, потребно је уврстити (4.26) и (4.27) у једначину (4.3), и да се та једначина помножи са леве стране са  $\mathbf{T}^T$ . Тако се добија :

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{K}^* \mathbf{q}^* \quad (4.30)$$

где је:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (4.31)$$

матрица крутости гредног елемента у глобалном координатном систему.

На исти начин се и вектор еквивалентног оптерећења трансформише из локалног у глобални координатни систем:

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \quad (4.32)$$

## 4.2 АНАЛИЗА НОСАЧА

У овом делу рада приказан је поступак формирања матрице крутости и вектора еквивалентног оптерећења за носач који се састоји од међусобно повезаних елемената у простору. Након тога је дат поступак прорачуна програмом ALIN по теорији првог реда, линеаризованој теорији другог реда, као и анализа стабилности, тј. одређивање критичног оптерећења носача у еластичном и нееластичном подручју.

### 4.2.1 ДИРЕКТНО ФОРМИРАЊЕ МАТРИЦЕ КРУТОСТИ И ВЕКТОРА ЕКВИВАЛЕНТНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА СИСТЕМА

У делу 4.1 анализирани су коначни елементи који су третирани као независни елементи конструкције. Међутим, при анализи читавог носача потребно је узети у обзир међусобну повезаност тих елемената.

Као прво, компоненте вектора генерализаних померања на крајевима свих елемената који су везани у једном чвору морају бити међусобно једнаке. Значи, треба да се задовољи услов компатибилности померања. Тако је вектор генерализаних померања чворова система приказан у облику:

$$\mathbf{q}^{*\Gamma} = \left[ \mathbf{q}_1^* \dots \mathbf{q}_i^* \dots \mathbf{q}_N^* \right] \quad (4.33)$$

где је  $\mathbf{q}_i^*$  вектор генерализаних померања чвора  $i$ , а  $N$  укупан број чворова система. Са звездицом је у овом и наредним изразима означено да се све компоненте односе на глобални координатни систем.

Такође, потребно је да буду задовољени и услови равнотеже у чворовима система. Спољашње оптерећење које делује у чворовима система је дефинисано као:

$$\mathbf{F}^{*\Gamma} = \left[ \mathbf{F}_1^* \dots \mathbf{F}_i^* \dots \mathbf{F}_N^* \right] \quad (4.34)$$

где  $\mathbf{F}_i^*$  представља задато оптерећење у чвору  $i$ :

$$\mathbf{F}_i^{*\Gamma} = \left[ F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z \right] \quad (4.35)$$

Осим овог спољашњег оптерећења, на чвор  $i$  делују и реакције уклоњених веза, тј. негативне вредности генералисаних сила на крајевима елемената који су везани у том чвору. На тај начин могу да се напишу услови равнотеже за све чворове система:

$$\mathbf{F}^* - \mathbf{R}^* = 0 \quad (4.36)$$

где је

$$\mathbf{R}^{*T} = \left[ \mathbf{R}_1^* \dots \mathbf{R}_i^* \dots \mathbf{R}_N^* \right] = \left[ \sum_{k=1}^{n_i} \overline{\mathbf{R}}_1^{*k} \dots \sum_{k=1}^{n_i} \overline{\mathbf{R}}_i^{*k} \dots \sum_{k=1}^{n_i} \overline{\mathbf{R}}_N^{*k} \right] \quad (4.37)$$

вектор сила везе у чворовима система, а  $\mathbf{F}^*$  вектор задатог оптерећења из израза (4.34).

Још једном треба напоменути да се све величине односе на глобални координатни систем, тј. да је обављена трансформација свих величина из локалног у глобални координатни систем. Тако за сваки елемент  $k$  посматраног система може да се успостави веза између генералисаних сила и генералисаних померања, и то на основу израза (4.7):

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{R}}_i^{*k} \\ \overline{\mathbf{R}}_j^{*k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ii}^{*k} & \mathbf{k}_{ij}^{*k} \\ \mathbf{k}_{ji}^{*k} & \mathbf{k}_{jj}^{*k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i^* \\ \mathbf{q}_j^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i^{*k} \\ \mathbf{Q}_j^{*k} \end{bmatrix} \quad (k=1,2,\dots,M) \quad (4.38)$$

У овом изразу експонент  $k$  означава елемент, а индекси  $i$  и  $j$  чворове елемента. Вектор генералисаних сила елемента  $k$  у чвору  $i$  се добија као:

$$\overline{\mathbf{R}}_i^{*k} = \mathbf{k}_{ii}^{*k} \mathbf{q}_i^* + \mathbf{k}_{ij}^{*k} \mathbf{q}_j^* - \mathbf{Q}_i^{*k} \quad (4.39)$$

Када се овај израз убаци у услове равнотеже (4.36), за чвор  $i$ , добија се:

$$\mathbf{K}_{ii}^* \mathbf{q}_i^* + \mathbf{K}_{ij}^* \mathbf{q}_j^* = \mathbf{F}_i^* + \mathbf{Q}_i^* \quad (i=1,2,\dots,N \quad j=1,2,\dots,N) \quad (4.40)$$

где су:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ii}^* &= \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{k}_{ii}^{*k}, & \mathbf{K}_{ij}^* &= \mathbf{k}_{ij}^{*k} \quad (i \neq j) \\ \mathbf{Q}_i^* &= \sum_{k=1}^{n_i} \mathbf{Q}_i^{*k} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ако се једначине (4.39) напишу редом за све чланове система, тако да индекси  $i$  и  $j$  на крајевима елемената узму ознаке одговарајућих чворова, добија се систем једначина који у матричном облику гласи:

$$\mathbf{K}^* \mathbf{q}^* = \mathbf{S}^* \quad (4.42)$$

где је  $\mathbf{K}^*$  матрица крутости система елемената, а  $\mathbf{S}^*$  вектор оптерећења који представља збир вектора задатих спољашњих сила у чворовима система  $\mathbf{F}^*$  и вектора еквивалентног оптерећења система  $\mathbf{Q}^*$ , тј.

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{F}^* + \mathbf{Q}^* \quad (4.43)$$

Приказани директни поступак за добијање матрица крутости и вектора еквивалентног оптерећења примењен је у програму ALIN. При томе се тај поступак састоји од следећих корака:

1. Прво треба да се одреди укупан број степени слободe (генералисаних померања) система елемената. Сваком чвору система (у коме су везана два или више гредних елемената) додели се 6 степени слободe (генералисаних померања). Тако је укупан број степени слободe система  $N_{eq}$  једнак збиру генералисаних померања свих чворова система, па је  $N_{eq} \leq 6 \cdot N$ , где је  $N$  број чворова система.
2. Сваки чвор система добије ознаке (глобалне бројеве) одговарајућих генералисаних померања у виду вектора од 6 елемената, а затим се те ознаке проследи одговарајућим коначним елементима. Тако ће сваки елемент система имати податак о ознакама генералисаних померања и за почетни и за крајњи чвор.
3. У следећем кораку се формира матрица крутости сваког елемента у локалном координатном систему, а затим и матрица трансформације елемената из локалног у глобални координатни систем.
4. На основу претходне две матрице израчунава се матрица крутости свих елемената у глобалном координатном систему.



5. Да би се формирала матрица крутости читавог система  $\mathbf{K}^*$ , потребно је да се изврши алоцирање меморије за њу. Зато се прво се формира квадратна нула матрице реда  $N_{eq}$ .

6. Затим се изврши тзв. „assembly“ поступак. У формирану нулту матрицу се уносе блокови матрица крутости  $\mathbf{k}_{ii}^*$ ,  $\mathbf{k}_{ij}^*$ ,  $\mathbf{k}_{ji}^*$  и  $\mathbf{k}_{jj}^*$  свих елемената. Ти елементи се уносе на позицију која одговара њиховим индексима (кодним бројевима), односно ознакама одговарајућих чворова. Ако се на истој позицији нађу блокови матрица крутости два или више елемента, они се у том случају сабирају.

За формирање вектора еквивалентног оптерећења система елемената  $\mathbf{Q}^*$  у глобалном координатном систему примењује се исти поступак као и за матрицу крутости  $\mathbf{K}^*$ . При томе се, наравно, користе већ одређен број степени слободe система  $N_{eq}$ , ознаке одговарајућих генералисаних померања и формиране матрице трансформације елемената.

#### 4.2.2 НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ КОНТУРНИХ УСЛОВА

При формирању носача треба узети у обзир услове ослањања елемената у ослоначким чворовима. Постојање ослонца у носачу дефинише се постављањем хомогених контурних услова. Дефинисање тих контурних услова се спроводи „интервенцијама“ на матрици крутости система, а постоје два нумеричка начина да се то уради.

Први начин је „брисање“ одговарајућег генералисаног степена слободe. То се чини тако што се елиминишу оне врсте и колоне матрице крутости читавог система које одговарају спреченом степену слободe. Овим поступком се смањује ред матрице крутости система, тј. број степени слободe система. Овај начин нумеричког дефинисања хомогених контурних услова захтева „рекомпозицију“ матрице крутости система (пошто она постаје мањих димензија).

Други начин дефинисања контурних услова је преко „спречавања“ генералисаних степени слободe. Идеја је да се зада велика крутост на месту и у правцу спреченог генералисаног померања. То се постиже тако што се за одређени генералисани

степен слободe додаје релативно велика константа на позицију дијагонале матрице крутости система. Тако ће матрица крутости система елемената на дијагонали садржати „веома велике“ бројеве, па ће се решавањем система алгебарских једначина добити „веома мала“ одговарајућа генералисана померања у ослоначким чворовима система елемената.

Овај други начин је погоднији за програмирање и коришћен је у програму ALIN код прорачуна конструкције по теорији првог и другог реда. За разлику од тога, у анализи стабилности је неопходно да се редукује матрица крутости тако што се елеминишу њене врсте и колоне које одговарају спреченом степену слободe.

#### 4.2.3 АНАЛИЗА СИСТЕМА ЕЛЕМЕНАТА ПО ТЕОРИЈИ ПРВОГ РЕДА

У програму ALIN прорачун утицаја у носачу услед задатог оптерећења, по теорији првог реда, одвија се у следећим фазама:

1. Прво се уносе улазни подаци из одговарајуће текстуалне датотеке xml формата, која се користи због обезбеђивања интегритета унетих података. У овој датотеци се задају подаци о чворовима елемената, геометријским и механичким карактеристикама елемената носача и задатом оптерећењу.
2. Затим треба да се одреди укупан број степени слободe (генералисаних померања) система елемената  $N_{eq}$  (поступак је описан у поглављу 4.2.1, корак 1).
3. Након тога (као што је описано у делу 4.2.1, 2. корак) сваки чвор система добија ознаке (глобалне бројеве) одговарајућих генералисаних померања у виду вектора од 6 елемената. Те ознаке се прослеђују одговарајућим коначним елементима, тако да ће сваки елемент система имати податак о ознакама генералисаних померања за почетни и за крајњи чвор.
4. У следећем кораку формирају се матрице крутости и вектор еквивалентног оптерећења гредног елемента у локалном координатном систему, на основу већ приказаних израза (4.4) и (4.9). Такође је потребно да се формира и матрица трансформације елемената из глобалног у локални координатни систем, на основу израза (4.25).
5. Потребно је да се изврши редукција матрице крутости и вектора еквивалентног оптерећења у случају када су укинута неке везе на крајевима коначних елемената,

тј. ако су неке генерализане силе у чворовима једнаке нули (поглавље 4.1.4, односно изрази (4.21) и (4.18)).

6. Када су дефинисане матрице и вектори у претходном кораку, преко израза (4.31) и (4.32) добијају се матрица крутости и вектор еквивалентног оптерећења гредног елемента у глобалном координатном систему.

7. За задато спољашње оптерећење у чворовима носача, формира се вектор задатих спољашњих сила у чворовима система  $\mathbf{F}^*$ , као што је приказано у изразу (4.34).

8. Затим, као што је објашњено у делу 4.2.1 корак 5, треба да се изврши алоцирање меморије за матрицу крутости читавог система елемената  $\mathbf{K}^*$ , као и за вектор еквивалентног оптерећења  $\mathbf{Q}^*$ . То се чини тако што се формирају квадратна нула матрица и нула вектор реда  $N_{eq}$ , где је  $N_{eq}$  укупан број степени слободе система (из 2. корака овог поступка).

9. Као што је описано у делу 4.2.1 корак 6, изврши се формирање матрице крутости система елемената  $\mathbf{K}^*$ . Наиме, у формирану нулту матрицу се уносе блокови матрица крутости свих елемената. Ти елементи се уносе на позицију која одговара њиховим индексима (кодним бројевима), односно ознакама одговарајућих чворова. Ако се на истој позицији нађу блокови матрица крутости два или више елемента, они се у том случају сабирају. Исти поступак се понови и за формирање вектора еквивалентног оптерећења система елемената  $\mathbf{Q}^*$ .

10. Следећи корак је формирање вектора оптерећења система елемената  $\mathbf{S}^*$  на основу израза (4.43). Одатле се види да се вектор  $\mathbf{S}^*$  добија као збир вектора спољашњих задатих сила у чворовима система  $\mathbf{F}^*$  и вектора еквивалентног оптерећења система елемената  $\mathbf{Q}^*$ .

11. Након тога, потребно је обавити нумеричко уношење контурних услова. Као што је објашњено у делу 4.2.2, то се чини тако што се додаје релативно велика константа на позицију дијагонале матрице крутости система елемената која одговара спреченим степенима слободе.

12. Када су дефинисани  $\mathbf{K}^*$  и  $\mathbf{S}^*$  приступа се решавању система линеарних алгебарских једначина (4.42) методом Cholesky, зато што је матрица крутости

система елемената симетрична и позитивно дефинитна. Као резултат овог система једначина добија се вектор генералисаних померања чворова система  $\mathbf{q}^*$  који је реда  $N_{eq}$ . Генералсана померања у ослоначким чворовима се добијају „јакко мала“ због начина на који су унети контурни услови у 11. кораку овог поступка.

13. Пошто је одређен вектор генералисаних померања свих чворова система, обавља се „прослеђивање“ одговарајућих компоненти овог вектора појединим елементима. Тако се формира вектор глобалних генералисаних померања сваког појединачног елемента  $\mathbf{q}_k^*$ , који има 6 компоненти зато што се у овом раду анализирају само гредни елементи.

14. На крају се одређују генералисане силе на крајевима појединачних елемената у глобалном координатном систему  $\mathbf{R}_k^*$  на основу израза (4.38), а после се добијају и генералисане силе у локалном координатном систему из једначине  $\mathbf{R}_k = \mathbf{T}_k \mathbf{R}_k^*$ .

#### 4.2.4 АНАЛИЗА СИСТЕМА ЕЛЕМЕНАТА ПО ТЕОРИЈИ ДРУГОГ РЕДА

Прорачун по теорији другог реда, у програму ALIN, представља наставак приказаног прорачуна по теорији првог реда. Наиме, на основу израчунате нормалне силе у свим елементима по теорији првог реда, наставља се прорачун утицаја у носачу по теорији другог реда. Фазе тог прорачуна су следеће:

1. Прво се формирају матрице крутости гредних елемената у локалном координатном систему према изразу (4.5). Треба опет напоменути да, за разлику од теорије првог реда где су елементи матрице крутости били у функцији геометријских и механичких карактеристика елемента, у теорији другог реда они зависе још и од аксијалне силе у елементу. У овом раду су примењене трансценедтне интерполационе функције које се добијају као решења диференцијалне једначине савијања штапа по линеаризованој теорији другог реда, и оне су различите за притиснути и затегнути елемент (табела 4.1). Затим се формира и вектор еквивалентног оптерећења на основу израза (4.10), и он је такође у функцији аксијалне силе у елементу.

2. Након тога треба да се изврши редукција матрице крутости и вектора еквивалентног оптерећења у случају када су неке везе на крајевима гредног елемента укинуте, тј. ако су неке генералисане силе у чворовима једнаке нули (део 4.1.4, односно изрази (4.21) и (4.18)).
3. У наставку се врши трансформација ових матрица крутости и вектора еквивалентног оптерећења из локалног у глобални координатни систем преко израза (4.31) и (4.32).
4. Следећи корак је, као и у теорији првог реда, формирање квадратне нула матрице и нула вектора реда  $N_{eq}$ . Тиме се алоцирала меморија за матрицу крутости  $\mathbf{K}^*$  и вектор еквивалентног оптерећења  $\mathbf{Q}^*$ .
5. Потребно је поново, као што је описано у делу 4.2.1 корак 6, извршити формирање матрице крутости система елемената  $\mathbf{K}^*$ , уношењем блокова матрица крутости свих елемената у формирану нулту матрицу и то на одговарајућу позицију, као што је већ описано. Исти поступак се затим обави и за формирање вектора еквивалентног оптерећења система елемената  $\mathbf{Q}^*$ .
6. У следећој фази прорачуна формира се вектор оптерећења система елемената  $\mathbf{S}^*$  на основу израза (4.43). У овом случају вектор  $\mathbf{S}^*$  се добија као збир вектора спољашњих задатих сила у чворовима система  $\mathbf{F}^*$  који је формиран у прорачуну по теорији првог реда (поглавље 4.2.3, корак 7) и вектора еквивалентног оптерећења система елемената по теорији другог реда  $\mathbf{Q}^*$ .
7. Затим се уносе контурни услови поступком који је раније примењен. Релативно велике константе се додају на позицију дијагонале матрице крутости система елемената која одговара спреченим степенима слободе.
8. Систем линеарних алгебарских једначина (4.42) у коме су матрица  $\mathbf{K}^*$  и вектор  $\mathbf{S}^*$  добијени по теорији другог реда решава се методом Cholesky, као и у теорији првог реда. Као резултат, добија се вектор генералисаних померања чворова система  $\mathbf{q}^*$  који је реда  $N_{eq}$ . Због „веома великих“ бројева на дијагонали матрице крутости система елемената, одговарајућа генералисана померања у ослоначким чворовима се добијају „веома мала“.

9. У следећој фази потребно је да се обави ослобађање, тј. деалоцирање заузете меморије за матрицу крутости  $\mathbf{K}^*$  и вектор еквивалентног оптерећења  $\mathbf{Q}^*$  система елемената по теорији другог реда.

10. Након тога се формира вектор глобалних генералисаних померања сваког појединачног елемента  $\mathbf{q}_k^*$ , тако што се из вектора генералисаних померања свих чворова система  $\mathbf{q}^*$  одговарајуће компоненте „прослеђују“ појединачним елементима.

11. На крају се одређују генералисане силе на крајевима појединачних елемената по теорији другог реда у глобалном координатном систему  $\mathbf{R}_k^*$  на основу израза (4.38). Након тога се израчунавају и генералисане силе у локалном координатном систему из једначине  $\mathbf{R}_k = \mathbf{T}_k \mathbf{R}_k^*$ .

Прорачун по теорији другог реда у програму ALIN је итеративни поступак. Као што је већ речено, у првој итерацији се нормалне у свим елементима узимају из прорачуна по теорији првог реда. У следећим итерацијама се кораци (фазе) 2 до 11 приказаног алгорима за прорачун по теорији другог реда понављају све док разлика између померања у две узастопне итерације не буде мања од неке унапред задате величине. У овом програму је за ту величину усвојено  $\varepsilon < 10^{-4}$ .

#### 4.2.5 АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ СИСТЕМА У ЕЛАСТИЧНОЈ И НЕЕЛАСТИЧНОЈ ОБЛАСТИ

Програм ALIN има могућност израчунавања критичне силе носача, на основу које може да се изврши анализа стабилности тог носача, како у еластичној, тако и у нееластичној области.

Оптерећење у случају овог прорачуна (а то је концентрисано оптерећење у чворовима) могуће је унети у функцији произвољног фактора (реалног броја). Тако оно може да се прикаже у функцији тог фактора, као нпр.  $P$ ,  $2P$ , ... У том случају у xml датотеку се уноси вредност фактора (означен је са  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  у зависности од смера деловања оптерећења), а затим се уноси и конкретна цифра за параметар оптерећења  $P$  (нпр. 100 kN). Програм као крајњи резултат приказује фактор критичног оптерећења, који је означен као „Load Factor“.

Поступак рада за одређивање критичног оптерећења у еластичној области је следећи. Прво се за случај критичног оптерећења решава носач по теорији првог реда. Добијене аксијалне силе се користе у првој итерацији за одређивање матрице крутости по теорији другог реда (на основу израза (4.5), као што је приказано у делу 4.2.4). Прорачун према теорији другог реда се обавља итеративно, при чему се добијене  $N$  силе у свакој итерацији уносе у матрицу крутости  $\mathbf{K}^*$  за следећу итерацију. Овакав итеративни прорачун се спроводи све док се вредност померања у две узастопне итерације не добије мања од неке унапред задате вредности (у овом случају је усвојено  $10^{-6}$ ). При овом прорачуну матрица крутости систем се користи у пуној величини, тј. на местима и у правцу спреченог генерализаног померања додају се релативно велике константе (у овом случају  $10^{15}$  пута највећа вредност у матрици  $\mathbf{K}^*$ ). Матрица  $\mathbf{K}^*$ , која се добије на крају итеративног прорачуна, тј. по добијању конвергентног решење по теорији другог реда, се затим трансформише. То се чини на тај начин што се елиминишу оне врсте и колоне матрице крутости читавог система које одговарају спреченим степенима слободе. Тако на крају остаје редукована матрица крутости читавог система  $\mathbf{K}^*$  која одговара само активним степенима слободе.

Када је добијена редукована матрица крутости, потребно је задовољити услов да је детерминанта те матрице једнака нули. Прорачун детерминанте те редуковане матрице се такође обавља итеративно. Прорачун почиње са вредношћу фактора оптерећења (LoadFactor-a) од 1.0 и инкрементом  $\delta=0.01$ . При томе се у сваком кораку израчунава детерминанта система, уз стално повећавање фактора оптерећења за  $\delta=0.01$ , све док се не добије негативна вредност детерминанте матрице  $\mathbf{K}^*$ . У тренутку када се израчуна да је  $\det|\mathbf{K}^*| < 0$ , тада се LoadFactor смањи за  $\delta=0.01$  (то је инкремент фактора оптерећења који је био „актуелан“ у том тренутку). Након тог се дефинише нови „ситнији“ инкремент  $\text{newdelta}=0.001$  и започиње се нови итеративни циклус, који се обавља све до поновног достизања негативне вредности детерминанте матрице  $\mathbf{K}^*$ . У моменту када се опет израчунава да је  $\det|\mathbf{K}^*| < 0$ , добија се вредност фактора критичног оптерећења (LoadFactor-a) са тачношћу на три децимале, што се сматра да је довољна тачност за овај вид прорачуна. Теоретски гледано, прорачун би могао итеративно да се настави са још „ситнијим“ инкрементима, али то није потребно. На овај начин је

добијена критична сила у еластичном домену, тачније у случају када је у прорачуну усвојено да модул еластичности  $E$  има константну вредност, тј. да је функција само врсте материјала и да је његова вредност задата у улазној xml датотеци.

Као што је већ речено, осим прорачуна критичне силе у еластичној области, програм ALIN има могућност еласто-пластичне анализе стабилности оквирних носача. Поступак прорачуна „нееластичног“ критичног оптерећења је следећи. Прво је потребно да се обави прорачун „еластичне“ критичне силе који је већ описан. Затим се у сваком аксијално оптерећеном стубу израчунава вредност критичног напона који је једнак количнику „еластичне“ критичне силе и површине попречног пресека анализираног елемента, израз (3.38). У случају када се добије да је његова вредност већа од границе пропорционалности (која је у функцији границе развлачења  $\sigma_v$  материјала, која је задата у улазној датотеци), прорачун се наставља на начин који је описан у делу 3.2. Значи у стубовима у којима је испуњен тај услов, мења се крутост штапа, тј. потребно је увести нови тангентни модул  $E_t$  који је узет у облику (3.40). На тај начин се за те стубове формирају нове матрице крутости у локалном координатном систему према изразу (4.6). Стубови у којима критични напон није достигао границу пропорционалности задржавају „старе карактеристике“, тј. матрице крутости за те елементу су исте као и у првом делу овог прорачуна. Затим се врши трансформација ових матрица из локалног у глобални координатни систем и формира матрице крутости система елемената  $\mathbf{K}^*$  на начин као што је описано у деловима 4.2.3 и 4.2.4. Након тога почиње итеративни прорачун на исти начин као што је већ описано за прорачун критичне силе у еластичној области. Значи, прво се за инкремент  $\delta=0.01$  тражи када вредност детерминанте матрице  $\mathbf{K}^*$  мења знак (тј. када постаје мања од нуле), а после тога се то уради и за инкремент  $\delta=0.001$  како би се добило решење за фактора критичног оптерећења (LoadFactor-a) са тачношћу на три децимале. Треба нагласити да се у овом случају у излазној текстуалној датотеци, осим вредности фактора критичног оптерећења, штампа и вредност тангентног модула ( $E_t$ ) за сваки елемент који се извија у нееластичној области.



## 4.3 ПРОГРАМ ALIN

### 4.3.1 КОНЦЕПТ ПРОГРАМА

Програм ALIN написан је у програмском језику C++ [30]-[33], тачније ISO C++, у окружењу Dev\_C++. Направљена је конзолна апликација заснована на улазној датотеци типа XML, док су добијени резултати приказани у одговарајућим излазним текстуалним датотекама.

Као и код свих програма сличне намене, постоје три основна модула програма, који чине једну целину. То су модули који служе за:

- унос података, тј. дефинисање проблема који се разматра,
- формирање и решавање одговарајућих једначина,
- обраду и приказ добијених резултата.

Значи, преко улазне датотеке, корисник у програм уноси опис конструкције и проблема који се решава. Садржај улазне датотеке је детаљно приказан у следећем делу 4.3.2.

Анализом улазне датотеке програм испитује валидност унетих података. Уколико се уочи нека грешка (нпр. ако наведе број неког чвора, елемента, попречног пресека који није унет у одговарајућу листу података), програм се аутоматски прекида и даје информацију о грешци.

На основу улазних података, програм израчунава утицаје у конструкцији. Добијене резултате програм приказује у облику излазних текстуалних датотека, о којима ће бити више речи у делу 4.3.3

### 4.3.2 УЛАЗНА ДАТОТЕКА

Улазни подаци се уносе у облику XML датотеке, користи се DOM (Document object model) приступ и библиотека TinyXML.

Примери улазних датотека за одговарајуће нумеричке примере приказани су у делу 4.4.

У наставку је приказана организација улазне датотеке и детаљно су наведени улазни подаци којима се описује конструкција и дефинише проблем који се решава.

Основни, „root“, елемент улазне XML датотеке је `<ALIN>...</ALIN>`. У оквиру њега се налазе следећи блокови:

- `<System>...</System>`, у оквиру кога се уносе основни подаци о проблему који се решава,
- `<Property>...</Property>`, у оквиру кога се уносе подаци о материјалима и попречним пресецима елемената,
- `<Nodes>...</Nodes>`, у оквиру кога се уносе подаци о координатам чворова и степенима слободе,
- `<Elements>...</Elements>`, у оквиру кога се уносе подаци о коначним елементима,
- `<Loading>...</Loading>`, у оквиру кога се уносе подаци о оптерећењу.

Треба напоменути да споменути блокови треба да се уносе наведеним редом.

#### » ОПШТИ ПОДАЦИ О ПРОБЛЕМУ

Као што је већ речено, општи подаци о проблему који се решава се уносе у оквиру блока `<System>...</System>`.

У оквиру овог блока прво се уноси наслов и евентуално одговарајући поднаслови проблема. То се ради у једној или више `<title>...</title>` линија.

Након тога, контролне информације се уносе у оквиру блока `<Control>...</Control>`.

Ту се прво уноси информација о имену излазне контролне датотеке (без екстензије) у оквиру блока `<OutFile>...</OutFile>`.

Затим се дефинише да ли се разматра равански (s2D) или просторни (s3D) проблем у оквиру блока `<Space> s2D` или `s3D </Space>`. Важно је напоменути да је иницијализација програма извршена за равански проблем, тако да у том случају **s2D** није потребно уносити.

Након тога се дефинише тип анализе која се ради и то у оквиру блока

**<Analysis> STATIC, DYNAMIC или STABILITY </Analysis>**.

У случају анализе стабилности (што је и тема овог рада), постоји могућност прорачуна по теорији другог реда или одређивања критичног оптерећења у еластичној или нееластичној области, што се дефинише у облику

**<StabAnal> SECOND или CRITICAL или CRITICAL\_EP </StabAnal>**.

Такође постоји могућност да се дефинише да ли ће програм радити са матрицом крутости која је добијена на основу приближног или тачног решења диференцијалне једначине савијања по теорији другог реда. Тако се уноси

**<StabStiff> EXACT или GEOMETRIC </StabStiff>**.

Као што је већ више пута наглашено, сви примери у овом раду ће бити анализирани са тачним решењем за матрицу крутости.

Приказ могућности динамичке анализе у оквиру овог програма, а која није тема овог рада, детаљно је приказана у [27].

## » ПОДАЦИ О МАТЕРИЈАЛИМА И ПОПРЕЧНИМ ПРЕСЕЦИМА

Након блока **<System>** следећи је блок **<Property> . . . </Property>** у оквиру кога се дефинишу попречни пресеци елемената, као и материјали од којих су састављени.

Подаци о материјалу се дефинишу у оквиру блока **<Material> . . . </Material>**. У програму постоје два унапред дефинисана материјала: челик и бетон. У нумеричким примерима овог рада (поглавље 5) анализирани су носачи од челика за које су усвојене карактеристике:  $E = 210000000 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\gamma = 78.5 \text{ kN/m}^3$ ,  $\rho = \gamma/9.81 \text{ t/m}^3$ ,  $\sigma_v = 240000 \text{ kN/m}^2$ . Ако се користе ови унапред дефинисани материјали, уноси се:

**<Mat\_Type> STEEL или CONCRETE </Mat\_Type>**

**<Default> Yes </Default>**

Међутим, постоји и могућност да се унесу и карактеристике било ког другог материјала, тј. да се дефинишу његово име, индетфикациони број, модул еластичности, Poisson-ов коефицијент, специфична тежина, напон течења. Још

једном се напомиње да то није коришћено у нумеричким примерима у овом раду, тако да ни овде нема потребе да се детаљно објашњава процедура како се то ради.

Подаци о попречним пресецима се дефинишу у оквиру блока `<Section>...</Section>`. Ту је могуће дефинисати правоугаони или „општи“ попречни пресек. Код правоугаоног попречног пресека `<Rectangle>...</Rectangle>` потребно је дефинисати његово име унутар блока `<Rect_Name>...</Rect_Name>`, његов идентификацион број унутар блока `<Rect_Numb>...</Rect_Numb>`, као и димензије унутар `<Dim_A>...</Dim_A>`, односно `<Dim_B>...</Dim_B>`. У овом раду су анлазирани челични носачи чије су карактеристике попречних пресека задаване на следећи начин:

`<General>`

`<Gen_Name>` име општег попречног пресека `</Gen_Name>`

`<Gen_Numb>` идентификациони број општег попречног пресека `</Gen_Numb>`

`<Area>` површина попречног пресека `</Area>`

`<I1>` момент инерције око осе  $x$ , торзиона константа `</I1>`, само за **s3D** проб.

`<I2>` момент инерције око осе  $y$  `</I2>`, само за **s3D** проблем

`<I3>` момент инерције око осе  $z$  `</I3>`

`</General>`

## » ПОДАЦИ О ЧВОРНИМ ТАЧКАМА И СТЕПЕНИМА СЛОБОДЕ

Подаци о координатама чворова, као и спреченим степенима слободе уносе се у оквиру блока `<Nodes>...</Nodes>`. Ту се за сваки чвор дефинише његов број, уносе се његове координате, а може се доделити и име чвора преко следеће команде:

`<Joint Name=" Oslonac A" X="10.0" Y="10.0" Z="0.0" Number="1" />`.

Треба нагласити да се  $Z$  координата уноси само у случају просторног (**s3D**) проблема. Ако се нека координата не наведе експлицитно, програм аутоматски усваја вредност нула. У овом раду су углавном анализирани равански проблеми, међутим у случају просторног проблема треба водити рачуна да за сваки гредни

елемент треба да се унесе и координата тачке  $k$  помоћу које се одређује положај локалне координатне осе тог елемента (слика 4.2).

Осим координата тачака, у оквиру овог блока уносе се и подаци о граничним условима, односно о спреченим степенима слободе у појединим чворовима. За нпр. укљештење у чвору 1 раванског примера то се ради на следећи начин:

```
<Boundary Node="1" UX="1" UY="1" RZ="1" />
```

### » ПОДАЦИ О КОНАЧНИМ ЕЛЕМЕНТИМА

Након блока `<Nodes>` следећи је блок `<Elements>...</Elements>` у оквиру кога се, као што је већ речено, уносе подаци о коначним елементима. За потребе овог рада приказаће се како су дефинисани гредни елементи, мада је могуће користити и решеткасте елементе. За сваки елемент потребно је унети податке о његовој нумерацији, о бројевима почетног I и крајњег J чвора (који су дефинисани у претходном блоку), затим индентификациони број материјала и попречног пресека (који су такође раније дефинисани), и ако је потребно, назив елемента. У наставку су дати примери уноса за један гредни елемент и то за случај и у равни и у простору (када мора да се унесе и податак о чвору K).

```
<Beam Beam_No="1" I="1" J="2" Mat="1" SecType="GEN_SEC"
Sec="1" Name="Stub1"/>
```

```
<Beam Beam_No="4" I="6" J="7" K="9" Mat="1" SecType="GEN_SEC"
Sec="2" Name="Greda1"/>
```

У оквиру овог блока уносе се и подаци о евентуалном ослобађању веза на крајевима гредних елемената. Тако се ту дефинише у ком чвору је веза ослобођена, и које генералисано посмерање је спречено (иницијализује се са 1):

```
<Beam_Rele Beam_No="3" Node="J" RZ="1" />
```

### » ПОДАЦИ О ОПТЕРЕЂЕЊУ

На крају се у оквиру блока `<Loading>...</Loading>` уносе и подаци о оптеређењу. Врсте оптеређења које могу да се унесу у програму ALIN су концентрисано оптеређење у чвору, једнакоподељено оптеређење дуж елемента и аутоматско узимање у обзир сопствене тежине.

За дефинисање концентрисаног оптерећења довољно је унети број чвора у коме оно делује, као и вредност самог тог оптерећења у односу на глобални координатни систем. Јасно је да у раванском проблему могу да се јаве компоненте FX, FY и MZ, док код проблема у простору постоји свих шест компоненти FX, FY, FZ, MX, MY и MZ. Дат је пример како се уноси једно такво оптерећење:

```
<Conc Node="1" FX="10" FY="-100" />
```

Што се тиче једнакоподељеног оптерећења код гредних елемената, потребно је унети идентификациони број елемента као и вредност тог оптерећења у односу на локални координатни систем:

```
<Unif Beam="5" FY="-20.0" />
```

Треба нагласити да се за обе ове врсте оптерећења, у случају да се нека од компоненти не наведе експлицитно, подразумева се да је она једнака нули.

Сопствену тежину програм може аутоматски да срачуна. Мора се једино водити рачуна о правцу и смеру деловања тог оптерећења. Наиме, у раванском (s2D) проблему оно делује надоле у правцу Y осе (која је позитивна нагоре), док у просторном (s3D) проблему сопствена тежина делује надоле у правцу Z осе (која је позитивна нагоре). Команда за аутоматско узимање у обзир сопствене тежине је:

```
<SelfWeight> Yes </SelfWeight>
```

У оквиру једног примера може да буде унето више случајева оптерећења. Сваки случај оптерећења може да садржи произвољан број концентрисаних сила и једнакоподељеног оптерећења, као и сопствену тежину елемената. Подаци о једном случају оптерећења уносе се у оквиру блока `<LoadCase>` ...`</LoadCase>` који садржи следеће податке:

```
<LoadCase>
  <Name> Prvi slucaj opterecenja </Name>
  <Number>1</Number>
  <SelfWeight>Yes</SelfWeight>
  <Conc Node="2" FY="-100" />
  <Conc Node="3" FY="-100" />
```

```
<Unif Beam="1" FX="20" />
</LoadCase>
```

После уношења свих случајева оптерећења, у случају анализе **STATIC** могуће је направити и разне комбинације оптерећења, и то се чини у оквиру блока **<Combination>...</Combination>**, где се уносе референтни случајеви оптерећења са одговарајућим мултипликаторима.

Главни циљ овог рада је у налажењу алгоритама који омогућавају ефикасније решавање проблема стабилности. Тако ће овде више речи бити о задавању оптерећења за врсту анализе **STABILITY**. У овом случају уноси се само један случај оптерећења и нису могуће никакве комбинације оптерећења. Јасно је да се у случају анализе стабилности, тј. израчунавања критичног оптерећења, уносе концентрисане силе које делују у чворовима оквирних носача. То оптерећење може да се уноси у функцији параметра оптерећења  $P$  (као нпр.  $P$ ,  $2P$ ,  $4P$ ). У том случају уноси се вредност фактора (оначен је са **ax**, **ay** и **az** у зависности од смера деловања оптерећења), а затим се уноси и конкретна цифра за параметар оптерећења  $P$  (нпр. 100 kN). Осим овог варијабилног оптерећења, у задатку може, по потреби, да се зада да делује и фиксно оптерећење, као што је сопствена тежина.

За случај једног најједноставнијег рама (који ће бити приказан у наставку рада) аксијално оптерећење се уноси у следећем облику:

```
<Loading>
<LoadCase>
  <Name> KONCENTRISANE SILE U TACKAMA C I D </Name>
  <Number>1</Number>
  <Conc Node="2" LType="1" FY="-100.0" AFY="1.0" />
  <Conc Node="3" LType="1" FY="-100.0" AFY="1.5" />
</LOADCASE>
</LOADING>
```

Ово је последњи блок у основном, „root“, елементу **<ALIN>...</ALIN>** елементу улазне XML датотеке.

Након уношења улазне датотеке, програм је анализира и у случају неке грешке (нпр. ако се јави број неког чвора, елемента, попречног пресека или материјала који није претходно дефинисан), он се аутоматски прекида и јавља да постоји грешка.

#### 4.3.3 ИЗЛАЗНЕ ДАТОТЕКЕ

Излазне датотеке програма ALIN су текстуалног типа. Назив и садржај тих датотека зависи од типа анализе и добијених резултата које оне садрже.

Код анализе типа **STATIC** излазни резултати су силе у пресеку на крајевима сваког елемента у локалним координатама (NodalForces.txt) и у глобалном координатном систему (GlobalNodalForces.txt), као и померања свих чворова система у глобалним координатама (NodalDisplacements.txt).

Што се тиче **STABILITY** анализе, као што је већ речено, могуће је обавити прорачун носача по теорији другог реда или израчунати критично оптерећење носача у еластичној или нееластичној области.

У случају прорачуна носача по теорији другог реда, излазни резултати су силе у пресеку на крајевима свих елемената у локалном и глобалном координатном систему, као и померања свих чворова система у глобалном координатном систему, сви они израчунати по теорији првог и теорији другог реда. Назив излазних датотека за прорачун по теорији првог реда је NodalForces.txt, GlobalNodalForces.txt и NodalDisplacements.txt, а за прорачун по теорији другог реда: NodalForces-II.txt, GlobalNodalForces-II.txt и NodalDisplacements-II.txt. Такође, програм даје и излазну контролну текстуалну датотеку чије име је дефинисано у улазној XML датотеци у оквиру **<OutFile>** блока. Она садржи системске информације о врсти анализе и носачу, као и све остале информације о задатим попречним пресецима, материјалима, чворовима, елементима и оптерећењу. Треба напоменути да излазне датотеке могу да приказују и неке међурезултате као што су нпр. глобална матрица крутости, вектор еквивалентног оптерећења итд.



У овом раду се највише примењује прорачун критичног оптерећења носача на основу кога ће бити извршена његова анализа стабилности. Резултат за израчунато критично оптерећење, како у еластичној, тако и у нееластичној области дато је преко **LOAD FACTOR** –а, и приказано је у излазној контролној датотеци (`ime_datoteke.txt`). У случају „нееластичне“ анализе, приказаће се и вредност тангетног модула елемената (**ET**) у тренутку достизања критичног оптерећења. Поред наведених података, могу бити дати и резултати сила у пресеку на крајевима елемената у локалном координатном систему, као и још неки други резултати прорачуна ако је то потребно. Примери овакве излазне датотеке приказани су у делу 4.4 овог поглавља.

#### 4.3.4 ОРГАНИЗАЦИЈА ПРОГРАМА

Основна класа програма ALIN је класа **Model** која описује модел конструкције. Први задатак класе **Model** је прикупљање улазних података и контролно исписивање учитаног улаза у излазну контролну датотеку. Улазни подаци се преузимају из улазне `xml` датотеке и то се обавља у функцији чланица класе **Model::inputXML()**. У тој функцији се дефинишу локалне променљиве одговарајућег типа које преузимају податке путем `xml - parsing`-а, у складу са `TinyXML` приступом. Након преузимања података одређеног блока и њиховог уношења у локалне променљиве (које и постоје да би се у њих учитали подаци после парсовања), ти подаци се преносе у променљиве истог типа који су приватни чланови класе **Model**.

Наредни задаци класе **Model** су формирање модела конструкције, решавање одговарајућих једначина проблема, као и приказивање добијених резултата. Ови задаци зависе од примењене врсте анализе и обављају се у одговарајућим функцијама чланицама класе **Model** које овде неће бити наведене. За решавање наведених једначина проблема користи се библиотека матрица `SMV_lib`.

Класе и њихови објекти, који су садржани у основној класи **Model** приказани су у наставку.

» Класа **System**

У овој класи су дефинисани општи улазни подаци о проблему који се посматра. Основни приватни чланови класе су вектор стрингова са насловом проблема и објекти класе **Control** у којој су садржане све контролне информације о проблему. Те информације се састоје од низа ENUM променљивих и низа INT променљивих (контролних бројева). У наставку се приказује део датотеке Enumus.h где су приказане неке од променљивих које контролишу ток програма.

```
//----- general
enum SPACE {s2D = 2, s3D = 3};
enum ANALYSIS {STATIC, DYNAMIC, STABILITY};
enum OBJECT {SIMPLE, CST_BRIDGE, BUILDING, TOWER};
//----- stability
enum STAB_ANAL {SECOND, CRITICAL, CRITICAL_EP, POSTCRIT};
enum STAB_STIFF {EXACT, GEOMETRIC};
enum STAB_LOAD {FIXED, VARIABLE};
//----- dynamics
enum DYNA_TYPE {EIGEN, RESPONSE};
enum DYNA_SOLU {MODAL, DIRECT};
enum DYNA_LOAD {TIME_FORCE, ACCELELOGRAM};
//----- structure and finite elements
enum STRUCTURE {TRUSS, FRAME, TWBEAM, CABLE, MIXED};
enum ELEMENTS {TRUSS_ELE, BEAM_ELE, TWBEAM_ELE, CABLE_ELE, MIXED_ELE};
enum PLANE_STIFF {FOUR, SIX};
//----- material and cross sections
enum MATERIAL {CONCRETE, STEEL, OTHER, MIXED_MAT};
enum SECTION {FULL, THIN_WALLED, BOTH};
enum FULL_SECTION {RECT, CIRC, T_SEC, I_SEC, GEN_SEC, MIXED_SEC};
enum TW_SECTION {OPENED, CLOSED, CLOSED_OPENED};
//----- casble-stayed bridge
enum INIT_SHAPE {LINEAR, NONLINEAR};
enum AFTER_ISHAPE {NO, ADD_LOAD, DYNAMIC_EIG, DYNAMIC_RESP};
enum TYPE_CABLE {BAR, ERNST, KAROUMI, BAR_SW, ERNST_SW, KAROUMI_SW};
```

INT контроле су

- No\_Elem** - укупан број коначних елемената
- No\_Beams** - број гредних елемената
- No\_Truss** - број решеткастих елемената
- No\_Sect** - укупан број различитих попречних пресека
- No\_Mat** - укупан број различитих материјала
- No\_LC** - укупан број случајева оптерећења
- No\_Eqs** - укупан број степени слободе система елемената

**» Класа Materials**

Овде су дефинисани подаци о различитим материјалима који могу да се користе. Приватни чланови ове класе су вектори са поинтерима на различите материјале, односно на класу **Material\_Item**, као и bool индикатор да ли постоји тај вектор.

**\* класа Material\_Item**

Ова класа садржи све податке о усвојеним материјалима, као што су тип тог материјала, његови референтни број и назив, као и његове карактеристике: модул еластичности, Poisson-ов коефицијент, специфична тежина, напон течења.

**» Класа Section**

У овој класи су дефинисани подаци о различитим попречним пресецима. Приватни чланови ове класе су вектори са поинтерима на различите типове попречних пресека, тј. на класу **Rectangle** (за пуни правоугаони попречни пресек) и класу **G\_Section** (за „општи“ попречни пресек), као и одговарајући bool индикатори.

Код прорачуна методом коначних елемената није битан облик попречног пресека, већ само његове карактеристике, тј. површина и моменти инерције. Тако да је у оквиру класе **Section** имплементирана и класа **Property** која у прорачун преноси наведене карактеристике, тј. цифарске податке за сваки појединачни попречни пресек. Та класа је уствари иста као и класа за „општи“ пресек **G\_Section** (где се уносе вредности које је корисник унапред израчунао).

**\* класе Rectangle и G\_Section**

Приватни чланови ових класа су јединствени идентификациони број за ту групу пресека, назив пресека, његова површина ( $A$ ), моменти инерције ( $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ ), као и одговарајући bool индикатори. За класу **Rectangle** основни чланови су и ширина и висина попречног пресека на основу којих се рачунају споменути површина и моменти инерције.

**» Класа Node List**

Ова класа је колекција свих чворних тачака у рачунском моделу. Приватни чланови ове класе су вектор са поинтерима на све чворне тачке, тј. на класу **Node**, као и bool индикатор да ли постоји тај вектор.

---

\* класа **Node**

Приватни чланови ове класе су класе **Joint**, **DOFs** и **Boundary**, преко којих се дефинишу подаци о чворним тачкама, степенима слободe и граничним условима. Такође, чланови су и индетификациони број чвора, његово име, као и информација да ли је проблем равански или просторни, а која се преузима из класе **Joint**.

° класа **Joint**

Ова класа се користи за баратање са чворним тачкама рачунског модела. Њен основни приватни члан је објекат класе **Point\_3D**, а остали чланови су и индетификациони број чвора, име чвора и податак о простору који се преузима од класе **Point\_3D**.

- класа **Point\_3D**

Представљање тачака у равни (2D) или простору (3D) се обавља уз помоћ ове класе. Приватни чланови класе **Point\_3D** су координате X, Y и Z координате и податак о простору. У случају 2D проблема, узима се да је у питању XY раван, тако да је координата  $Z = 0$ . У случају када се унесу само X и Y координате, аутоматски се детектује да је у питању 2D проблем, а ако се унесе и Z координата онда је то 3D проблем. Ово мора да буде у складу са основном Space променљивом из класе **Control**. У класи **Point\_3D** могу да се обављају и елементарне функције баратања са тачкама, као што су сабирање, одузимање, упоређивање, скалирање, ...

° класа **DOFs**

Ова класа се користи за додељивање степени слободe у чворним тачкама рачунског модела. Приватни елементи класе **DOFs** су низ од 6 bool елемената `bool DOF[6]` и податак о простору (Space). Елементи овог низа представљају редом померања у правцу X, Y и Z осе, као и обртања око X, Y и Z осе, тј. UX, UY, UZ, RX, RY и RZ. У случају када је `DOF[i] = false`, тада не постоји степен слободe број "i", а када је `DOF[i] = true` тај степен слободe је дефинисан. Иницијално су сви степени слободe у конструктору постављени на false. Након тога су у случају `Space = s2D` дефинисана три степена слободe у равни XY, тако да је `DOF = [1, 1, 0, 0, 0, 1]`, а за `Space = s3D` је `DOF = [1, 1, 1, 1, 1, 1]`. Значи, ови подаци о степенима

слободе се аутоматски додељују, осим у случају спољашњих или унутрашњих веза (нпр. унутрашња зглобна веза) када се они додатно уносе.

° класа **Boundary**

Баратање са подацима о граничним условима у чворним тачкама рачунског модела се обавља помоћу ове класе. Основни приватни елемент ове класе је низ од 6 bool елемената bool CON[6]. Елементи овог низа представљају степене слободе и то редом UX, UY, UZ, RX, RY и RZ. Иницијално, у конструктору, сви ови елементи су постаљени на false, тј. тако да су сва генералисана померања дозвољена. У случају када се стави CON[i] = true, тада је спречен степен слободе број "i", тако да одговарајуће генералисано померање не постоји, тј. постављено је на нулу.

» Класа **Elements**

У овој класи дефинисани су подаци о различитим типовима линијских коначних елемената. Приказује се само гредни коначни елемент типа **BEAM** који се користи у овом раду, а треба напоменути да у овом програму постоји могућност коришћења и других елементи (**TRUSS**, **CABLE**, **TW\_BEAM**). Приватни чланови ове класе су вектори са поинтерима на гредне коначне елементе, тј. на класу **Beam**, као и bool индикатори да ли ови вектори постоје или не.

\* класа **Beam**

Елементи ове класе су равански или просторни гредни носачи. Елементи типа **Beam** дефинисани су својим индетификационим бројем (јединственим за сваки елемент у оквиру **Beam** групе), чворним тачкама I и J (као и чвором K за просторни елемент), подацима о материјалу и попречном пресеку, као и по потреби додељеном имену. Ради могућности ослобађања веза на крајевима елемената, приватни чланови ове класе су и два низа од по 6 bool елемената који носе податке о ослобађању степени слободе у чворовима I и J, као и два одговарајућа bool индикатора која показују да ли постоји или не ослобађање ових степени слободе. У конструктору, ови елементи су иницијално постављени на false.

Класа **Beam** је одговорна и за податке о матрици трансформације, локалној и глобалној матрици крутости и вектору еквивалентног оптерећења гредног

елемента. Приватни чланови ове класе су и вектори локалних и глобалних померања крајњих чворних тачака гредног елемента.

#### » Класа **BasicLoads**

Ова класа је колектор за све појединачне случајеве оптерећења, тако да је њен основни приватни члан вектор са поинтерима на класу **LoadCase**. Остали приватни чланови су вектор са називима оптерећења, као и одговарајући `bool` индикатори.

##### \* класа **LoadCase**

У овој класи су садржана сва оптерећења која чине неки од основних случајева оптерећења. Основни чланови ове класе су вектори са поинтерима на класе **ConcForce** (за концентрисано оптерећење у чворним тачкама) и **UniformLoad** (за једнако подељено оптерећење по елементима). Осим њих, приватни чланови ове класе су и назив и референтни број случаја оптерећења, као и одговарајући `bool` индикатори. Треба напоменути да у једном основном случају оптерећења може да буде произвољан број концентрисаног и једнако подељеног оптерећења.

##### ° класа **ConcForce**

Као што је већ речено, ова класа представља концентрисане утицаје у једном чвору. Њени приватни чланови су поинтер на чворну тачку, односно на класу **Node**, затим вектор `double Force[6]` са шест елемената који представљају компоненте концентрисане силе (FX, FY и FZ) и концентрисаног момента (MX, MY и MZ). Важно је напоменути да се ове компоненте оптерећења задају у односу на глобални координатни систем. Приватни чланови ове класе су и вектор `bool DIR[6]` са елементима који имају вредност 0 или 1 у зависности да ли постоји одговарајућа компонента концентрисаног оптерећења, и на крају одговарајући `bool` индикатори.

##### ° класа **UniformLoad**

Ова класа преставља једнако подељено оптерећење дуж елемената типа `beam` и `truss`. Основни приватни чланови ове класе су поинтери на класе типа **Beam** и **Truss**, као и вектор `double Uniform[6]` чији су елементи компоненте расподељеног оптерећења `rx`, `ry` и `rz`, као и расподељених момената `mx`, `my` и `mz`. Треба напоменути да су ове компоненте дефинисане у односу на локални

координатни систем посматраних елемената. Приватни чланови ове класе су и вектор `bool DIR[6]` са истим карактеристикама као и у претходној класи и одговарајући `bool` индикатори.

#### » Класа **Loads**

Класа **Loads** је колектор за све комбинације оптерећења. Чланови ове класе су вектор са поинтерима на класу **LoadComb**, тј. на комбинације оптерећења, као и `bool` индикатор да ли је унета барем једна комбинација оптерећења или није.

##### \* класа **LoadComb**

Ова класа представља једну комбинацију основних случајева оптерећења. Њени приватни чланови су назив комбинације оптерећења, вектор са мултипликатором основних оптерећења, као и одговарајући `bool` индикатори.

#### » Класа **GlobalEqs**

Глобална матрица крутости и глобални вектор оптерећења су садржани у овој класи. Она је одговорна за њихово формирање и манипулисање са њима током решавања одговарајућих једначина проблема. Њени основни чланови су матрица крутости ( $\text{Matrix}^* K$ ), вектор оптерећења ( $\text{Vector}^* \text{Load}$ ) и вектор померања ( $\text{Vector}^* \text{Disp}$ ), као и одговарајући `bool` индикатори.

#### » Библиотека матрица **SMV\_lib**

Ова библиотека се користи при манипулацијама са матрицама и при решавању одговарајућих једначина проблема. Користе се следеће њене класе:

##### \* класа **Arrays**

Ова класа се користи за манипулацију са матрицама и векторима формираних од реалних бројева.

##### \* класа **LinEqs**

Ова класа се користи за решавање линеарних алгебарских једначина. Она садржи класе које примењују методу LU декомпозиције, и то класу **Cholesky** за симетричне и класу **Crout** за несиметричне матрице.

##### \* класа **EigVal**

Ова класа се користи за решавање проблема својствених вредности. Она садржи класе **Jacobi** и **Lanczos** које се за то користе.

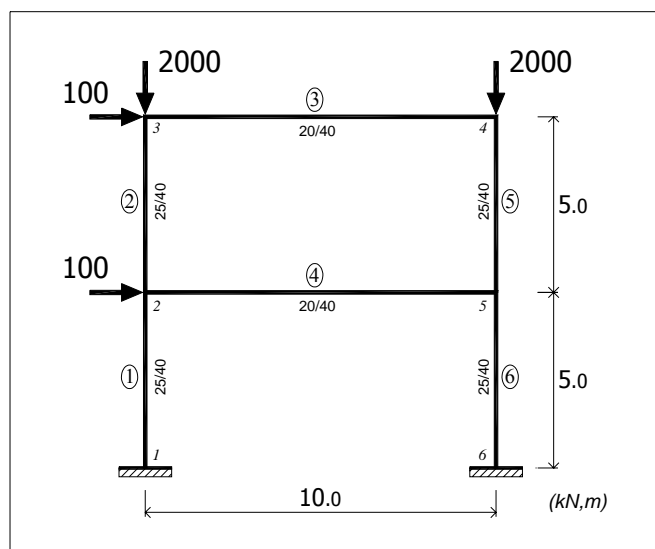
#### 4.4 ПРИМЕР И КОНТРОЛА ПРОРАЧУНА ПРОГРАМОМ ALIN

У овом делу урађена су два примера којима су приказане неке од могућности прорачуна помоћу програма ALIN, а истовремено је извршена и контрола прорачуна његовом применом. Тако је приказана анализа једног двоспратног оквира по теорији првог и теорији другог реда, као и анализа стабилности за најједноставнији пример штапа оптерећеног аксијалном силом притиска.

За ове примера дата је улазна датотека са улазним подацима за програм ALIN, као и неке од излазних датотека са резултатима прорачуна.

##### 4.4.1 АНАЛИЗА ОКВИРА ПРЕМА ТЕОРИЈИ ПРВОГ И ТЕОРИЈИ ДРУГОГ РЕДА

У првом примеру је приказан прорачун једног двоспратног оквира према теорији првог и теорији другог реда. На слици 4.3 приказана је геометрија носача, као и димензије попречних пресека. Претпостављено је да је у питању бетонски носач са  $E=3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ . Као што се види на слици, у чворовима 3 и 4 делују концентрисане вертикалне силе, док концентрисано хоризонтално оптерећење делује у чворовима 2 и 3.



слика 4.3 Контролни пример - двоспратни равански оквир

Да би се успешно обавила контрола прорачуна програма ALIN по теорији другог реда, усвојено је оптерећење које даје значајну разлику у резултатима прорачуна



по теорији првог и другог реда. Зато је узето да вредност задатих аксијалних сила достиже скоро половину вредности критичне силе овог оквирног носача.

Датотека (StC-dr1.xml) са улазним подацима за анализу задатог оквира по теорији другог реда се приказује у наставку.

```

<ALIN>
  <System>
    <title> StC-dr1:OBOSTRANO UKLJESTEN DVOSPRATNI OKVIR </title>
    <title> Odredjivanje presečnih sila po teoriji II reda </title>
    <Control>
      <OutFile> StC-dr1 </OutFile>
      <Analysis>STABILITY</Analysis>
      <StabTheory>SECOND</StabTheory>
    </Control>
  </System>
  <Property>
    <Material>
      <Mat_Type>CONCRETE</Mat_Type>
      <Mat_Name>Beton</Mat_Name>
      <Mat_Numb>1</Mat_Numb>
      <Modulus>3.0e+07</Modulus>
      <Poisson>0.25</Poisson>
      <Gamma>25.0</Gamma>
      <Rho>2.548</Rho>
    </Material>
    <Section>
      <Rectangle>
        <Rect_Name>GREDA</Rect_Name>
        <Rect_Numb>1</Rect_Numb>
        <Dim_A>0.25</Dim_A>
        <Dim_B>0.40</Dim_B>
      </Rectangle>
      <Rectangle>
        <Rect_Name>STUB</Rect_Name>
        <Rect_Numb>2</Rect_Numb>
        <Dim_A>0.25</Dim_A>
        <Dim_B>0.40</Dim_B>
      </Rectangle>
    </Section>
  </Property>
  <Nodes>
    <Joint Name="Oslonac A" Y="0.0" X="0.0" Number="1"/>
    <Joint Name="Tacka B" Y="5.0" X="0.0" Number="2"/>
    <Joint Name="Tacka C" Y="10.0" X="0.0" Number="3"/>
    <Joint Name="Tacka D" Y="10.0" X="10.0" Number="4"/>
    <Joint Name="Tacka E" Y="5.0" X="10.0" Number="5"/>
    <Joint Name="Oslonac F" Y="0.0" X="10.0" Number="6"/>
    <Boundary Node="1" RZ="1" UX="1" UY="1"/>
    <Boundary Node="6" RZ="1" UX="1" UY="1"/>
  </Nodes>
  <Elements>
    <BeamName="STUB" Sec="2" SecType="RECT" Mat="1" I="1" J="2" Beam_No="1"/>
    <Beam Name="STUB" Sec="2" I="2" J="3" Beam_No="2"/>
    <Beam Name="GREDA" Sec="1" I="3" J="4" Beam_No="3"/>
    <Beam Name="GREDA" Sec="1" I="2" J="5" Beam_No="4"/>

```

```

    <Beam Name="STUB" Sec="2" I="4" J="5" Beam_No ="5"/>
    <Beam Name="STUB" Sec="2" I="5" J="6" Beam_No ="6"/>
  </Elements>
  <Loading>
    <LoadCase>
      <Name>Koncentrisane sile u tackama B, C i D (cvorovi 2, 3 i 4)</Name>
      <Number>1</Number>
      <Conc Node="2" FX="100"/>
      <Conc Node="3" FX="100" FY="-2000"/>
      <Conc Node="4" FY="-2000"/>
    </LoadCase>
  </Loading>
</ALIN>

```

Као што је већ напоменуто, прорачун по теорији другог реда обавља се тако што се у првој итерацији нормалне силе у елементима узимају на основу прорачуна по теорији првог реда, док се у наставку итеративни поступак понавља коришћењем вредности добијених у теорији другог реда из претходне итерације. Тако се у овом прорачуну добијају вредности и по теорији првог и по теорији другог реда које ће бити приказане у наставку рада.

Неке од датотека са излазним подацима су такође приказане. Прво је дата контролна датотека StC-dr1.txt која садржи податке о улазним подацима.

```

=====
                                PROGRAM ALIN
                                STATIC, DYNAMIC and STABILITY ANALYSIS of FRAME STRUCTURES
=====
(1) SYSTEM INFORMATION
-----
(1.1) TITLES
      StC-dr1: OBOSTRANO UKLJESTEN DVOSPRATNI OKVIR
      Odredjivanje presečnih sila po teoriji II reda
(1.2) CONTROL INFORMATION
-----
- Problem SPACE      = 2D
- ANALYSIS type     = STABILITY
  based on EXACT stiffness
- STIFFNESS matrix  = u, v, fi
- STRUCTURE type    = FRAME
- ELEMENTS type     = BEAM elements
- CROSS-SECTION     = only FULL
- MATERIAL type     = CONCRETE
(1.3) CONTROL NUMBERS
-----
- Different Sections      = 2
- Different Materials     = 1
- Number of Finite Elements = 6
  Beam Elements          = 6

```

(2) INFORMATION ABOUT MATERIALS

Material Type	Mat Num	Material Name	Modulus E [kN/m <sup>2</sup> ]	Ni	Gamma [kN/m <sup>3</sup> ]	Rho [t/m <sup>3</sup> ]	Alpha-t [1/deg. C]
CONCRETE	1	Beton	3e+007	0.25	25	2.548	0

(3) INFORMATION ABOUT CROSS-SECTIONS

Section Type	Sec Num	Section Name	Area [m <sup>2</sup> ]	Moment I3 [m <sup>4</sup> ]	Moment I1 [m <sup>4</sup> ]	Moment I2 [m <sup>4</sup> ]
RECTANGLE	1	GREDA	0.08	0.00106667		
RECTANGLE	2	STUB	0.1	0.00133333		

(4) INFORMATION ABOUT NODE LIST  
JOINT NUMBERS AND COORDINATES

Joint Number	Joint Name	Joint X [m]	Joint Y [m]	Joint Z [m]	DOFs 123456
1	Oslonac A	0	0	0	000000
2	Tacka B	0	5	0	110001
3	Tacka C	0	10	0	110001
4	Tacka D	10	10	0	110001
5	Tacka E	10	5	0	110001
6	Oslonac F	10	0	0	000000

DOF = 1: active dof; DOF = 0: restrained dof

(5) INFORMATION ABOUT ELEMENT LIST  
(5.1) B E A M E L E M E N T S

Element Type	Element Name	Elem Num	Node I	Node J	Material Type	Mat Num	Section Type	Sec Num	Memb. Release Node I	Node J
BEAM	STUB	1	1	2	CONCRETE	1	RECTANGLE	2	000000	000000
BEAM	STUB	2	2	3	CONCRETE	1	RECTANGLE	2	000000	000000
BEAM	GREDA	3	3	4	CONCRETE	1	RECTANGLE	1	000000	000000
BEAM	GREDA	4	2	5	CONCRETE	1	RECTANGLE	1	000000	000000
BEAM	STUB	5	4	5	CONCRETE	1	RECTANGLE	2	000000	000000
BEAM	STUB	6	5	6	CONCRETE	1	RECTANGLE	2	000000	000000

Member Release = 1: no generalized force  
Member Release = 0: active generalized force

(6) INFORMATION ABOUT LOADING CASES

LOAD CASE no 1: Koncentrisane sile u tackama B, C i D (cvorovi 2, 3 i 4)

CONCENTRATED JOINT LOADS

Joint Number	Joint Name	C o n c e n t r a t e d F o r c e s			
		Fx [kN]	Fy [kN]	Fz [kN]	
Concentrated Moments		Mx [kNm]	My [kNm]	Mz [kNm]	
2	Tacka B	100	0	0	
		0	0	0	
3	Tacka C	0	-2000	0	
		0	0	0	
3	Tacka C	100	0	0	
		0	0	0	
4	Tacka D	0	-2000	0	
		0	0	0	

Note: JOINT loads are given with respect to GLOBAL system

(7) INFORMATION ABOUT LOADING COMBINATIONS

Class Loads: Load combinations are not given!

Датотеке NodalForces-IV.txt и NodalDisplacements-IV.txt које садрже решења за силе у пресеку и померања чворова добијена прорачуном према теорији другог реда у четвртој (последњој) итерацији прорачуна су дате у наставку.

=====
   
= LOCAL NODAL FORCES OF ELEMENTS =
   
=====

StC-dr1: OBOSTRANO UKLJESTEN DVOSPRATNI OKVIR
   
Odredjivanje presečnih sila po teoriji II reda

Total number of load cases = 1

LOAD CASE: koncentrisane sile u tackama B, C i D (cvorovi 2, 3 i 4)
   
=====

BEAM ELEMENTS

Beam	Node	N[kN]	Ty[kN]	Mz[kNm]
1	I = 1	1866.7	102.82	484.342
1	J = 2	-1866.7	-102.82	191.578
2	I = 2	1944.32	51.2275	196.549
2	J = 3	-1944.32	-51.2275	278.417
3	I = 3	48.7725	-55.6779	-278.417
3	J = 4	-48.7725	55.6779	-278.331
4	I = 2	48.4078	-77.6245	-388.127
4	J = 5	-48.4078	77.6245	-388.097
5	I = 4	2055.68	48.7725	278.331
5	J = 5	-2055.68	-48.7725	196.889
6	I = 5	2133.3	97.1803	191.208
6	J = 6	-2133.3	-97.1803	479.196

NOTE: Positive nodal forces correspond to positive local axes

=====
   
= DISPLACEMENTS OF NODES =
   
=====

StC-dr1: OBOSTRANO UKLJESTEN DVOSPRATNI OKVIR
   
Odredjivanje presečnih sila po teoriji II reda

Total number of load cases = 1

LOAD CASE: koncentrisane sile u tackama B, C i D (cvorovi 2, 3 i 4)

Node	xn[m]	yn[m]	zp[rad]
1	8.56561e-015	-1.55509e-013	-4.03491e-014
2	0.0866885	-0.00311116	-0.0203121
3	0.199236	-0.0063517	-0.0146054
4	0.199033	-0.00698163	-0.0145918
5	0.0864868	-0.0035555	-0.0203074
6	8.0958e-015	-1.77719e-013	-3.99204e-014

NOTE: Positive nodal displacements correspond to positive global axes

Резултати добијени применом програма ALIN упоређени су са резултатима који се добијају коришћењем програма MASTAN2 [34] и комерцијалног софтвера TOWER 6 [35]. Важно је напоменути да ови програми користе приближно решење диференцијалне једначине савијања, тј. њихов прорачун се базира на примени геометријске матрице крутости. Зато је потребно дуж једног штапа прогустити мрежу коначних елемената да би се добила тачна решења. Тако су овом случају стубови или греде подељени на мање сегменте (дужине 1m).

Упоредни резултати прорачуна коришћењем програма ALIN, као и применом софтвера MASTAN2 и TOWER 6, према теорији другог реда, дати су табели 4.4. У њој су упоређени резултати за аксијалну силу и моменат савијања у свим стубовима оквирног носача приказаног на слици 4.3.

табела 4.4 Вредности момента савијања и аксијалне силе анализираних оквира

стуб	чвор	моменат савијања [kNm]			аксијална сила [kN]		
		ALIN	MASTAN2	TOWER6	ALIN	MASTAN2	TOWER6
1	1	484.34	483.3	485.4	1886.70	1867	1866
	2	191.58	191.9	191.7	-1886.70	-1867	-1866
2	2	196.55	193.6	197.5	1944.32	1943	1944
	3	278.42	276.0	279.6	-1944.32	-1943	-1944
6	6	479.20	476.5	481.3	-2133.30	-2132	-2134
	5	191.21	189.9	191.6	2133.30	2132	2134
5	5	196.89	195.9	198.2	-2055.68	-2054	-2056
	4	278.33	276.6	279.6	2055.68	2054	2056

Из претходне табеле може да се уочи да програм ALIN даје практично идентичне резултате као и програми MASTAN2 и TOWER 6. Разлике у резултатима су јако мале (до 1%) и даљим прогушћавањем мреже коначних елемената при коришћењу комерцијалног програма и оне би практично нестале.

У случају када се у MASTAN2-у и TOWER-у цео стуб односно греда посматра као један елемент, тј. када се не изврши њихова подела на мање сегменте, ове грешке у вредностима сила у пресеку су реда величине 10-20%. Исти закључак је добијен и у приказаним нумеричким примерима у делу 3.1.

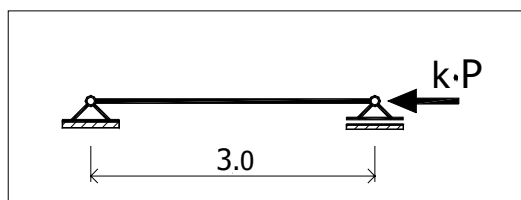
Зато се још једном наглашава предност програма ALIN који се користи у овом раду у односу на комерцијалне програме. Та предност је у томе да при прорачуну

конструкције по теорији другог реда није потребно водити рачуна о подели елемената на мање сегменте и колико та подела мора да буде „густа“, већ се греде и стубови могу третирати као један елемент. Разлог томе је, као што је већ наглашено у теоријским разматрањима, што програм ALIN користи тачно решење за матрицу крутости и вектор еквивалентног оптерећења.

У случају прорачуна према теорији првог реда, такође су добијени готово идентични резултати применом програма ALIN и програма MASTAN2 и TOWER 6. У том случају је нпр. моменат у укљештењу (чворови 1 и 6) има вредност 349.7 (односно 351.2 kNm) што је разлика око 30% у односу на приказани прорачун према теорији другог реда.

#### 4.4.2 АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ ПОЈЕДИНАЧНОГ ШТАПА

Контрола стабилности помоћу програма ALIN обављена је на најједноставнијим примерима за које су решења добро позната, а то су тзв. основни Ојлерови случајеви стабилности. Сложенији случајеви који се односе на стабилност оквирних носача приказани су у поглављу 5. На сликама 4.4 и 4.5 приказани су прва два Ојлерова случаја која ће овде бити разматрана.



слика 4.4 Проста греда оптерећена аксијалном силом притиска

Као што је већ наглашено, у програму ALIN концентрисано оптерећење је могуће унети у функцији фактора (који је реалан број), и он је у овим примерима на сликама 4.4 и 4.5 означен са  $k$ . То је урађено због тога да би се лакше приказивало решавање проблема стабилности код оквира који су оптерећени са више сила, као нпр.  $P$ ,  $2P$ ,  $4P$  и слично.

Претпоставља се да су приказани штапови од бетона са модулом еластичности  $E=3 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>, и квадратног су попречног пресека димензија 10/10cm, са моменатом инерције  $I=8.33 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>.

За први Ојлеров случај (проста греда) датотека (Ojler-1.xml) са улазним подацима за анализу стабилности, тј. одређивање критичне силе у еластичној области гласи:

```

<ALIN>
  <System>
    <title> PRVI OJLEROV SLUCAJ </title>
    <title> Odredjivanje kritичnog opterećenja </title>
    <Control>
      <OutFile>Ojler-1</OutFile>
      <Object>SIMPLE</Object>
      <Analysis>STABILITY</Analysis>
      <StabAnal>CRITICAL</StabAnal>
      <StabStiff>EXACT</StabStiff>
      <PlaneStiff>SIX</StabStiff>
    </Control>
  </System>
  <Property>
    <!-- Podaci o materijalima i poprecnim presecima -->
    <Material>
      <Mat_Type>CONCRETE</Mat_Type>
      <Default>Yes</Default>
    </Material>
    <Section>
      <Rectangle>
        <Rect_Name>GREDA</Rect_Name>
        <Rect_Numb>1</Rect_Numb>
        <Dim_A>0.10</Dim_A>
        <Dim_B>0.10</Dim_B>
      </Rectangle>
    </Section>
  </Property>
  <!-- Podaci o cvorovima -->
  <Nodes>
    <Joint Number="1" X="0.0" Y="0.0" Name="Oslonac A"/>
    <Joint Number="2" X="3.0" Y="0.0" Name="Oslonac B"/>
    <!-- Oslonci A i B su nepokretan i pokretan oslonac -->
    <Boundary Node="1" UX="1" UY="1"/>
    <Boundary Node="2" UY="1"/>
  </Nodes>
  <!-- Podaci o konacnim elementima -->
  <Elements>
    <Beam Beam_No="1" I="1" J="2" Mat="1"
    SecType="RECT" Sec="1" Name="Greda"/>
  </Elements>
  <!-- Opterećenje -->
  <Loading>
    <LoadCase>
      <Name>Koncentrisane sila u tacki B </Name>
      <Number>1</Number>
      <Conc Node="2" LType="1" FX="-100.0" aFX="1.5"/>
    </LoadCase>
  </Loading>
</ALIN>

```

Одавде се види да је у овом примеру задата концентрисана сила  $P=100$  kN, са фактором  $k=1.5$ , па је укупна аксијална сила у штапу  $k \cdot P = 1.5 \cdot 100 = 150$  kN.

Код прорачуна критичне силе, излазна датотека (Ojler-1.txt) садржи поред улазних података и вредности аксијалне силе у стубовима, као и фактор критичног оптерећења (Load Factor) чије израчунавање је и био циљ ове анализе.

```

=====
                          PROGRAM ALIN
          STATIC, DYNAMIC and STABILITY ANALYSIS of FRAME STRUCTURES
=====
(1) SYSTEM INFORMATION
-----
(1.1) TITLES
      Prvi ojlerov slucaj
      odredjivanje kritичnog opterecenja

(1.2) CONTROL INFORMATION
-----
- Problem SPACE           = 2D
- OBJECT to consider     = SIMPLE
- ANALYSIS type          = STABILITY
  (based on EXACT stiffness)
- STIFFNESS matrix      = u, v, fi
- STRUCTURE type        = FRAME
- ELEMENTS type         = BEAM elements
- CROSS-SECTION         = only FULL
- MATERIAL type         = CONCRETE

(1.3) CONTROL NUMBERS
-----
- Different Sections      = 1
- Different Materials    = 1]
- Number of Finite Elements = 1
  Beam Elements         = 1

(2) INFORMATION ABOUT MATERIALS
=====
Material Mat Material Modulus E Ni Gamma Rho Alpha-t
Type Num Name [kN/m2] [kN/m3] [t/m3] [1/deg. c]
=====
CONCRETE 1 Concrete 3.15e+007 0.2 25 2.54842 1.2e-005
=====

(3) INFORMATION ABOUT CROSS-SECTIONS
=====
section Sec section Area Moment I3 Moment I1 Moment I2
Type Num Name [m2] [m4] [m4] [m4]
=====
RECTANGLE 1 GREDA 0.01 8.33333e-006
=====

(4) INFORMATION ABOUT NODE LIST
      JOINT NUMBERS AND COORDINATES
=====
Joint Joint Joint C o o r d i n a t e s DOFs
Number Name x [m] Y [m] z [m] 123456
=====
1 oslonac A 0 0 0 000001
2 oslonac B 3 0 0 100001
=====
DOF = 1: active dof; DOF = 0: restrained dof

```



(5) INFORMATION ABOUT ELEMENT LIST

(5.1) BEAM ELEMENTS

Element Type	Element Name	Elem Num	Node I	Node J	Material Type	Mat Num	Section Type	Sec Num	Memb. Releases Node I	Node J
BEAM	Greda	1	1	2	CONCRETE	1	RECTANGLE	1	000000	000000

Member Release = 1: no generalized force  
 Member Release = 0: active generalized force

(6) INFORMATION ABOUT LOADING CASES

LOAD CASE no 1: Koncentrisana sila u tacki B

CONCENTRATED JOINT LOADS

Joint Number	Joint Name	Concentrated Forces and Concentrated Moments	ax	Fy [kN]	ay	Fz [kN]	az
		Fx [kN]	bx	Mx [kNm]	by	Mz [kNm]	bz
---- Force components are VARIABLE ----							
2	oslonac B	-100	1.5	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0

Note: JOINT loads are given with respect to GLOBAL system

(7) INFORMATION ABOUT LOADING COMBINATIONS

Class Loads: Load combinations are not given!

SOME OBTAINED RESULTS

= LOCAL NODAL FORCES OF ELEMENTS =

Prvi ojlerov slucaj  
 odredjivanje kritичnog opterećenja

Total number of load cases = 1

LOAD CASE: Koncentrisana sila u tacki B

BEAM ELEMENTS

Beam	Node	N[kN]	Ty[kN]	Mz[kNm]
1	I = 1	150	0	0
1	J = 2	-150	0	0

NOTE: Positive nodal forces correspond to positive local axes

STABILITY ANALYSIS

BIFURCATION OF EQUILIBRIUM CONFIGURATION

achieved for the LOAD FACTOR of 1.911

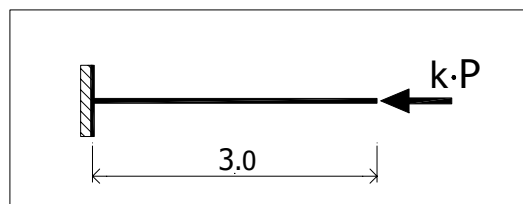
Као што се из овог текстуалног документа види, фактор критичне силе се добија 1.911. Задата аксијална сила у штапу износи  $k \cdot P = 150 \text{ kN}$ , тако да је критична сила у овом случају  $P_{cr} = 1.911 \cdot 150 = 286.65 \text{ kN}$ .

Пошто је за „основне Ојлерове случајеве стабилности“ добро позната вредност коефицијента ефективне дужине извијања, на основу ње ће бити преконтролисана вредност критичне силе која је добијена коришћењем програма ALIN. Поступак прорачуна коефицијента дужине извијања биће детаљно приказан у делу 5.2.1. У овом примеру за први Ојлеров случај се добија:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 3.15 \cdot 10^7 \cdot 8.33 \cdot 10^{-6}}{286.65 \cdot 3^2}} = 1.002$$

што практично одговара теоријској вредности  $\beta=1$ .

У наставку је приказана и контрола прорачуна критичне силе помоћу програма ALIN за други Ојлеров случај, слика 4.5. Конзола у овом примеру је истих карактеристика као и претходна проста греда (пример са слике 4.4).



слика 4.5 Конзола оптерећена аксијалном силом притиска

У односу на први Ојлеров случај, улазна датотека (Ojler-2.xml) се једино разликује у делу у коме се уносе гранични услови, као и у оптерећењу које је задато са другом вредношћу. Тако се у овом случају у оквиру блока

`<Nodes>...</Nodes>` уноси:

```
<Nodes>
  <Joint Number="1" X="0.0" Y="0.0" Name="Oslonac A"/>
  <Joint Number="2" X="3.0" Y="0.0" Name="Tacka B"/>
  <!-- Oslonac A je ukljestenje -->
  <Boundary Node="1" UX="1" UY="1" RZ="1"/>
</Nodes>
```

Оптерећење је задато као концентрисана сила  $P=100$  kN, помножена са фактором  $k=0.5$ , тако да је укупна аксијална сила у штапу  $k \cdot P = 50$  kN.

```
<Conc Node="2" LType="1" FX="-100.0" aFX="0.5"/>
```

Конечан резултат прорачуна у виду фактора критичног оптерећења (Load Factor) из излазне датотеке (Ojler-2.txt) је дат у наставку.

SOME OBTAINED RESULTS

=====

= LOCAL NODAL FORCES OF ELEMENTS =

=====

OJLER 2  
 Kritično opterećenje  
 Drugi oјlerov slucaј

Total number of load cases = 1

LOAD CASE: Koncentrisana sila u tacki B

=====

BEAM ELEMENTS

Beam	Node	N[kN]	Ty[kN]	Mz[kNm]
1	I = 1	50	0	0
1	J = 2	-50	0	0

NOTE: Positive nodal forces correspond to positive local axes

STABILITY ANALYSIS

BIFURCATION OF EQUILIBRIUM CONFIGURATION

achieved for the LOAD FACTOR of 1.431

Фактор критичне силе је добијен 1.431. Критична сила у овом примеру према томе износи:  $P_{cr} = 1.431 \cdot 50 = 71.55 \text{ kN}$ .

Као и у претходном примеру, и овде је израчунат коефицијент ефективне дужине

$$\text{извијања: } \beta_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 3.15 \cdot 10^7 \cdot 8.33 \cdot 10^{-6}}{71.55 \cdot 3^2}} = 2.004,$$

који је и у овом случају јако близак теоријској вредности за други Ојлеров случај стабилности  $\beta=2$ .

Из ових примера се јасно закључује да програм ALIN даје тачне вредности при прорачуну критичног оптерећења носача. Наравно, његова предност у односу на постојеће комерцијалне програме је у томе да при прорачуну није потребно водити рачуна о подели елемената на мање сегменте и колико та подела мора да буде „густа“, већ се греде и стубови могу третирати као један елемент. Разлог томе је, као што је већ наглашено у теоријским разматрањима, то што се при формирању матрице крутости користи тачно решење диференцијалне једначине извијања.

У поглављу 5, применом програма ALIN, кроз бројне нумеричке примере анализираће се стабилност раванских оквирних носача, како у еластичној, тако и у нееластичној области.

## **5. ИСТРАЖИВАЊЕ СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА ПРИМЕНОМ ПРОГРАМА ALIN**

### **5.1. ПОНАШАЊЕ ОКВИРНИХ КОНСТРУКЦИЈА У ЕЛАСТО- ПЛАСТИЧНОЈ ОБЛАСТИ**

Прорачун стабилности оквирних носача у еласто-пластичној области, због своје сложености, није заступљен у свакодневним инжењерским прорачунима. Зато се ни у постојећим стандардима не тражи овај вид прорачуна. Наиме, одређивање критичне силе, односно критичног напона у пластичној области за штапове оквирног носача обавља се на бази прорачуна у еластичној области и коришћењем емпиријских израза и криви које су добијене на основу бројних експерименталних истраживања понашања изолованих штапова у пластичној области. Овде ће се показати да се применом програма ALIN може обавити успешно прорачун стабилности оквирних носача и у еласто-пластичној области. То са једне стране омогућује инжењерима да коришћењем оваквих компјутерских програма могу повећати тачност својих прорачуна и сагледати стварно понашање оквирних носача у еласто-пластичној области. Са друге стране, примена овог начина прорачуна треба да представља импулс за осавремењивање постојећих стандарда у делу који се односи на нееластично понашање рамовских конструкција.

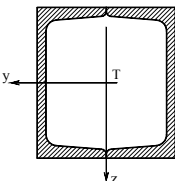
У наставку приказаће се неколико карактеристичних нумеричких примера.

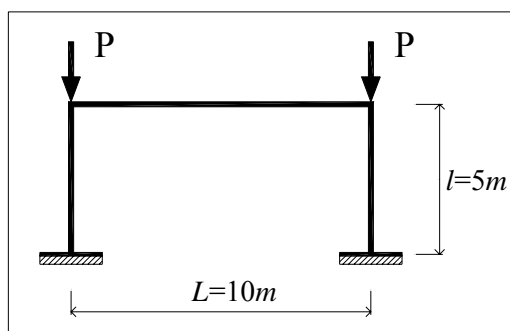
#### **5.1.1 ЈЕДНОСПРАТНИ ОКВИР СА ПОМЕРЉИВИМ ЧВОРОВИМА**

Прво је анализиран најједноставнији статички систем – једноспратни оквир са два реда стубова (тј. једним распоном) и померљивим чворовима, који је укљештен и оптерећен једнаким аксијалним силама притиска у оба стуба, слика 5.1. У оквиру теоријског приказа прорачуна критичне силе оквирних носача у нееластичној области (део 3.2), детаљно је приказан прорачун једног оваквог носача. Сада ће се

нумеричка анализа обавити применом програма ALIN. За стубове и греде ових оквира биће усвојено неколико различитих попречних пресека, сличних онима који су коришћени при теоријској анализи ових проблема у делу 3.2. Тако је узет дводелни попречни пресек који се састоји из два  $\Gamma$  пресека који је остварен заваривањем и са карактеристикама одређеним из [36], табела 5.1:

табела 5.1 Карактеристике анализираних попречних пресека стубова

	2 $\Gamma$ 8	$A = 0.0022 \text{ m}^2$	$I = 0.00000243 \text{ m}^4$
	2 $\Gamma$ 12	$A = 0.0034 \text{ m}^2$	$I = 0.00000604 \text{ m}^4$
	2 $\Gamma$ 16	$A = 0.0048 \text{ m}^2$	$I = 0.00001213 \text{ m}^4$
	2 $\Gamma$ 20	$A = 0.0064 \text{ m}^2$	$I = 0.00002237 \text{ m}^4$
	2 $\Gamma$ 26	$A = 0.0097 \text{ m}^2$	$I = 0.00004893 \text{ m}^4$



слика 5.1 Нумерички пример - једносратни оквир са померљивим чворовима

За све оквирне носаче у овој анализи усвојено је да су од челика са карактеристикама:  $E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$  и  $\sigma_v = 240,000 \text{ kN/m}^2$ . Из израза за тангентни модул (3.40) израчунава се вредност напона на граници пропорционалности:  $\sigma_p = 0.5 \cdot \sigma_v = 120,000 \text{ kN/m}^2$ . Овај однос напона у граници пропорционалности препоручује се у [21] - [23], [37]- [39]. Треба напоменути да у литератури могу да се нађу и друге препоруке, тако да је код [24], [36] дата већа вредност напона  $\sigma_p$ , а у [40] се препоручује и мањи однос  $\sigma_p / \sigma_v$ .

У првом примеру је разматрано да је попречни пресек греда и стубова 2  $\Gamma$ 12. Применом програма ALIN добијена је критична сила на основу које је израчунато да се извијање његових стубова дешава у еластичној области:

$$P_{cr,el} = 305.694 \text{ kN} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{305.694 \text{ kN}}{0.0034 \text{ m}^2} = 89910 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} < \sigma_p = 120000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \text{ па се добија}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 6.035 \cdot 10^{-6}}{305.694 \cdot 5^2}} = 1.279 \Rightarrow l_0 = \beta \cdot l = 6.395 \text{ m}$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 0.0421 \text{ m} \Rightarrow \lambda = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{6.395}{0.0421} = 151.90$$

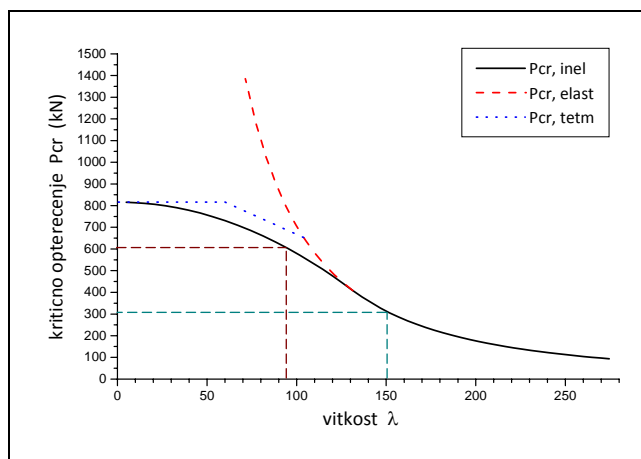
Међутим уколико би се повећала крутост стубова, на пример смањивањем њихове висине, добило би се да се они извијају у пластичној области. Тако, ако се за оквир са слике 5.1 усвоји да је висина стубова нпр.  $l=3\text{m}$ , онда се добија:

$$P_{cr,el} = 710.56 \text{ kN} \Rightarrow \sigma_{cr} = 208989 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} > \sigma_p = 120000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} .$$

Тако је потребно да се израчуна и нееластична критична сила:

$$P_{cr,inel} = 602.12 \text{ kN} \text{ и тангентни модул } E_t = 162459701 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}, \text{ па је тада } \lambda = 95.15 .$$

Даљом варијацијом крутости, која је обављена применом програма ALIN може да се добије зависност критичног оптерећења носача и виткости стубова. Добијени резултати су приказани у виду дијаграма на слици 5.2. На дијаграму су посебно обележени резултати за два наведена примера.

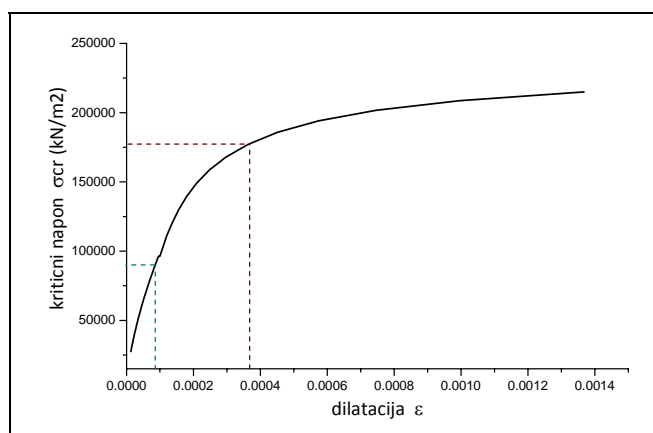


слика 5.2  $P_{cr} - \lambda$  дијаграм за анализирани једносратни оквир

На овој слици су резултати еластопластичне анализе приказани пуном линијом. У случају еластичне анализе, где је модул еластичности све време константан, зависност критичне силе и виткости је приказана испрекиданом линијом. На крају, тачкастом линијом је приказана Tetmauer-ова линеарна веза која је раније

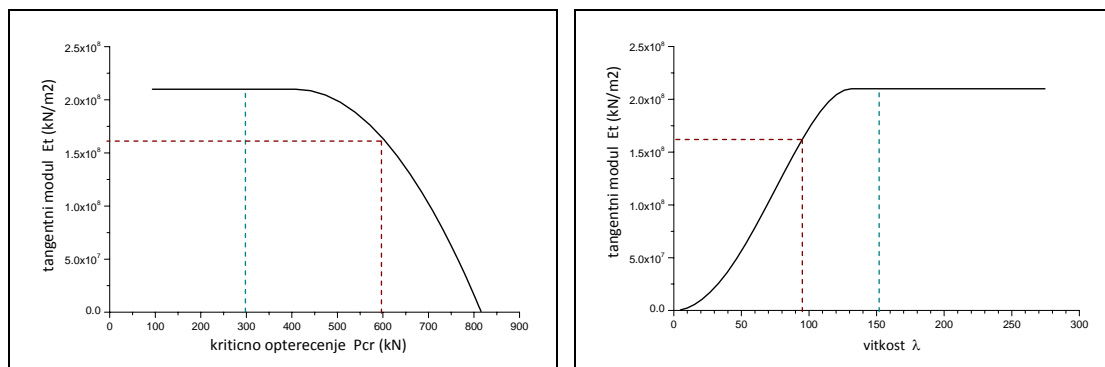
објашњена (слика 3.7). Из ових резултата, добијених применом програма ALIN, види се сврсисходност примене еласто-пластичне анализе, поготово код носача са малом виткошћу. Такође, уочава се да су резултати оваквог прорачуна на страни сигурности када се пореде са емпиријским Tetmajer-овим решењима.

У наставку је, на слици 5.3, дата зависност критичног напона и дилатације код анализираниог примера. Уочава се да је у почетку она линеарна, тј. модул еластичности је константан, док је касније при већем критичном оптерећењу, односно мањој виткости стубова веза је нелинеарна. На слици су посебно назначени резултати два наведена случаја.



слика 5.3  $\sigma_{cr} - \epsilon$  дијаграм за анализирани једносратни оквир

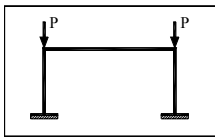
На слици 5.4 су дати зависност тангентног модула у стубовима у односу на критично оптерећење, као и у односу на виткост стубова. Ова два дијаграма „потврђују“ претходно запажање о вредностима модула еластичности и тангентног модула. Још једном треба нагласити да ови дијаграми представљају графички приказ решења која су добијена применом програма ALIN.



слика 5.4  $E_t - P_{cr}$  и  $E_t - \lambda$  дијаграми за анализирани једносратни оквир

Резултати еласто-пластичне анализе стабилности у случају када се мења попречни пресек стубова дати су у табели 5.2. Приказане су вредности критичне силе и тангентног модула у тренутку извијања за свих пет анализираних попречних пресека.

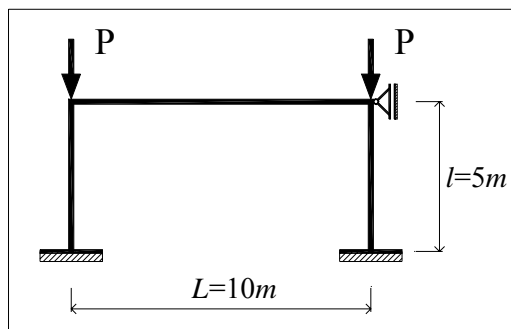
табела 5.2 Резултати  $P_{cr}$  и  $E_t$  за анализираних примера једносратног оквира

	2[8]	$P_{cr,el} = 123.32 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[12]	$P_{cr,el} = 305.69 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[16]	$P_{cr,inel} = 612.76 \text{ kN}$	$E_t = 209,144,838 \text{ kN/m}^2$
	2[20]	$P_{cr,inel} = 1040.01 \text{ kN}$	$E_t = 184,894,168 \text{ kN/m}^2$
	2[26]	$P_{cr,inel} = 1843.93 \text{ kN}$	$E_t = 136,830,853 \text{ kN/m}^2$

Из табеле 5.2 се види да се у случајевима када су елементи носача састављени од „мекших“ попречних пресека, извијање носача се дешава у еластичној области. Наиме, у случајевима стубова са мањом димензијом попречног пресека критични напон у тренутку извијања је мањи од напона на граници пропорционалности па се извијање дешава у еластичној области. У случају у еластичне анализа стубова са већим димензијама попречних пресека критична сила при извијању тако расте да се добија да је  $\sigma_{cr} > \sigma_p$  и неопходно је обавити анализу извијања у нееластичној области.

### 5.1.2 ЈЕДНОСПРАТНИ ОКВИР СА НЕПОМЕРЉИВИМ ЧВОРОВИМА

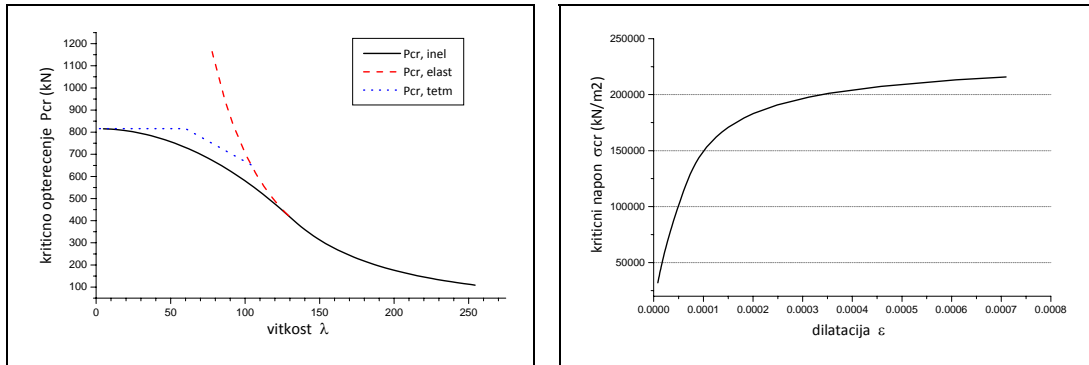
У следећем примеру је извршена анализа истог једносратног оквира, само са непомерљивим чворовима (слика 5.5). Карактеристике попречних пресека, као и материјала су усвојене као и у претходном примеру.



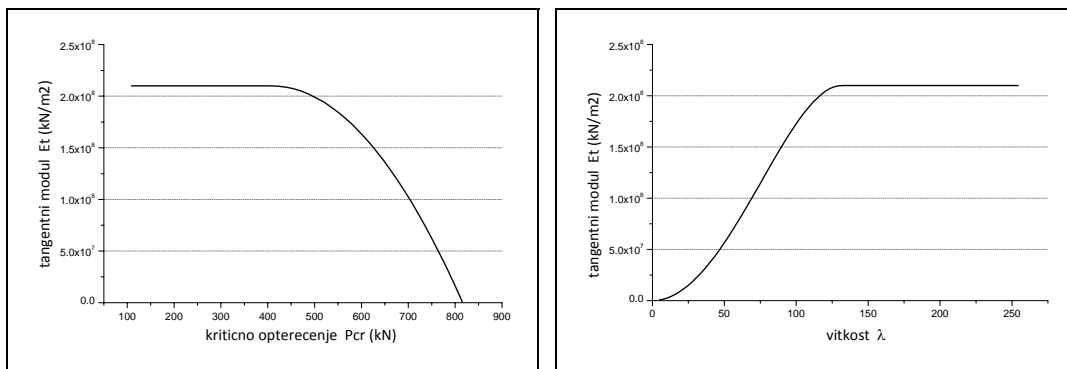
слика 5.5 Нумерички пример - једносратни оквир са непомерљивим чворовима



Варијацијом крутости стубова као и у примеру 5.1.1, добијају се исти облици зависности између критичног оптерећења, виткости, тангентног модула и дилатација као и код једносратног оквира са померљивим чворовима. Ови графици су приказани на сликама 5.6 и 5.7.



слика 5.6  $P_{cr} - \lambda$  и  $\sigma_{cr} - \epsilon$  дијаграми за анализирани једносратни оквир



слика 5.7  $E_t - P_{cr}$  и  $E_t - \lambda$  дијаграми за анализирани једносратни оквир

У табели 5.3 дате су вредности критичне силе и тангентног модула еластичности за пет разматраних попречних пресека, које су израчунати применом програма ALIN.

табела 5.3 Резултати  $P_{cr}$  и  $E_t$  за анализирани примере једносратног оквира

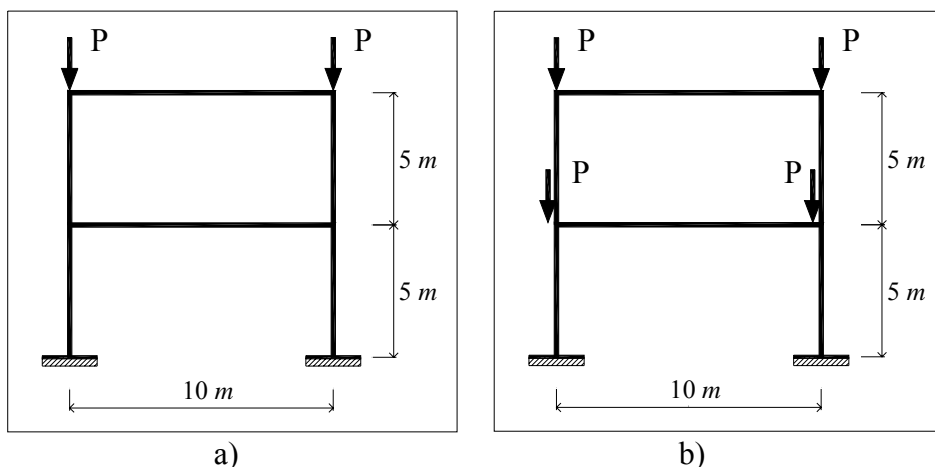
	2[8]	$P_{cr,inel} = 383.51 \text{ kN}$	$E_t = 166,964,465 \text{ kN/m}^2$
	2[12]	$P_{cr,inel} = 683.95 \text{ kN}$	$E_t = 113,937,480 \text{ kN/m}^2$
	2[16]	$P_{cr,inel} = 1028.22 \text{ kN}$	$E_t = 80,561,060 \text{ kN/m}^2$
	2[20]	$P_{cr,inel} = 1431.90 \text{ kN}$	$E_t = 57,250,158 \text{ kN/m}^2$
	2[26]	$P_{cr,inel} = 2210.13 \text{ kN}$	$E_t = 37,396,944 \text{ kN/m}^2$

Из ових резултата се види да се код једносратних оквира са непомерљивим чворовима извијање, практично увек, дешава у пластичној зони. У поређењу са померљивим оквирним носачима, ово је и очекивано собзиром на знатно већу крутост овог статичког система.

У наставку ће бити анализирани и сложенији статички системи, тачније оквири са два и шест спратова.

### 5.1.3 ДВОСПРАТНИ ОКВИРИ СА ПОМЕРЉИВИМ ЧВОРОВИМА

Прво је приказана анализа двосратног оквира који је оптерећен само аксијалним силама у стубовима у нивоу горње етаже, а чија је геометрија приказана на слици 5.8 а).



слика 5.8 Нумерички пример - двоспратни оквир са померљивим чворовима

С обзиром на константну аксијалну силу дуж стубова оба спрата, резултати еласто-пластичне анализе стабилности у овом примеру су заједнички за горње и доње стубове и приказани су у табели 5.4.

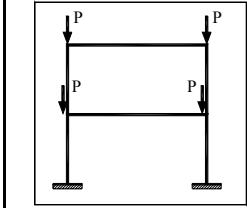
табела 5.4 Вредности  $P_{cr}$  и  $E_t$  за оквир са слике 5.8 а)

	2[8]	$P_{cr,el} = 73.72 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[12]	$P_{cr,el} = 182.75 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[16]	$P_{cr,el} = 367.31 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[20]	$P_{cr,el} = 677.01 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[26]	$P_{cr,inel} = 1442.22 \text{ kN}$	$E_t = 197,481,628 \text{ kN/m}^2$

Очигледно је да се код оваквог типа носача и оптерећења извијање пре свега дешава у еластичној области, док се само у случајевима велике крутости попречних пресека извијање носача дешава у пластичној области.

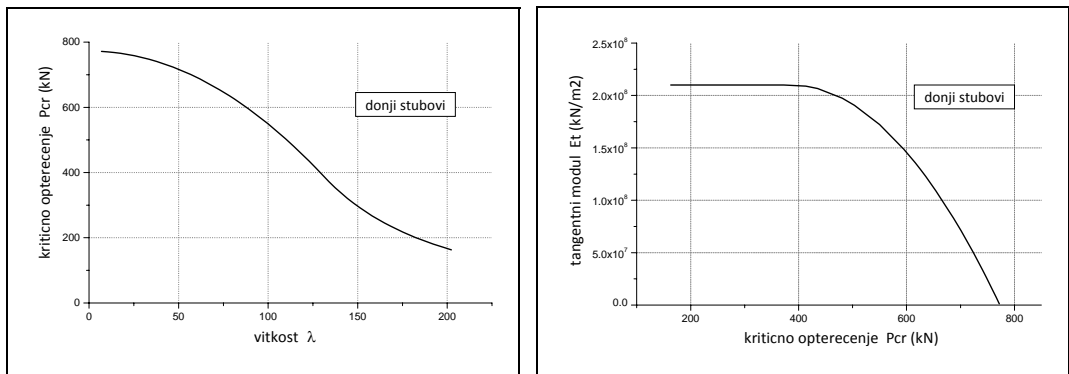
Други случај који се анализира је носач са слике 5.8 b) код кога се оптерећење делује на сваком спрату. С обзиром да аксијална сила у стубовима више није константна, при еласто-пластичној анализи стабилности може доћи до различитог понашања стубова у горњем и доњем спрату. У табели 5.5 су посебно дате вредности за  $E$ , односно  $E_t$  у стубовима горње и доње етаже у случајевима када се извијање дешава у нееластичној области.

табела 5.5 Вредности  $P_{cr}$  и  $E_t$  за оквир са слике 5.8 b)

	2 [ 8	$P_{cr,el} = 53.72 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2 [12	$P_{cr,el} = 133.16 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2 [16	$P_{cr,el} = 267.61 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2 [20	$P_{cr,inel} = 480.29 \text{ kN}$	$E_{t,gor} = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$ $E_{t,dol} = 197,600,555 \text{ kN/m}^2$
	2 [26	$P_{cr,inel} = 902.35 \text{ kN}$	$E_{t,gor} = 199,690,249 \text{ kN/m}^2$ $E_{t,dol} = 144,881,287 \text{ kN/m}^2$

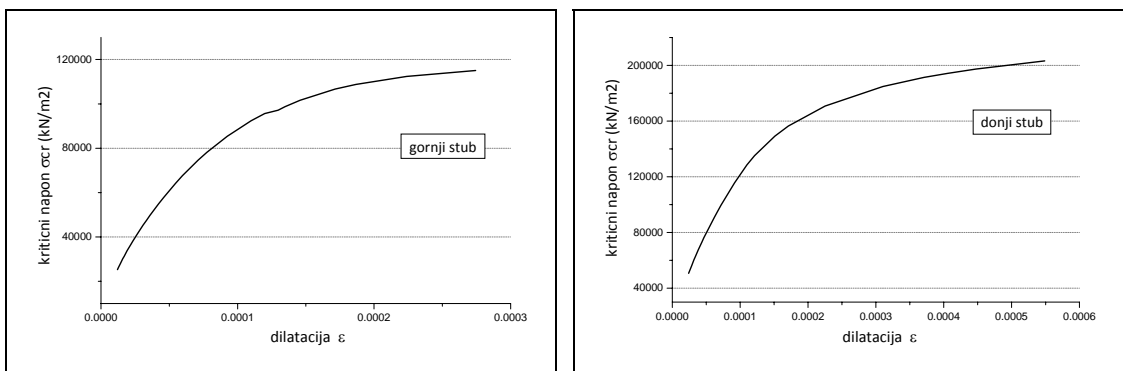
Из резултата који су дати у табели 5.5 види се да се код „мањих“ попречних пресека извијање дешава у еластичној области. У случају када се анализира носач са попречним пресеком стубова и греда 2 [20, при „еластичној“ анализи стабилности добија се да је у доњем стубу критичан напон прекорачио границу пропорционалности, док је код горњег стуба критични напон испод те границе. Тако је у програму ALIN за горње стубове коришћен константан модул еластичности, док је у доњој етажи прорачун обављен са тангентним модулом чија је вредност у тренутку извијања дата у табели 5.5. Код случаја са „најкрућим“ попречним пресеком 2 [26, добијено је да се и горњи и доњи стубови извијају у пластичној зони.

На крају анализе варирана је промена крутости стубова за случај попречног пресека 2 [20. На слици 5.9 приказани су добијени дијаграми промене вредности критичног оптерећења у односу на виткост и тангентни модул стубова у доњој етажи.



слика 5.9  $P_{cr} - \lambda$  и  $E_t - P_{cr}$  дијаграми за анализирани двоспратни оквир

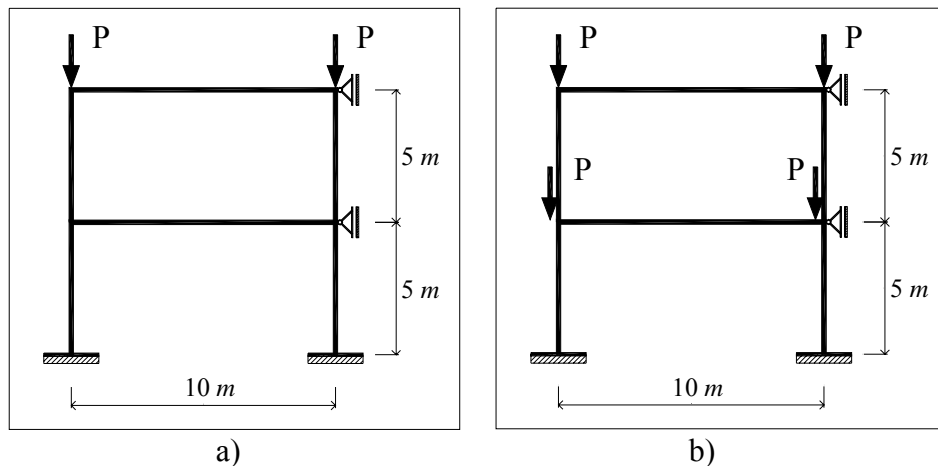
Дијаграми  $\sigma_{cr} - \epsilon$  дати су на слици 5.10 и то посебно за стубове на горњој и доњој етажи.



слика 5.10  $\sigma_{cr} - \epsilon$  дијаграми за горње и доње стубове двоспратног оквира

#### 5.1.4 ДВОСПРАТНИ ОКВИРИ СА НЕПОМЕРЉИВИМ ЧВОРОВИМА

И у случају двоспратног оквира са непомерљивим чворовима анализирани су носачи са два типа оптерећења. Прво ће бити приказани резултати код оквира са константном аксијалном силом у стубовима, а после тога и са скоковитим оптерећењем, као што је приказано на слици 5.11.



слика 5.11 Нумерички пример - двоспратни оквир са непомерљивим чворовима

У случају носача чији су стубови оптерећени само на врху горње етаже, резултати добијени применом програма ALIN приказани су у табели 5.6.

табела 5.6 Вредности  $P_{cr}$  и  $E_t$  за оквир са слике 5.11 а)

	2 [ 8	$P_{cr,inel} = 306.47 \text{ kN}$	$E_t = 204,565,295 \text{ kN/m}^2$
	2 [12	$P_{cr,inel} = 611.63 \text{ kN}$	$E_t = 157,690,268 \text{ kN/m}^2$
	2 [16	$P_{cr,inel} = 961.19 \text{ kN}$	$E_t = 116,087,298 \text{ kN/m}^2$
	2 [20	$P_{cr,inel} = 1372.96 \text{ kN}$	$E_t = 83,345,927 \text{ kN/m}^2$
	2 [26	$P_{cr,inel} = 2160.31 \text{ kN}$	$E_t = 53,373,173 \text{ kN/m}^2$

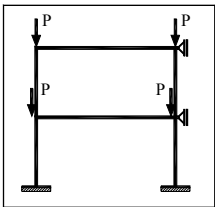
Као и у претходним случајевима, прорачун је спроведен за свих пет попречних пресека који се анализирају у овом раду. Очигледно је да у свим случајевима до извијања долази у пластичној области, тако да су у претходној табели поред критичних сила дате и вредности тангентног модула у тренутку извијања.

Поређењем ових резултата са онима добијеним у анализи двоспратних оквира са померљивим чворовима јасно се поново показало да је феномен извијања у пластичној области знатно заступљенији код непомерљивих оквира. Наиме, јасно је да оквири са непомерљивим чворовима имају знатно већу критичну силу извијања у односу на оквире са померљивим чворовима. Самим тиме је и у свим анализираним примерима, при еластичној анализи, критични напон у аксијално оптерећеним стубовима непомерљивог оквира већи од границе

пропорционалности. Зато се код њих и дешава да се извијање догоди у нееластичној области.

И за двоспратне непомерљиве оквире рачунат је случај када аксијалне силе у стубовима делују на врховима обе етаже (слика 5.11 b). Резултати су дати у табели 5.7.

табела 5.7 Вредности  $P_{cr}$  и  $E_t$  за оквир са слике 5.11 b)

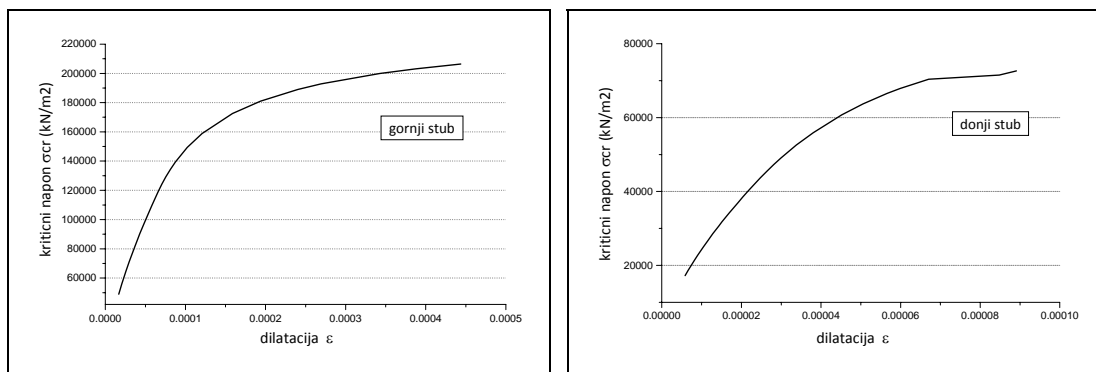
	2 [ 8	$P_{cr,inel} = 198.18 \text{ kN}$	$E_{t,gor} = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$ $E_{t,dol} = 157,213,246 \text{ kN/m}^2$
	2 [12	$P_{cr,inel} = 353.59 \text{ kN}$	$E_{t,gor} = 206,265,294 \text{ kN/m}^2$ $E_{t,dol} = 97,081,764 \text{ kN/m}^2$
	2 [16	$P_{cr,inel} = 526.83 \text{ kN}$	$E_{t,gor} = 208,469,706 \text{ kN/m}^2$ $E_{t,dol} = 65,585,076 \text{ kN/m}^2$
	2 [20	$P_{cr,inel} = 727.41 \text{ kN}$	$E_{t,gor} = 209,275,555 \text{ kN/m}^2$ $E_{t,dol} = 46,439,176 \text{ kN/m}^2$
	2 [26	$P_{cr,inel} = 1114.44 \text{ kN}$	$E_{t,gor} = 209,686,900 \text{ kN/m}^2$ $E_{t,dol} = 31,182,384 \text{ kN/m}^2$

И овде се извијање углавном обавља у нееластичној области. У горњим и доњим стубовима у тренутку извијања добијају се различите вредности тангентног модула.

Различито понашање горњих и доњих стубова при извијању у пластичној области може да се јави и код константне аксијалне силе у стубовима оба спрата, али у случају када су ти стубови различитих карактеристика. Зато је анализиран двоспратни оквир са непомерљивим чворовима (слика 5.11 a), код кога је усвојено да је попречни пресек стубова доње етаже 2 [26 ( $A = 0.0097 \text{ m}^2$ ,  $I = 0.00004893 \text{ m}^4$ ), а горње етаже су 2 [12 ( $A = 0.0034 \text{ m}^2$ ,  $I = 0.00000604 \text{ m}^4$ ).

За критично оптерећење је добијен резултат  $P_{cr,inel} = 679.969 \text{ kN}$ . При томе се се горњи стуб, који је знатно „мекши“, извија у пластичној области ( $E_t = 116,688,029 \text{ kN/m}^2$ ), док доњи остаје у еластичној области са константним модулом еластичности ( $E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$ ).

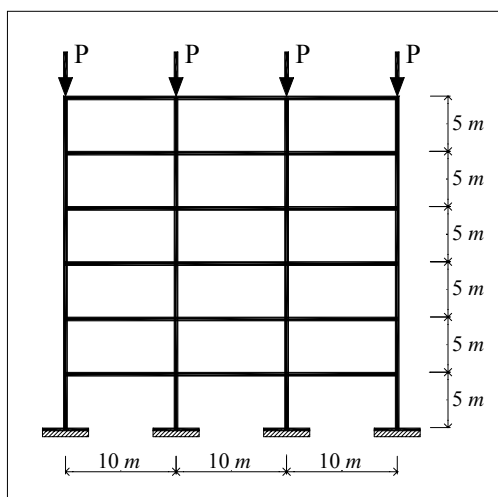
За тај пример је варирана крутост стуба (смањивањем и повећавањем њихове висине), како би се добиле зависности између карактеристичних величина као и у претходним случајевима. Дијаграми  $\sigma_{cr} - \epsilon$  за стубове на горњој и доњој етажи дати су на слици 5.12.



слика 5.12  $\sigma_{cr} - \epsilon$  дијаграми за горње и доње стубове двоспратног оквира

### 5.1.5 ШЕСТОСПРАТНИ ОКВИРИ СА ПОМЕРЉИВИМ ЧВОРОВИМА

На крају ове нумеричке анализе понашања оквирних конструкција у еластопластичној области, приказан је прорачун и вишеспратних оквира. Као пример таквих носача изабран је шестоспратни оквир са три поља (тј. четири реда стубова).

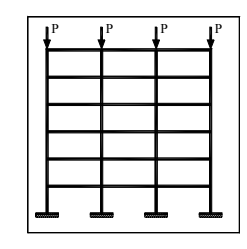


слика 5.13 Нумерички пример - шестоспратни оквир са померљивим чворовима и константном аксијалном силом

Прво је приказана анализа у случају када оптерећење делује само у највишем нивоу рама, тј. сила  $P$  делује на врху сваког стуба, слика 5.13.

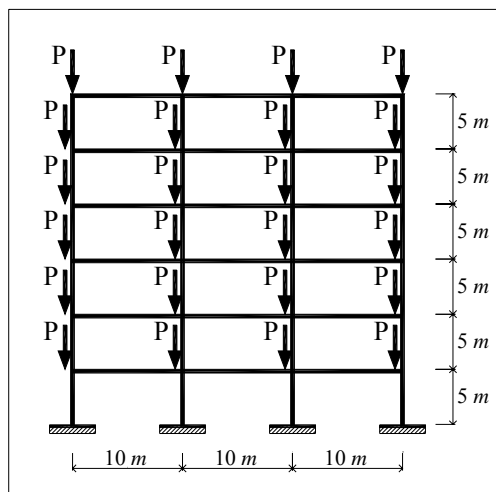
Резултати обављене нумеричке анализе у овом случају су дати у табели 5.8.

табела 5.8 Вредности  $P_{cr}$  и  $E_t$  за оквир са слике 5.13

	2[8]	$P_{cr,el} = 68.16 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[12]	$P_{cr,el} = 168.97 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[16]	$P_{cr,el} = 339.62 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[20]	$P_{cr,el} = 626.33 \text{ kN}$	$E_t = E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$
	2[26]	$P_{cr,inel} = 1369.97 \text{ kN}$	$E_t = 203,956,798 \text{ kN/m}^2$

Ови резултати потврђују запажања која су уочена и код двоспратног померљивог оквира са константним аксијалним силама у стубовима. Наиме, осим у случајевима велике крутости стубова, код оваквог типа носача и оптерећења, извијање се дешава у еластичној области.

У следећем примеру анализиран је шестоспратни носач са померљивим чворовима код кога оптерећење делује на сваком спрату, тј. аксијална сила у стубовима се скоковито повећава гледајући одозго ка доле. Овај оквирни носач приказан је на слици 5.14.

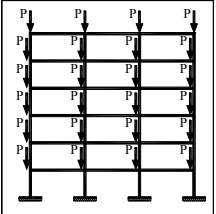


слика 5.14 Нумерички пример - шестоспратни оквир са померљивим чворовима и скоковитом аксијалном силом

Добијене вредности критичног оптерећења су дати у табели 5.9, док су вредности модула еластичности, односно тангентног модула у тренутку извијања приказани у табели 5.10. Резултати су посебно издвојени за стубове сваке од шест етажа, као и за сваки од пет изабраних попречних пресека.



табела 5.9 Вредности  $P_{cr}$  за оквир са слике 5.14

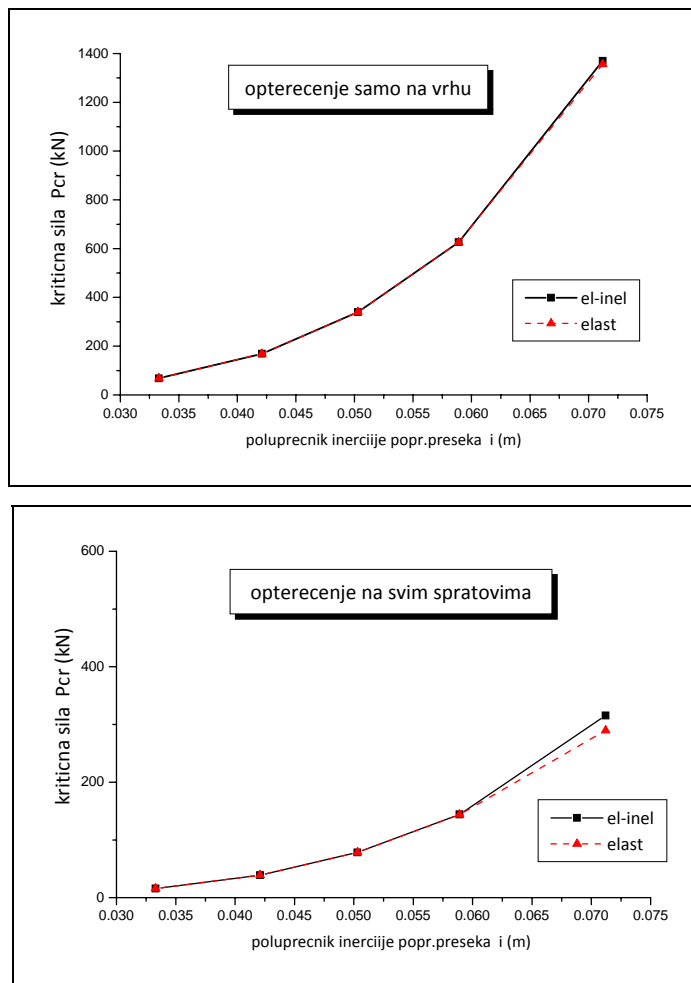
	2 [ 8	$P_{cr,el} = 15.70 \text{ kN}$
	2 [12	$P_{cr,el} = 38.92 \text{ kN}$
	2 [16	$P_{cr,el} = 78.23 \text{ kN}$
	2 [20	$P_{cr,inel} = 143.81 \text{ kN}$
	2 [26	$P_{cr,inel} = 289.63 \text{ kN}$

табела 5.10 Вредности  $E_t$  за оквир са слике 5.14

	6., 5., 4. спрат	3. спрат	2. спрат	1. спрат
2 [ 8	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$
2 [12	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$
2 [16	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$
2 [20	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E_t=207,146,069 \text{ kN/m}^2$
2 [26	$E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E_t=209,999,927 \text{ kN/m}^2$	$E_t=196,952,146 \text{ kN/m}^2$	$E_t=157,685,260 \text{ kN/m}^2$

Анализом ових резултата јасно је да се померљиви оквири изложени приказаном оптерећењу извијају у еластичној области. Тачније, за три „мекша“ попречна пресека, у тренутку достизања „еластичне“ критичне силе, ни у једном стубу није прекорачен напон на граници пропорционалности. У случају када је узето да је попречни пресек стубова 2 [20, извијање у пластичној области дешава се само у стубовима на првом спрату, док у случају попречног пресека 2 [26 то имамо и на другом и трећем спрату.

Упоредни приказ резултата прорачуна посматраног шестоспратног оквира приказаним поступком, као и класичним поступком где се модул еластичности све време држи константан, за случајеве константне и скоковито променљиве аксијалне силе, дат је на слици 5.15. На апсциси приказаних графика су нанети пет анализираних попречних пресека преко њихових полупречника инерције, док су на ординатама унете вредности добијеног критичног оптерећења.

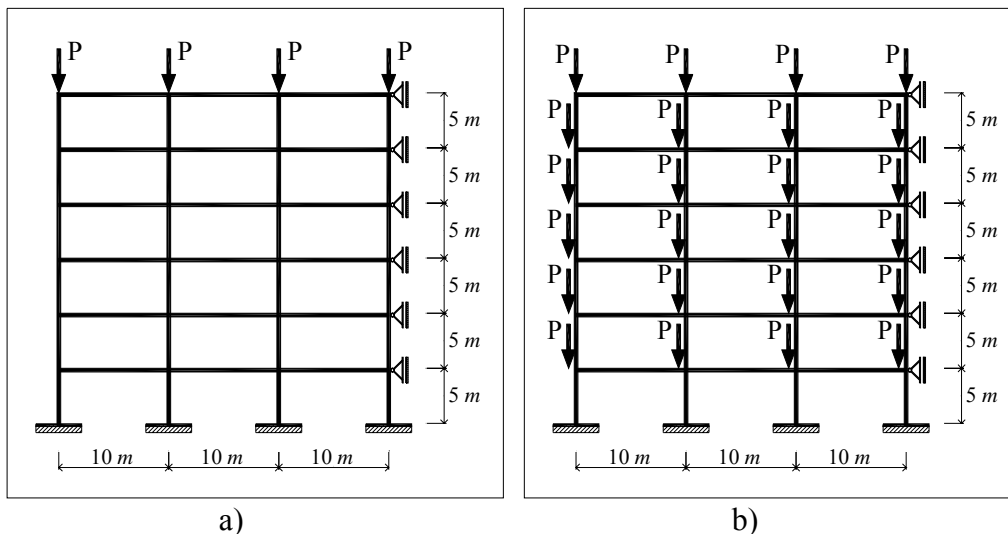


слика 5.15 Упоредни резултати за  $P_{cr}$  код еластичне и еластопластичне анализе – шестоспратни оквири са померљивим чворовима

Очигледно је да се код до сада анализираних оквирних носача са померљивим чворовима извијање доминантно дешава у еластичној области.

### 5.1.6 ШЕСТОСПРАТНИ ОКВИРИ СА НЕПОМЕРЉИВИМ ЧВОРОВИМА

И код оквира са непомерљивим чворовима приказана је анализа носача са два типа оптерећења, као што је приказано на слици 5.16. Карактеристике материјала, као и димензије стубова и греда усвојене су исте као и у досада урађеним примерима.



слика 5.16 Анализирани шестоспратни оквири са непомерљивим чворовима

У случају шестоспратног оквира код кога су аксијалне силе у стубовима константне, резултати добијени применом програма ALIN приказани су у табели 5.11.

табела 5.11 Вредности  $P_{cr}$  и  $E_t$  за оквир са слике 5.16 а)

	2[8]	$P_{cr,inel} = 267.05 \text{ kN}$	$E_t = 209,971,941 \text{ kN/m}^2$
	2[12]	$P_{cr,inel} = 573.81 \text{ kN}$	$E_t = 175,317,043 \text{ kN/m}^2$
	2[16]	$P_{cr,inel} = 927.46 \text{ kN}$	$E_t = 131,813,705 \text{ kN/m}^2$
	2[20]	$P_{cr,inel} = 1345.27 \text{ kN}$	$E_t = 94,763,117 \text{ kN/m}^2$
	2[26]	$P_{cr,inel} = 2140.01 \text{ kN}$	$E_t = 59,660,933 \text{ kN/m}^2$

Одавде је очигледно да се, за разлику од померљивих система, у овом случају систем извија у нееластичној области. Тако се током прорачуна у програму ALIN константна вредност модула еластичности замењује тангентним модулом који је у функцији нивоа оптерећења у стубовима.

За другу врсту оптерећења које делује на свакој етажи (слика 5.16 b), у табели 5.12 су посебно дати резултати за критично оптерећење, а у табели 5.13 вредности модула  $E$  и  $E_t$  у тренутку извијања. Јасно је да што су стубови крући, они примају веће оптерећење, тако да су им вредности тангентног модула мање. У табели 5.13 приказани су резултати за три најоптерећеније етаже задатог оквирног носача.

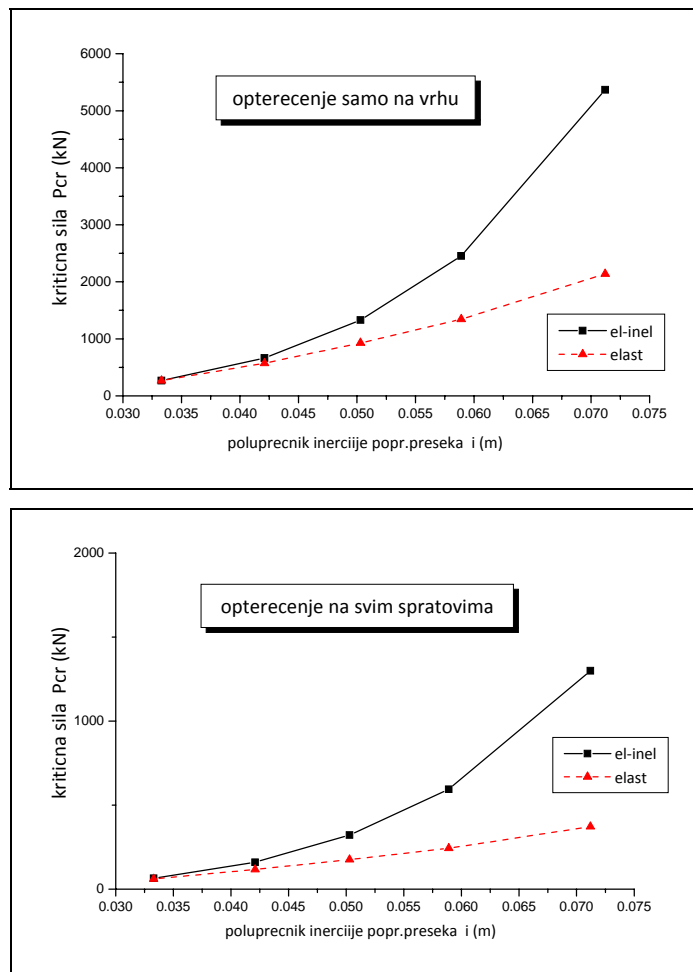
табела 5.12 Вредности  $P_{cr}$  за оквир са слике 5.16 b)

	2C8	$P_{cr,inel} = 61.10 \text{ kN}$
	2C12	$P_{cr,inel} = 116.65 \text{ kN}$
	2C16	$P_{cr,inel} = 175.87 \text{ kN}$
	2C20	$P_{cr,inel} = 242.99 \text{ kN}$
	2C26	$P_{cr,inel} = 371.98 \text{ kN}$

табела 5.13 Вредности  $E_t$  за оквир са слике 5.16 b)

	3. спрат	2. спрат	1. спрат
2C8	$E = 210,000,000 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 204,804,847 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 178,264,572 \text{ kN/m}^2$
2C12	$E_t = 205,668,274 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 171,256,295 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 102,512,698 \text{ kN/m}^2$
2C16	$E_t = 199,714,531 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 151,756,926 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 64,644,826 \text{ kN/m}^2$
2C20	$E_t = 196,053,029 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 141,258,497 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 44,940,849 \text{ kN/m}^2$
2C26	$E_t = 193,112,364 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 133,268,263 \text{ kN/m}^2$	$E_t = 30,175,286 \text{ kN/m}^2$

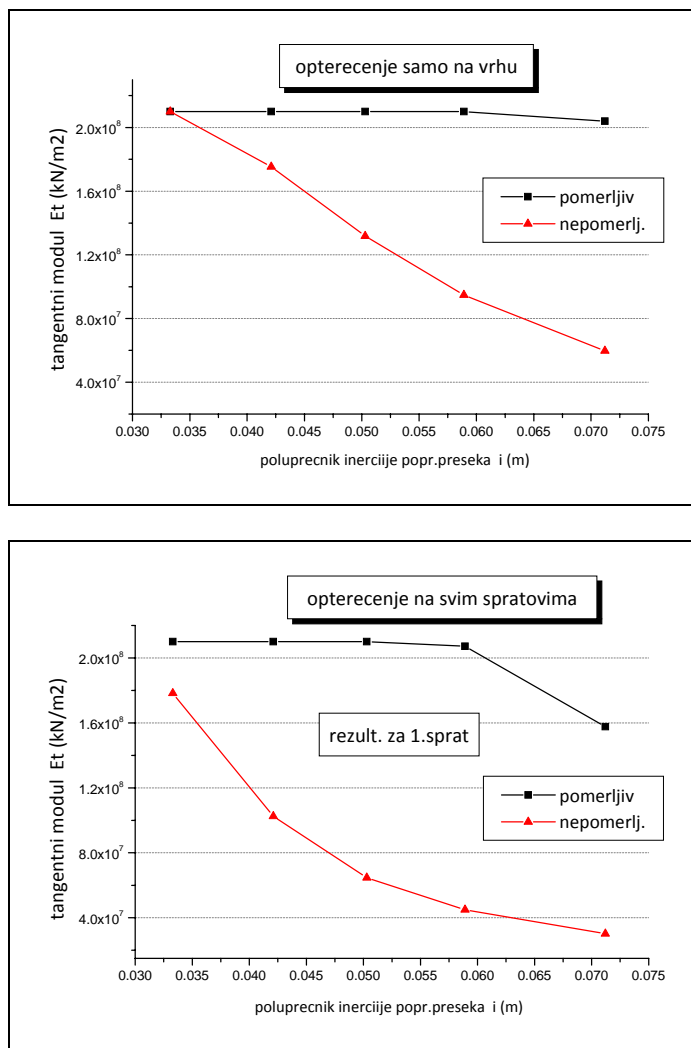
И у овом примеру се, још у већој мери показала разлика у анализи извијања померљивих и непомерљивих оквирних носача у еласто-пластичној области. За разлику од оквира са померљивим чворовима, у овом случају готово сви стубови се извијају у нееластичној области. То се уочава на графичком приказу где се пореде резултати класичне „еластичне“ анализе и поменуте еласто-пластичне анализе. На апсцисама графика који су приказани на слици 5.17 нането је пет анализираних попречних пресека преко њихових полупречника инерције, док су на ординатама дате вредности израчунатог критичног оптерећења.



слика 5.17 Упоредни резултати за  $P_{cr}$  код еластичне и еластопластичне анализе – шестоспратни оквири са непомерљивим чворовима

Поређењем графика на сликама 5.15 и 5.17 јасно се уочава разлика у понашању оквирних носача са померљивим и непомерљивим чворовима. Вредност критичне силе код непомерљивих оквира је у овом случају 4 до 5 пута већа у односу на одговарајуће оквири са померљивим чворовима. Пошто је вредност критичног напона директно пропорционална са вредношћу критичне силе, јасно је да је код оквира са непомерљивим чворовима критични напон знатно већи и да његова вредност често премашује напон на граници пропорционалности. Зато је код таквих оквирних носача потребно радити еласто-пластичну анализу стабилности. За разлику од њих, код оквира са померљивим чворовима знатно мање вредности критичне силе дају и мање критичне напоне у притиснутим стубовима, тако извијање остаје у еластичном домену.

Ова разлика у понашању померљивих и непомерљивих оквира такође уочава и на слици 5.18, на којој су приказане вредности модула еластичности, односно тангентног модула у тренутку извијања за случајеве свих анализираних попречних пресека и то за оба статичка система и оба случаја оптерећења.



слика 5.18 Упоредни резултати за  $E_t$  код еластичне и еластопластичне анализе – шестоспратни оквир са померљивим чворовима

У следећем поглављима 5.2 и 5.3 биће приказан поступак одређивања дужина извијања и носивости притиснутих штапова оквирних носача.

## 5.2. ОДРЕЂИВАЊЕ ДУЖИНА ИЗВИЈАЊА И НОСИВОСТИ ПРИТИСНУТИХ ШТАПОВА ОКВИРНИХ НОСАЧА

### 5.2.1. ОДРЕЂИВАЊЕ ДУЖИНЕ ИЗВИЈАЊА ПРИТИСНУТОГ ШТАПА

Испитивање узрока колапса појединих грађевинских конструкција, посебно када су у питању челичне конструкције, показало је да је често до тога долазило услед лома притиснутих елемената конструкције. Ови елементи доживели су „превремени“ лом тако да је и пре достизања допуштених напона дошло до исцрпљења њихове носивости. Може се генерално рећи да код највећег броја притиснутих челичних штапова гранична носивост није условљена критеријумом носивости већ критеријумом стабилности.

Прорачун на бази теорије еластичне стабилности широко је примењен у инжењерској пракси, пошто се полази од тога да се грађевинске конструкције углавном понашају еластично када су изложене свакодневним експлационим оптерећењима, па и у случају када оптерећење достигне критичну вредност. Наиме, у жељи да се пројектују витке грађевинске конструкције, често се дешава да се граде носачи велике висине и мале крутости, па се извијање носача дешава у еластичној области. Зато је разумљиво да овај вид прорачуна представља основу стандарда (прописа) за анализу стабилности оквирних конструкција. Он је дефинисан кроз одређивање тзв. „ефективне дужине“ извијања појединих штапова оквирних носача.

Физички гледано, дужина извијања је дужина замењујућег обострано зглобно ослоњеног штапа константног пресека, оптерећеног константном нормалном силом. Критична сила има облик:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta \cdot l)^2} \quad (5.1)$$

и једнака је критичној сили посматраног штапа произвољних карактеристика.

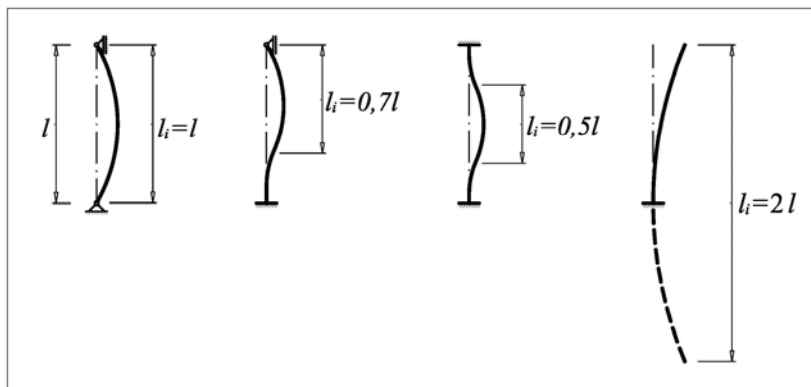
Математички гледано, дужина извијања је растојање између суседних реалних или фиктивних превојних тачака извијеног штапа.

Приказивање дужине извијања врши се помоћу производа коефицијена дужине извијања „ $\beta$ “ и стварне дужине штапа „ $l$ “:

$$l_i = \beta \cdot l \quad (5.2)$$

У Прилогу овог рада су дати наши ЈУС стандарди у [36], као и европске норме ЕС3 за челичне конструкције [41], [42], где је детаљно приказан поступак одређивања „ефективне дужине“ за штапове оквирних конструкција. На бази тако одређених дужина извијања даље се обавља прорачун аксијално притиснутих штапова коришћењем тзв. „кривих извијања“

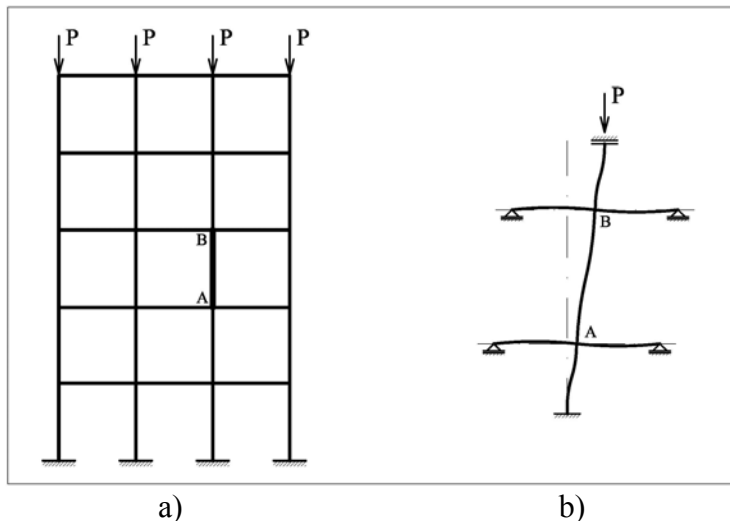
На слици 5.19 приказане су дужине извијања штапова са различитим условима ослањања. На основу тако одређене дужине извијања из једначине (5.1) налази се и величина критичне силе.



слика 5.19 Дужина извијања штапова у функцији услова ослањања

Овај приступ прорачуна критичне силе преко одређивања дужине извијања примењује се и при прорачуну притиснутих штапова оквирних носача [43]. Тако на пример, када се врши прорачун стабилности оквирног носача са слике 5.20 а), користи се израз (5.1) и одређује дужина извијања, односно критична сила сваког стуба понаособ. Разлог за овакав приступ лежи у чињеници да се до недавно сматрало да је прорачун стабилности комплетне оквирне конструкције компликован за инжењерску праксу. Зато се у наведеним прописима за прорачун стабилности оквирних конструкција користе упрошћене статичке шеме, као на пример она која је приказана на слици 5.20 б). То практично значи да се разматра стуб који је „издвојен“ из оквира, а који је еластично укљештен или ослоњен само на стубове и греде који су његовој непосредној околини.





слика 5.20 Упрошћена статичка шема за прорачун стабилности према прописима Овакав приближан, поједностављен прорачун има својих предности јер се релативно лако долази до резултата који су приказани у виду одговарајућих дијаграма и формула. Међутим, поставља се питање да ли су таква приближна решења довољно тачна и да ли се могу применити на различите случајеве који се јављају у инжењерској пракси. Поставља се и питање да ли их и даље треба користити, када су услед бурног развоја компјутерске технике и програми за прорачун стабилности оквирних носача постали опште доступни.

У овом раду користи се методологија прорачуна која се заснива на глобалној анализи стабилности оквирне конструкције. То подразумева да се прво одреди критично оптерећење оквирног носача у целини  $P_{cr,gl}$ , а затим се на основу њега одређују критичне силе за сваки појединачни стуб  $P_{cr}$ . На основу њих се добијају коефицијенти ефективне дужине извијања појединачних стубова из израза:

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} \quad (5.3)$$

У случају извијања у пластичној области усвојиће се исти израз за коефицијент  $\beta$ , стим што се  $P_{cr}$  односи на критичну силу која је срачуната на основу нееластичног понашања оквира ( $P_{cr,inel}$ ), а модул еластичности  $E$  више није константа, већ је функција нивоа напрезања и замењује се тангентним модулом  $E_t$  :

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 E_t I}{P_{cr,inel} \cdot l^2}} \quad (5.4)$$

### 5.2.2. ОДРЕЂИВАЊА НОСИВОСТИ ПРИТИСНУТОГ ШТАПА

Истраживања приказана у овој дисертацији заснована су на претпоставкама о идеално правом штапу од идеално хомогеног материјала и који је идеално центрично оптерећен. Јасно је да ове претпоставке не могу бити у потпуности испуњене када је у питању реалан штап. Зато се од првих експеримената (Baushinger) па све до данас обављају интензивна експериментална истраживања са циљем да се што боље сагледа стварно понашање притиснутих штапова.

Ова истраживања указала су на бројне несавршености реалних штапова које доводе до значајне дисперзије теоријских и експерименталних резултата. Основни разлози су велики број фактора који утичу на понашање и носивост ових штапова, као нпр:

- заостали напони,
- имперфекције везане за геометрију и облик носача,
- ексцентричност при оптерећењу,
- структура материјала,
- историја оптерећења и др.

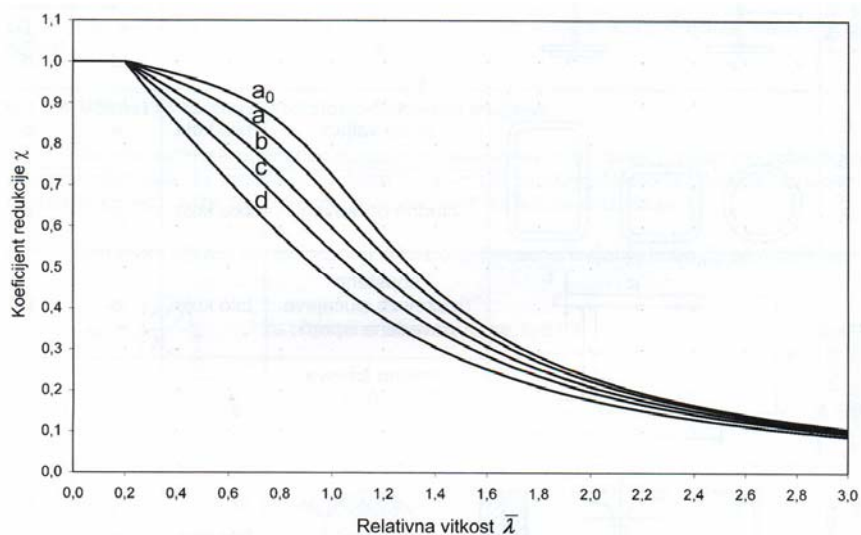
Анализирајући појединачно ове факторе, може се констатовати да иако се полази од претпоставке да је материјал (челик) идеално хомоген, у пракси то није случај. Ова нехомогеност материјала има за последицу различите модуле еластичности и границу развлачења по попречном пресеку носача.

Један од видова несавршености (имперфекција) материјала осим његове нехомогености је и појава сопствених (заосталих) напона. Они могу бити изазвани термичким узроцима у току производње када се врши ваљање или хлађење, као и касније током процеса заваривања. Такође, заостали напони се могу јавити услед механичких узрока, када се врши исправљање лимова и сл.. Услед ових заосталих напона, током оптерећења (експлоатације) дешава се код центрично оптерећених штапова да се у појединим деловима попречног пресека формирају пластичне зоне, иако средишни напон није достигао границу развлачења. Због ове појаве смањена је крутост штапа, па самим тим и његова носивост.

Реални носачи у грађевинским конструкцијама изграђени су увек са мањим или већим геометријским несавршеностима. При њиховој монтажи и формирању грађевинске конструкције долази до додатних имперфекција не само у геометрији

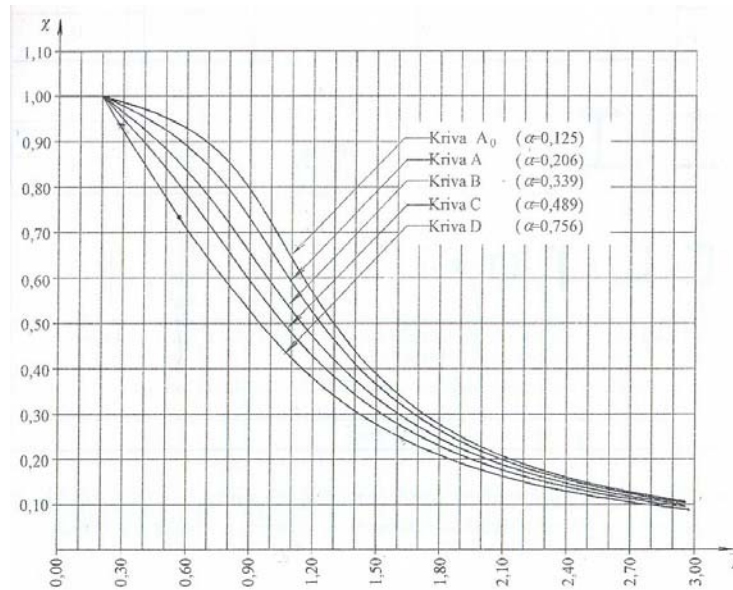
носача већ и у наношењу оптерећења, односно појави нежељених ексцентричности. Ове несавршености представљају почетне деформације при извијању штапа, које имају за последицу смањење граничне носивости.

У циљу да се дефинише стварна носивост центрично оптерећених штапова, пришло се одређивању тзв. „кривих извијања“. Као резултат дуготрајних експерименталних и теоријских истраживања у развијеним земљама Европе, дошло се до европских кривих извијања. Аналитичкој формулацији ових кривих највише су допринели Perry, Maquoi и Roundal [44], [45]. Ове криве нашле су затим примену у стандардима за прорачун челичних конструкција готово свих европских земаља. У европским нормама оне чине део стандарда дат у ЕС3 и приказане су на слици 5.21.



слика 5.21 Криве извијања према ЕС3 (преузето из [42])

Наши прописи за прорачун центрично оптерећених штапова од челика такође се заснивају на овим истраживањима и одговарају европским кривима из стандарда ЕС 3. Те криве су приказане су на слици 5.22.



слика 5.22 Криве извијања према нашим прописима (преузето из [24])

Ове криве извијања представљају модификацију теоријских кривих извијања јер воде рачуна о свим имперфекцијама које се јављају код реалних штапова. Показало да је немогуће обавити проверу носивости свих притиснутих елемената конструкције помоћу јединствене криве. Наиме, велики је број параметара који утиче на извијања носача, а то је пре свега почетна деформација штапа, облик попречног пресека, ниво сопствених напона, начин израде и дебљина делова попречног пресека итд. Да би се обухватили сви ови аспекти, наопходно је формирати серију кривих извијања за сваки појединачни случај, како је то дефинисано стандардом.

Како се са слика 5.21 и 5.22 види, криве извијања дефинишу се преко бездимензионалног коефицијента отпорности елемента на извијање  $\chi$ , у функцији релативне виткости  $\bar{\lambda}$  и имперфекција штапа. Наиме, да би се лакше вршио прорачун, уместо уобичајене везе између критичног напона извијања  $\sigma_{cr}$  и виткости штапа  $\lambda$  уводи се зависност у бездимензионалном облику, преко коефицијената  $\chi$  и  $\bar{\lambda}$ . Коефицијент извијања  $\chi$  добија се када се критични напон извијања подели са напоном на граници развлачења.

$$\chi = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_v} \quad (5.5)$$

Да би се очувала зависност, релативна виткост  $\bar{\lambda}$  се добија тако што се виткост  $\lambda$  дели са виткошћу на граници развлачења:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_v} \quad (5.6)$$

где је:

$$\lambda_v = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_v}} \quad (5.7)$$

Из горњег израза се види да виткост на граници развлачења зависи само од врсте материјала. То значи да коефицијент  $\chi$  за исти материјал директно зависи од виткости, односно дужине извијања штапа. Према томе, да би се ове криве извијања могле исправно користити, односно да би давале тачне резултате, неопходно је тачно одредити виткост, односно дужину извијања штапа.

Треба напоменути да су ове криве настале су на основу експерименталних истраживања понашања једног изолованог штапа са тачно дефинисаним граничним условима, што је омогућило и добијање тачне теоријске вредности критичне силе односно дужине извијања. Како се ове криве користе и за прорачун стубова оквирних носача, потребно је за сваки штап оквира тачно прорачунати теоријску вредност критичне силе односно дужину извијања. Већ раније је у овом раду напоменуто да до недавно овај прорачун није било лако спровести па су у стандардима дата приближна решења. У наредном делу рада документоваће се да та приближна решења често доводе до грешака које се не могу толерисати. То има за последицу да када се наведене криве извијања користе за прорачун штапова оквирних носача, долази до грешака у прорачуну њихове носивости које се такође не могу толерисати, јер се у прорачун улази са нетачним резултатима за дужину извијања, односно виткост штапа. Зато је у предходном делу 5.2.1. дата методологија прорачуна према једначини (5.3) која дефинише поступак за одређивања тачне вредности критичне силе, односно дужине извијања

У наставку овог поглавља, тј. у делу 5.3. даће се нумерички примери који илуструју какве грешке настају при прорачуну штапова оквирних носача, када се користе приближна решења из постојећих стандарда.

### **5.3. ПАРАМЕТАРСКА АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА СА ОЦЕНОМ ТАЧНОСТИ РЕШЕЊА ДАТИХ У СТАНДАРДИМА ЗА ПРОРАЧУН ЧЕЛИЧНИХ ОКВИРНИХ КОНСТРУКЦИЈА**

У овом делу приказано је одређивање дужине извијања штапова оквирних конструкција. Прорачун је спроведен помоћу програма ALIN који је дат у претходном поглављу. Овако добијени резултати упоређени су са резултатима који се добијају коришћењем наших ЈУС и европских ЕС3 стандарда.

Прво су анализирани најједноставнији једносратни оквири, а затим је анализа спроведена на сложенијим шестосратним оквирним носачима са три поља, чије су карактеристике и геометрија приказане у наставку рада.

Разматрани су оквири код којих су сви стубови оптерећени константном аксијалном силом притиска, као и у случају када је та сила променљива, тј. када се мења по спратовима. Анализирани су и примери када је оптерећење неравномерно распоређено по појединим стубовима оквирног носача, као и примери када су вариране крутости појединих стубова.

На крају су разматрани и различити услови ослањања код анализираних оквира. Тачније, поред укљештених носача анализирани су и оквири код којих су доњи стубови зглобно везани за подлогу.

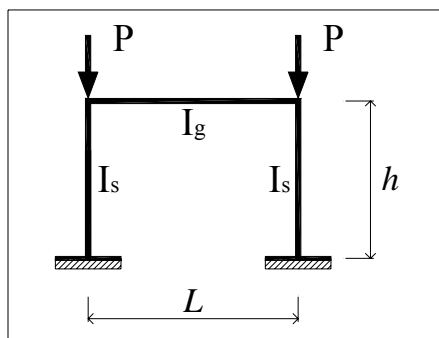
У теоријској анализи која је основ прописа јасно је истакнуто да се прорачун дужине извијања разликује према томе да ли стубови оквира припадају систему са непомерљивим или померљивим чворовима. Тако је и овде анализа спроведена за оба ова случаја, мада је тежиште рада на померљивим системима, код којих је феномен извијања знатно израженији.

На појединим примерима указано је како грешка при прорачуну дужине извијања утиче на прорачун носивости штапа која је дефинисана преко криве извијања.

Ради једноставнијег упоређивања резултата користи се параметарска анализа, тако да су наведени примери решавани са параметрима за оптерећење, димензије носача и карактеристике материјала.

### 5.3.1 ЈЕДНОСПРАТНИ ОКВИР

У првом примеру у овом делу анализиран је најједноставнији статички систем – једноспратни оквир са два реда стубова (тј. једним распоном) са померљивим чворовима, који је оптерећен једнаким аксијалним силама притиска у оба стуба, слика 5.23.



слика 5.23 Једноспратни оквир са померљивим чворовима

У овом примеру је обављен прорачун за различите односе крутости стубова и греде. Овај однос је приказан преко параметра  $c$ :

$$c = \frac{k_{st}}{k_{gr}} = \frac{I_s/h}{I_g/L} = \frac{I_s}{I_g} \cdot \frac{L}{h}$$

Као што се види на слици 5.23, са  $h$  је означена висина стуба, са  $L$  дужина греде, док су моменти инерције попречних пресека стуба и греде приказани са  $I_s$ , односно  $I_g$ .

#### Прорачун применом програма ALIN

Прво је приказан прорачун критичне силе оквира у еластичној области, коришћењем програма ALIN.

Улазна датотека (типа XML) за случај када је коефицијент  $c = 1$  има облик:

```
<ALIN>
  <System>
    <title> PRIMER-1: OBOSTRANO UKLJESTEN OKVIR </title>
    <title> Stabilnost (N-sila pritisak) </title>
    <title> Odredjivanje kritичne sile</title>
  <Control>
    <OutFile> primer-1 </OutFile>
    <StabAnal>CRITICAL</StabAnal>
    <StabStiff>EXACT</StabStiff>
  </Control>
```

```

</System>
<Property>
  <Material>
    <Mat_Type>STEEL </Mat_Type>
    <Default>YES</Default>
  </Material>
  <Section>
    <General>
      <Gen_Name>STUB</Gen_Name>
      <Gen_Numb>1</Gen_Numb>
      <Area>0.1</Area>
      <I3>0.4762e-6</I3>
    </General>
    <General>
      <Gen_Name>GREDA</Gen_Name>
      <Gen_Numb>2</Gen_Numb>
      <Area>0.1</Area>
      <I3>0.4762e-6</I3>
    </General>
  </Section>
</Property>
<Nodes>
  <Joint Number="1" X="0.0" Y="0.0" Name="Oslonac A" />
  <Joint Number="2" X="0.0" Y="10.0" Name="Tacka B" />
  <Joint Number="3" X="10.0" Y="10.0" Name="Tacka C" />
  <Joint Number="4" X="10.0" Y="0.0" Name="Oslonac D" />
  <Boundary Node="1" UX="1" UY="1" RZ="1"/>
  <Boundary Node="4" UX="1" UY="1" RZ="1"/>
<Elements>
  <Beam Beam_No="1" I="1" J="2" MAT="1" SecType="GEN" SEC="1"
Name="STUB" />
  <Beam Beam_No="2" I="2" J="3" SEC="2" Name="GREDA" />
  <Beam Beam_No="3" I="3" J="4" SEC="1" Name="STUB" />
</Elements>
<Loading>
  <LoadCase>
    <Name>Koncentrisane sile u tackama B i C (cvorovi 2 i 3)</Name>
    <Number>1</Number>
    <Conc Node="2" FY="-1" AFY="1.0"/>
    <Conc Node="3" FY="-1" AFY="1.0"/>
  </LoadCase>
</Loading>
</ALIN>

```

Добијени резултат за критичну силу износи:  $P_{cr} = 7.379 \frac{EI}{l^2}$ ,

где је за моментат инерције попречног пресека и висину стуба усвојено обележавање:  $I_s = I$  и  $h = l$ .

Одавде се израчунава коефицијент ефективне дужине извијања за стубове, на основу израза (5.3):



$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot EI}{7.379 \frac{EI}{l^2} \cdot l^2}} = 1.156$$

Резултати за остале случајеве су приказани у табели 5.14, као и на слици 5.24.

### Прорачун према ЕС3

Део Европских прописа за челичне конструкције (Eurocode 3) [41], [42] који се односи на прорачун дужине извијања стубова оквирних носача дат је у Анексу овог рада. И овде је приказан само прорачун коефицијента ефективне дужине извијања за случај  $c = 1$ , док су остали резултати дати у табели 5.14:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0 \quad (\text{укљештење}) \\ \eta_2 &= \frac{k}{k + 1.5 \cdot k} = 0.4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{\frac{1 - 0.2 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.12 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{1 - 0.8 \cdot (\eta_1 + \eta_2) + 0.6 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}} = 1.163$$

### Прорачун према ЈУС-у

Домаћи стандарди (ЈУС) у делу који се односи на прорачун стабилности челичних оквирних носача преузети из [36] такође су дати у Анексу овог рада. Прорачун коефицијента ефективне дужине извијања у случају једнаког односа крутости стуба и греде ( $c = 1$ ), гласи:

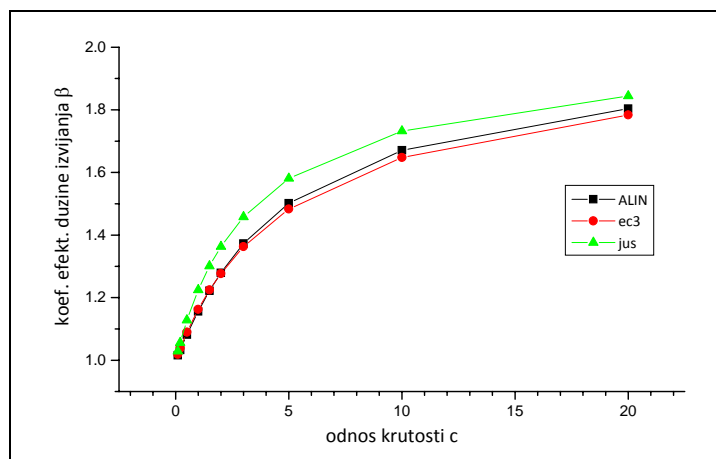
$$\begin{aligned} \eta_A &= 0 \quad (\text{укљештење}) \\ \eta_B &= \frac{k}{k + \frac{2}{3} \cdot k} = 0.6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \beta = \sqrt{\frac{1.5 - 0.7 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 0.22 \cdot \eta_A \cdot \eta_B}{1.5 - 1.3 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 1.1 \cdot \eta_A \cdot \eta_B}} = 1.225$$

У табели 5.14 приказани су резултати за различите вредности односа крутости стубова и греде.

табела 5.14 Коefицијент  $\beta$  за стубове оквира са слике 5.23

метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
коefицијент $c$	0.1	1.016	0.30	1.029	1.28
	0.2	1.033	0.48	1.056	2.23
	0.5	1.082	0.74	1.128	4.25
	1.0	1.156	0.61	1.225	5.97
	1.5	1.222	0.25	1.301	6.46
	2.0	1.279	-0.16	1.363	6.57
	3.0	1.373	-0.73	1.458	6.19
	5.0	1.502	-1.26	1.581	5.26
	10.0	1.671	-1.38	1.732	3.65
	20.0	1.804	-1.11	1.844	2.22

Очигледно је да европски прописи (EC3) дају тачна решења зато што се она практично поклапају са решењима добијеним из програма ALIN. Резултати према домаћим ЈУС стандардима указују на мале разлике у прорачуну. Графички приказ ових резултата дат је на слици 5.24.



слика 5.24 Зависност  $c - \beta$  код једносратног оквира са померљивим чворовима

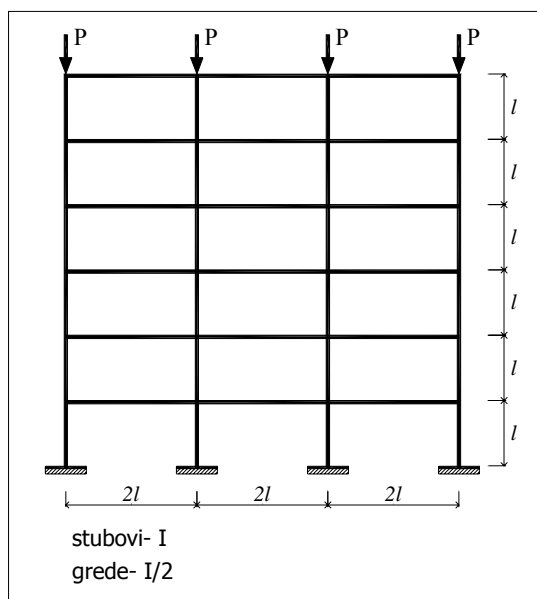
У наставку овог рада анализирани су вишесратни оквирни носачи. У радовима [46] - [48] може се наћи анализа одређивања коefицијента дужине извијања и за неке друге статичке системе.

### 5.3.2 ВИШЕСПРАТНИ ОКВИРИ

Као пример за вишеспратне носаче, анализиран је укљештен шестоспратни оквир са три поља (тј. четири реда стубова). Као што је раније речено, ради једноставнијег поређења резултата сви подаци су задати у параметарском облику. Тако је за висину стубова узето  $l$ , док је распон греда усвојен дупло већи, тачније  $2l$ . Моменат инерције свих стубова је означен са  $I$ , док је за греде претпостављена дупло мања вредност  $I/2$ . Модул еластичности је, код анализе извијања у еластичној области, усвојен константан и износи  $E$ .

#### 5.3.2.1 Вишеспратни оквирни носач са константним оптерећењем у стубовима

У првом примеру сложеног оквира, као што може да се види на слици 5.25, узето је оптерећење које делује само у највишем нивоу рама (сила  $P$  на врху сваког стуба).



слика 5.25 Шестоспратни померљиви оквир са константним аксијалном силом у стубовима

#### Прорачун применом програма ALIN

Користећи програм ALIN, израчуната је критична сила за читав оквир:

$$P_{cr} = 2.040 \frac{EI}{l^2} .$$

Коефицијент ефективне дужине извијања у свим спратовима је исти:

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot EI}{2.040 \frac{EI}{l^2} \cdot l^2}} = 2.199$$

### Прорачун према ЕСЗ

Пошто је ово први пример вишеспратног оквира у овој анализи, детаљно ће бити приказани коефицијенти расподеле на основу којих су израчунати коефицијенти ефективне дужине извијања. Јасно је да резултати зависе од спрата на коме се налази анализирани стуб, као и од тога да ли је стуб „спољашњи“ или „унутрашњи“.

\* 1. спрат – спољашњи стубови

$$\eta_1 = 0 \quad (\text{укљештење})$$

$$\eta_2 = \frac{EI/l + EI/l}{EI/l + EI/l + 1.5 \cdot (EI/2)/(2l)} = 0.8421 \quad \Rightarrow \quad \beta_{1,s} = \sqrt{\frac{1 - 0.2 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.12 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{1 - 0.8 \cdot (\eta_1 + \eta_2) + 0.6 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}} = 1.596$$

\* 1. спрат – унутрашњи стубови

$$\eta_1 = 0 \quad (\text{укљештење})$$

$$\eta_2 = \frac{EI/l}{EI/l + EI/l + 2 \cdot 1.5 \cdot (EI/2)/(2l)} = 0.7273 \quad \Rightarrow \quad \beta_{1,u} = 1.429$$

\* 2 - 5. спрат – спољашњи стубови

$$\eta_1 = 0.8421, \quad \eta_2 = 0.8421 \quad \Rightarrow \quad \beta_{2,s} = 2.720$$

\* 2 - 5. спрат – унутрашњи стубови

$$\eta_1 = 0.7273, \quad \eta_2 = 0.7273 \quad \Rightarrow \quad \beta_{2,u} = 2.049$$

\* 6. спрат – спољашњи стубови

$$\eta_1 = 0.8421, \quad \eta_2 = 0.7273 \quad \Rightarrow \quad \beta_{6,s} = 2.339$$

\* 6. спрат – унутрашњи стубови

$$\eta_1 = 0.7273, \quad \eta_2 = 0.5714 \quad \Rightarrow \quad \beta_{6,u} = 1.811$$

### Прорачун према ЈУС-у

У овом случају се добијају следећи резултати:

\* 1. спрат – спољашњи стубови

$$\eta_A = 0 \quad (\text{укљештење})$$

$$\eta_B = \frac{EI/l + EI/l}{EI/l + EI/l + \frac{2}{3} \cdot (EI/2)/(2l)} = 0.9231$$

$$\Rightarrow \beta_{1,s} = \sqrt{\frac{1.5 - 0.7 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 0.22 \cdot \eta_A \cdot \eta_B}{1.5 - 1.3 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 1.1 \cdot \eta_A \cdot \eta_B}} = 1.687$$

\* 1. спрат – унутрашњи стубови

$$\eta_A = 0 \quad (\text{укљештење})$$

$$\eta_B = \frac{EI/l + EI/l}{EI/l + EI/l + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (EI/2)/(2l)} = 0.8571$$

$$\Rightarrow \beta_{1,u} = 1.527$$

\* 2 - 5. спрат – спољашњи стубови

$$\eta_A = 0.9231, \quad \eta_B = 0.9231 \quad \Rightarrow \beta_{2,s} = 3.256$$

\* 2 - 5. спрат – унутрашњи стубови

$$\eta_A = 0.8571, \quad \eta_B = 0.8571 \quad \Rightarrow \beta_{2,u} = 2.408$$

\* 6. спрат – спољашњи стубови

$$\eta_A = 0.9231, \quad \eta_B = 0.8571 \quad \Rightarrow \beta_{6,s} = 2.763$$

\* 6. спрат – унутрашњи стубови

$$\eta_A = 0.8571, \quad \eta_B = 0.75 \quad \Rightarrow \beta_{6,u} = 2.093$$

У табелама 5.15 и 5.16 је дата рекапитулација резултата за спољашње, односно унутрашње стубове.

табела 5.15 Коefицијент  $\beta$  за спољашње стубове оквира са слике 5.25

спољашњи стубови						
метод прорачуна	ALIN	ЕСЗ	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)	
спрат	1	2.199	-27.4	1.687	-23.3	
	2	2.199	23.7	3.256	48.1	
	3	2.199	23.7	3.256	48.1	
	4	2.199	23.7	3.256	48.1	
	5	2.199	23.7	3.256	48.1	
	6	2.199	2.339	6.4	2.763	25.7

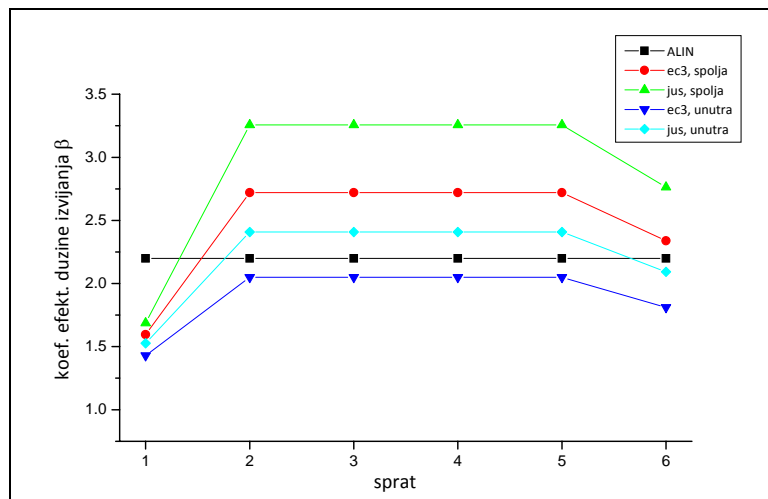
табела 5.16 Коefицијент  $\beta$  за унутрашње стубове оквира са слике 5.25

унутрашњи стубови						
метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)	
спрат	1	2.199	1.429	-35.0	1.527	-30.6
	2	2.199	2.049	-6.8	2.408	9.5
	3	2.199	2.049	-6.8	2.408	9.5
	4	2.199	2.049	-6.8	2.408	9.5
	5	2.199	2.049	-6.8	2.408	9.5
	6	2.199	1.811	-17.6	2.093	-4.8

У претходним табелама приказане су разлике, тј. грешке при прочуну помоћу прописа у односу на тачно решење које је добијено применом програма ALIN. Ове грешке рачунате су на основу добро познате формуле за релативну грешку, тј.

$$\frac{P_{cr,prop} - P_{cr,tacn}}{P_{cr,tacn}} (\%). \tag{5.8}$$

Графички приказ резултата из табела 5.15. и 5.16 приказан је на графикону на слици 5.26.



слика 5.26 Вредности  $\beta$  за шестоспратни оквир са слике 5.25

Види се, да у случају оптерећења које даје константну силу дуж свих стубова, постоји сасвим солидно поклапање резултата при прорачуну према прописима у односу на примену програма ALIN. То поготову важи за унутрашње стубове оквирног носача, не рачунајући први спрат где су одступања већа. Код вредности

коэффицијената ефективне дужине извијања за спољашње стубове одступања су знатно већа.

У наставку ће бити приказанао како ове грешке у одређивању дужине извијања утичу на прорачун носивости центрично притиснутих штапова. Наиме, у делу 5.2.2 описан је овај прорачун применом „кривих извијања“. На основу израчунте вредности коэффицијента ефективне дужине извијања, добија се релативна виткост и та вредност се уноси на приказане дијаграме.

За потребе овог прорачуна потребно је усвојити карактеристике анализираног шестоспратног оквира. Димензије елемената, као и карактеристике материјала узете су исте као и у нумеричким примерима у делу 3.2 и 5.1. Значи, у питању је челик С0361 ( $E=210,000,000\text{kN/m}^2$ ,  $\sigma_v=240,000\text{ kN/m}^2$ ), висина стубова је  $l=5\text{m}$ , док су греде дужина  $2l=10\text{m}$ . У наредном примеру за стубове је усвојен попречни пресек 2 I20 ( $A=0.00644\text{ m}^2$ ,  $I=0.00002237\text{ m}^4$ ), који је још приказан на слици 3.10 у трећем поглављу. Треба нагласити да је у примерима у овом делу рада усвојено да су греде дупло мање крутости од стубова, тј.  $I_{gr}=I_{st}/2$ .

У случају прорачуна применом програма ALIN, за све стубове је добијена вредност  $\beta=2.199$ . Одатле се израчунава виткост стубова као

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{2.199 \cdot 5}{0.0589} = 186.87.$$

Виткост на граници развлачења се израчунава на основу израза (5.7):

$$\lambda_v = \pi \sqrt{\frac{210000000}{240000}} = 92.93.$$

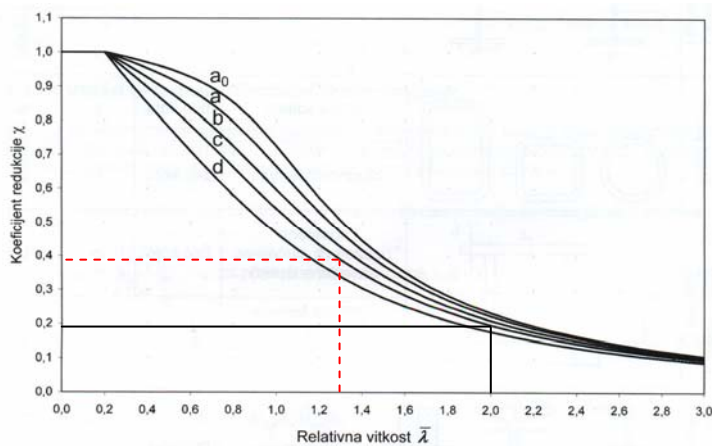
Тако се, на крају, релативна виткост  $\bar{\lambda}$  добија као количник ове две вредности, као што је речено у претходном делу, израз (5.6):

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_v} = \frac{186.87}{92.93} = 2.011.$$

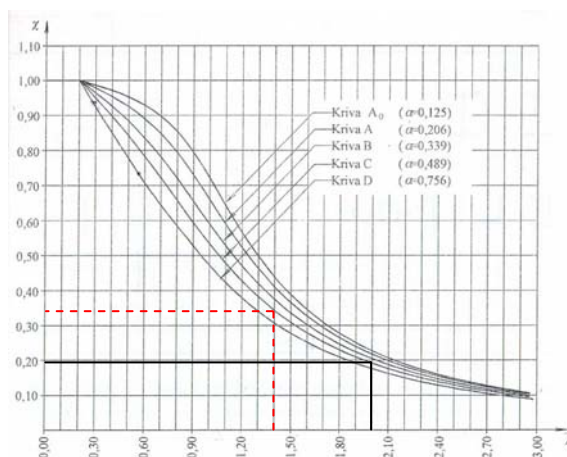
Исти поступак је спроведен и за решења добијена применом Еврокода 3 и домаћих прописа. Решења добијена применом прописа зависе од спрата на коме се стуб налази као и његовог положаја унутар тог спрата. У овом случају биће разматрани стубови прве (приземне) етажне, који су због свог положаја и најзанимљивији за анализу код оваквог типа оптерећења.

За случај прорачуна применом ЕС3, добија се за унутрашње стубове  $\bar{\lambda} = 1.305$ . ЈУС стандарди за ове стубове дају вредност  $\bar{\lambda} = 1.395$ .

Добијене вредности релативне виткости „уносе се“ на криве извијања које су приказане на сликама (5.21) и (5.22). На сликама 5.27 (ЕС3) и 5.28 (ЈУС) приказане су те вредности и одатле се јасно може видети колике се грешке чине у прорачуну носивости анализираниг оквира применом приближних решења за коефицијенте ефективне дужине извијања. На приказаним графицима пуном линијом су дати резултати матричне анализе применом програма ALIN, док су испрекиданом линијом означени резултати применом стандарда за прорачун стубова. У оба случаја, сходно препорукама из прописа, усвојена је крива извијања „С“.



слика 5.27 Одређивање коефицијента  $\chi$  према ЕС3 (1.спрат оквира са сл.5.25)

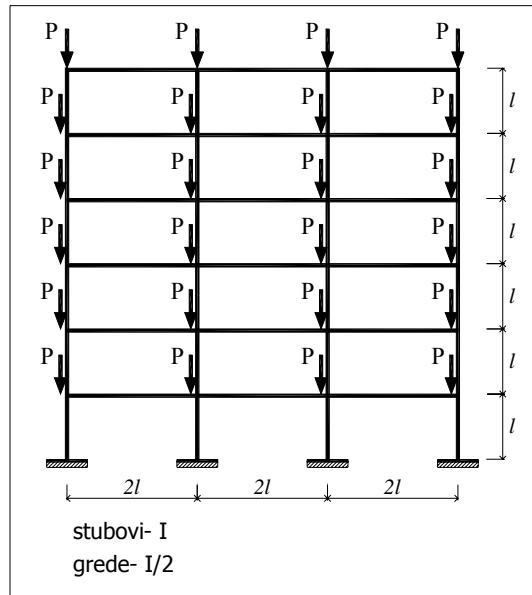


слика 5.28 Одређивање коефицијента  $\chi$  према ЈУС-у (1.спрат оквира са сл.5.25)



### 5.3.2.2 Вишеспратни оквирни носач са променљивим (скоковитим) оптерећењем

У овом примеру се анализира случај шестоспратног оквирног носача са три поља, код кога на сваком спрату делује оптерећење истог интензитета, тако да се аксијална сила повећава по спратовима гледајући одозго ка доле (слика 5.29). Остале карактеристике носача су исте као и у претходном примеру.



слика 5.29 Шестоспратни померљиви оквир са скоковитом аксијалном силом у стубовима

#### Прорачун применом програма ALIN

Критична сила читавог носача за овај случај оптерећења износи:  $P_{cr} = 0.513 \frac{EI}{l^2}$ .

Собзиром да аксијалне силе по спратовима нису једнаке, за сваки спрат се добијају различите вредности коефицијента  $\beta$ :

$$1. \text{спрат: } \beta_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{6 \cdot P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6 \cdot 0.513}} = 1.790$$

$$2. \text{спрат: } \beta_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{5 \cdot P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{5 \cdot 0.513}} = 1.961$$

$$3. \text{спрат: } \beta_3 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{4 \cdot P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4 \cdot 0.513}} = 2.193$$

$$4.\text{спрат: } \beta_4 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{3 \cdot P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{3 \cdot 0.513}} = 2.532$$

$$5.\text{спрат: } \beta_5 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{2 \cdot P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{2 \cdot 0.513}} = 3.101$$

$$6.\text{спрат: } \beta_6 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{0.513}} = 4.385$$

### Прорачун према ЕС3 и према ЈУС-у

Пошто се при прорачуну према прописима не узима у обзир вредност аксијалне силе у стубовима, овде се добијају се исте вредности коефицијента ефективне дужине извијања као и код претходног случаја оптерећења. Ти резултати су приказани у табелама 5.17 и 5.18, где су дате и грешке које се чине при прорачуну према прописима у односу на тачно решење добијено применом програма ALIN.

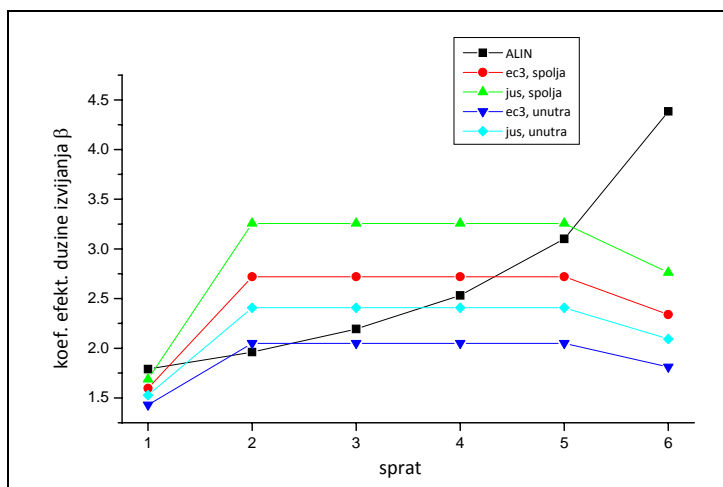
табела 5.17 Коефицијент  $\beta$  за спољашње стубове оквира са слике 5.29

спољашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕС3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
спрат	1	1.790	-10.8	1.687	-5.8
	2	1.961	38.7	3.256	66.0
	3	2.193	24.0	3.256	48.5
	4	2.532	7.4	3.256	28.6
	5	3.101	-12.3	3.256	5.0
	6	4.385	-46.7	2.763	-37.0

табела 5.18 Коефицијент  $\beta$  за унутрашње стубове оквира са слике 5.29

унутрашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕС3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
спрат	1	1.790	-20.2	1.527	-14.7
	2	1.961	4.5	2.408	22.8
	3	2.193	-6.6	2.408	9.8
	4	2.532	-19.1	2.408	-4.9
	5	3.101	-33.9	2.408	-22.3
	6	4.385	-58.7	2.093	-52.3

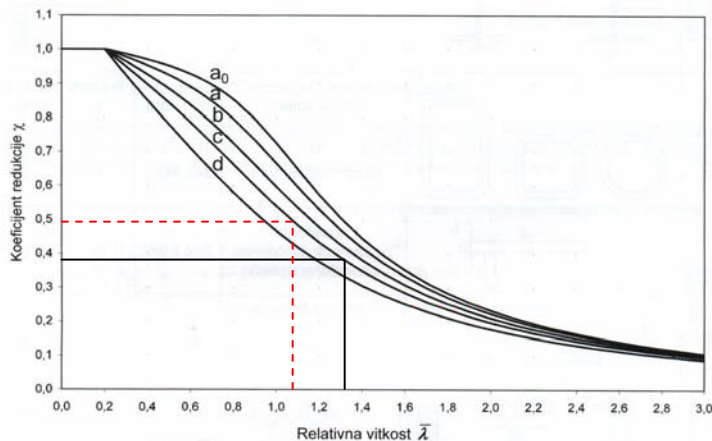
Резултати из претходне две табеле су рекапитулирани и приказани на слици 5.30.



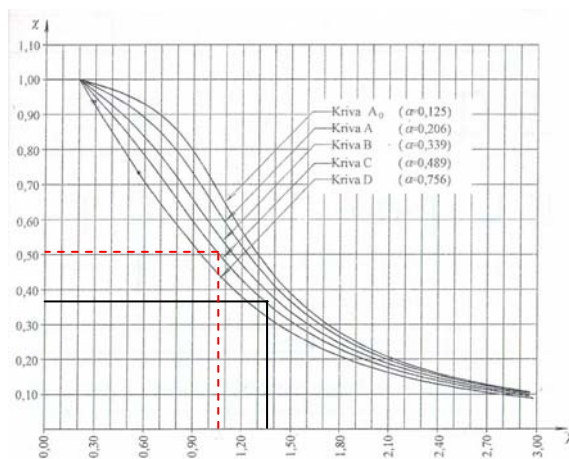
слика 5.30 Рекапитулација вредности  $\beta$  за шестоспратни оквир са слике 5.29

Из табела 5.17 и 5.18, као и са слике 5.30 види се да су се грешке код примене прописа повећале у односу на претходни пример. Један од главних разлога за то је што се при прорачунима који се базирају на анализи изолованог елемента (на основу којих су и настали актуелни прописи) не узима у обзир величина аксијалне силе у елементу, већ само крутост стубова и греда који су везани у непосредној близини крајњих тачака посматраног елемента. Тако се код оквирних носача код којих се оптерећење скоковито мења (а што је и реалан случај из праксе) добијају лошији резултати него у случају оквира са константном аксијалном силом дуж свих стубова.

У наставку овог текста је поново приказано какве су последице погрешно одређеног коефицијента ефективне дужине извијања на одређивање релативне виткости и носивости центрично оптерећених штапова. У овом примеру су дати резултати за већ анализирани попречни пресек стубова 2 [26 ( $A = 0.00966 \text{ m}^2$ ,  $I = 0.00004893 \text{ m}^4$ ) и то за стубове на првом (најоптерећенијем) спрату и приказани су на одговарајућим кривама извијања према европским и домаћим стандардима (слике 5.31 и 5.32). Као и на претходним сликама и овде су пуном линијом приказани резултати матричне анализе применом програма ALIN, а испрекиданом линијом решења за унутрашње стубове добијена из прописа.



слика 5.31 Одређивање коефицијента  $\chi$  према ЕС3 (1.спрат оквира са слике 5.29)



слика 5.32 Одређивање коефицијента  $\chi$  према ЈУС-у (1.спрат оквира са сл.5.29)

На крају ове анализе приказано је одређивање коефицијената ефективне дужине извијања применом еласто-пластичне анализе која је детаљно приказана у претходном делу овог докторског рада. У делу 5.1.5 закључено је да се вишеспратни оквири са померљивим чворовима углавном извијају у еластичној области. До извијања у нееластичној области долази само код примера са „крућим“ попречним пресецима. У споменутој анализи у делу 5.1.5 усвојено је да су греде и стубови исте крутости (слика 5.14 и табеле 5.9, 5.10). Сада су узете „мекше“ греде, тј. дупло су мање крутости од стубова, па је самим тиме и добијен носач који је склонији извијању. Зато је потребно претпоставити попречне пресеке са још већим моментом инерције како би се добило извијање у нееластичној области. Зато је усвојен попречни пресек стубова 2 [30 ( $A = 0.0118$

$m^2$ ,  $I_{\min} = 0.00007257 m^4$ ). Прорачун је обављен применом програма ALIN и добијени су следећи резултати за стубове на првом спрату:

$$P_{cr,el} = 310.49 \text{ kN} \Rightarrow \beta_{el} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 72.57 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 310.49 \cdot 5^2}} = 1.797$$

$$P_{cr,inel} = 304.46 \text{ kN}, E_t = 192,327,954 \text{ kN/m}^2 \Rightarrow \beta_{in} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 192.33 \cdot 10^6 \cdot 72.57 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 304.46 \cdot 5^2}} = 1.736$$

Одавде се види да се код померљивих ослонаца добијају сличне вредности применом оба поступка. Међутим, на основу досадашњих запажања, може се претпоставити да то неће бити случај и код непомерљивих ослонаца. Резултати за такве случајеве биће касније приказани у овом раду.

### 5.3.2.3 Вишеспратни оквирни носач код кога крутост стубова прати повећање аксијалне силе у стубовима

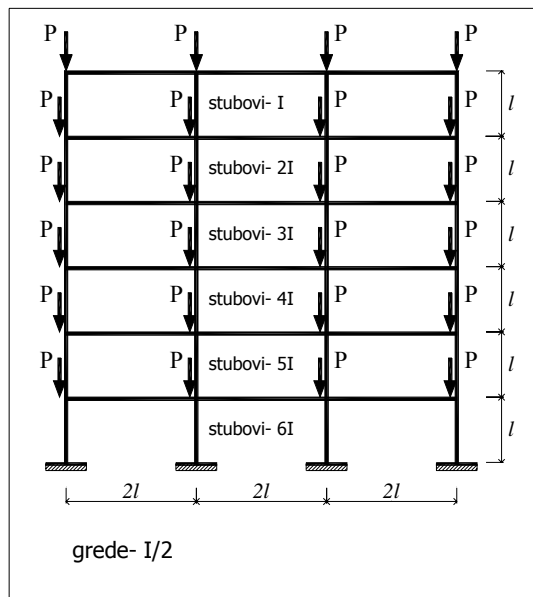
Код вишеспратних оквира често се јавља случај да се по висини објеката повећавају димензије стубова, како се у њима повећава аксијално оптерећење. Зато ће сада бити испитан случај оквирног носача где крутост стубова прати повећање аксијалне силе, као што је приказано на слици 5.33. Крутост греда је претпостављена иста као и у претходним примерима.

#### Прорачун применом програма ALIN

Израчуната критична сила оквирног система у овом случају је  $P_{cr} = 0.867 \frac{EI}{l^2}$ .

Пошто у овом случају крутост стубова расте на исти начин као и прираст аксијалне силе у стубовима, коефицијенти ефективне дужине извијања свих стубова код овог оквирног носача су исти:

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 6EI}{6 \cdot P_{cr} \cdot l^2}} = 3.374 \quad \dots \quad \beta_6 = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = 3.374$$



слика 5.33 Шестоспратни померљиви оквир са скоквитом аксијалном силом и крутошћу стубова

Прорачун према ЕС3 и према ЈУС-у

Вредности добијене прорачуном на основу европских и домаћих прописа приказане су у табели 5.19.

табела 5.19 Коefицијент  $\beta$  за стубове оквира са слике 5.33

спрат	стубови	ЕС 3			ЈУС		
		$\eta_i$	$\eta_k$	$\beta$	$\eta_i$	$\eta_k$	$\beta$
<b>1.</b>	спољашњи	0	0.967	1.888	0	0.985	1.922
	унутрашњи	0	0.936	1.799	0	0.971	1.856
<b>2.</b>	спољашњи	0.967	0.960	5.718	0.985	0.982	6.968
	унутрашњи	0.936	0.923	4.107	0.971	0.964	4.980
<b>3.</b>	спољашњи	0.960	0.949	5.122	0.982	0.977	6.228
	унутрашњи	0.923	0.903	3.693	0.964	0.955	4.465
<b>4.</b>	спољашњи	0.949	0.930	4.442	0.977	0.968	5.388
	унутрашњи	0.903	0.870	3.224	0.955	0.938	3.811
<b>5.</b>	спољашњи	0.930	0.889	3.626	0.968	0.947	4.377
	унутрашњи	0.870	0.800	2.670	0.938	0.900	3.185
<b>6.</b>	спољашњи	0.889	0.727	2.512	0.947	0.857	2.962
	унутрашњи	0.800	0.571	1.946	0.900	0.750	2.250

Рекапитулација добијених резултата, одвојено за спољашње и унутрашње стубове приказана је у табелама 5.20 и 5.21.

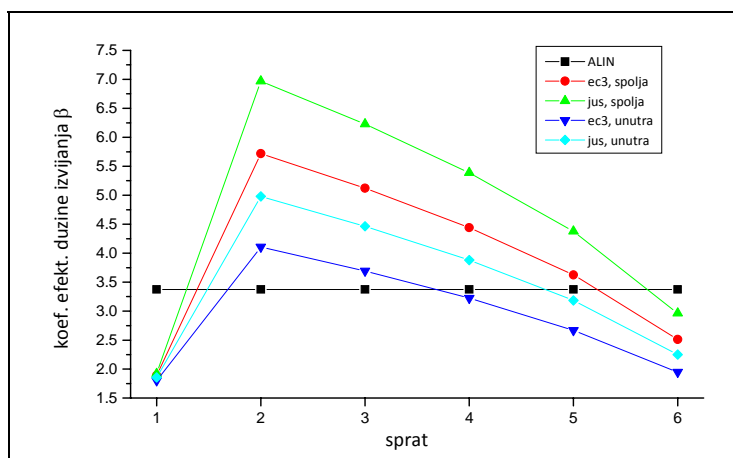
табела 5.20 Коefицијент  $\beta$  за спољашње стубове оквира са слике 5.33

спољашњи стубови						
метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	JYC	разлика (%)	
спрат	1	3.374	-44.0	1.922	-43.0	
	2	3.374	69.5	6.968	106.5	
	3	3.374	5.121	51.8	6.228	84.6
	4	3.374	4.441	31.6	5.388	59.7
	5	3.374	3.626	7.5	4.377	29.7
	6	3.374	2.512	-25.6	2.962	-12.2

табела 5.21 Коefицијент  $\beta$  за унутрашње стубове оквира са слике 5.33

унутрашњи стубови						
метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	JYC	разлика (%)	
спрат	1	3.374	-46.7	1.856	-45.0	
	2	3.374	4.107	21.7	4.980	47.7
	3	3.374	3.693	9.5	4.465	32.3
	4	3.374	3.224	-4.5	3.881	15.0
	5	3.374	2.670	-20.9	3.185	-5.6
	6	3.374	1.946	-43.3	2.250	-33.3

На слици 5.34 дата је графичка рекапитулација резултата.



слика 5.34 Рекапитулација вредности  $\beta$  за шестоспратни оквир са слике 5.33

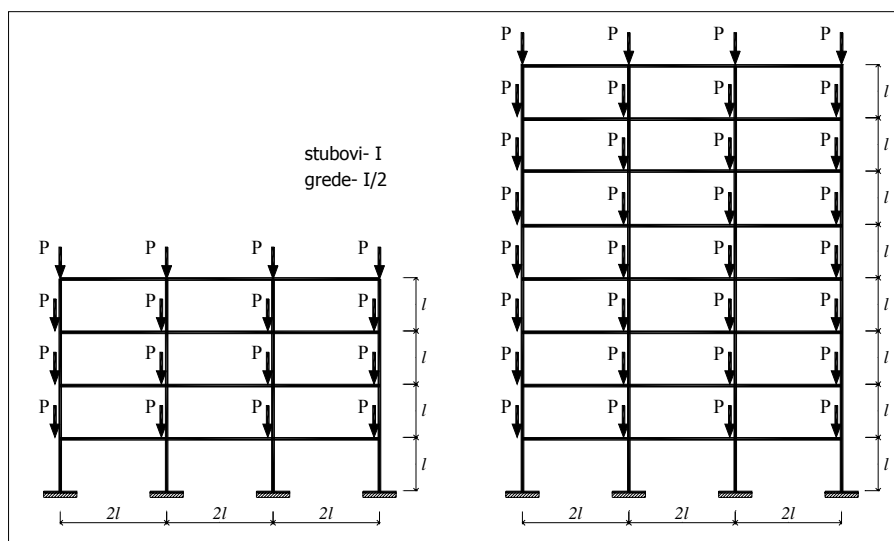
Уочава да резултати применом европских и домаћих стандарда дају велике разлике у односу на решење које је добијено применом програма ALIN. Разматрање стуба као да је ослоњен само на стубове и греде који су у његовој непосредној околини, као што је случај код прописа, у овом случају не доводи до задовољавајућег резултата. Тиме се у најнижој и највишим етажама подцењује, а у средишњим спратовима прецењује вредност коефицијнта  $\beta$ . И овде важи да ЕС3 даје боље резултате него ЈУС стандарди, као и да су тачније вредности за коефицијенте ефективне дужине извијања добијене за унутрашње стубова.

#### 5.3.2.4 Упоредна анализа вишеспратних укљештених оквирних носача са померљивим чворовима

У овом делу је извршена упоредна анализа утицаја различите геометрије и оптерећења анализираних носача на тачност разматраних решења.

##### \* Различита спратност оквирног носача

Прво је спроведена упоредна анализа вредности коефицијената ефективне дужине извијања за оквирне носаче код којих је вариранан број спратова. Као и у претходним примерима, анализирани су рамови са три поља код којих је распон греде дупло већи од висине спрата. Момент инерције стубова је, такође, два пута већи од момента инерције греда.



слика 5.35 Варирање броја спратова оквирних носача



Рачунати су случајеви оквирног носача са 4, 5, 6, 8, 10 и 12 спратова. Неки од ових носача су приказани на слици 5.35.

Применом програма ALIN за сваки од наведених примера лако се израчунава критична сила:

$$\text{Оквир са четири спрата: } P_{cr} = 0.882 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са пет спратова: } P_{cr} = 0.653 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са шест спратова: } P_{cr} = 0.531 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са осам спратова: } P_{cr} = 0.354 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са десет спратова: } P_{cr} = 0.268 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са дванаест спратова: } P_{cr} = 0.215 \frac{EI}{l^2}$$

Коефицијенти ефективне дужине извијања за карактеристичне случајеве, добијени на основу израчунатог критичног оптерећења, дати су у табелама 5.22 – 5.25. У овим табелама су такође приказане и вредности коефицијента  $\beta$  које су добијене применом европских и домаћих прописа.

табела 5.22 Коефицијент  $\beta$  за спољашње стубове 1.спрата анализираних оквира

1. спрат - спољашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕСЗ	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
оквир 3 x 4	1.672	1.596	-4.6	1.687	0.9
оквир 3 x 5	1.738	1.596	-8.2	1.687	-2.9
оквир 3 x 6	1.790	1.596	-10.8	1.687	-5.8
оквир 3 x 8	1.865	1.596	-14.4	1.687	-9.5
оквир 3 x 10	1.918	1.596	-16.8	1.687	-12.0
оквир 3 x 12	1.958	1.596	-18.5	1.687	-13.8

табела 5.23 Коефицијент  $\beta$  за унутрашње стубове 1.спрата анализираних оквира

1. спрат - унутрашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕСЗ	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
оквир 3 x 4	1.672	1.429	-14.5	1.527	-8.7
оквир 3 x 5	1.738	1.429	-17.8	1.527	-12.1
оквир 3 x 6	1.790	1.429	-20.2	1.527	-14.7
оквир 3 x 8	1.865	1.429	-23.4	1.527	-18.1
оквир 3 x 10	1.918	1.429	-25.5	1.527	-20.4
оквир 3 x 12	1.958	1.429	-27.0	1.527	-22.0

Одавде се види да се разлике у резултатима повећавају како се посматра оквир са већим бројем спратова, као што је и било за очекивати. Код унутрашњих стубова су грешке практично дупло веће него код ивичних.

Из претходних табела се уочава да су вредности коефицијента ефективне дужине извијања код приближних прорачуна који су дати у прописима (како домаћим тако и европским) исте у свим анализираним случајевима. То је последица тога зато што се у тада при прорачуну одређеног стуба узимају у разматрање само стубови и греде који су у непосредном окружењу чворова тог стуба. Тако спратност изнад и испод анализираних стуба не утиче на вредности његовог коефицијента ефективне дужине извијања. Треба још једном напоменути да прорачун на основу програма ALIN узима у обзир читаву конфигурацију носача и то је један од разлога зашто се у овом раду таква анализа и препоручује.

У следећим двема табелама (5.24 и 5.25) дато је поређење резултата код стубова на трећој етажи свих анализираних оквира.

табела 5.24 Коефицијент  $\beta$  за спољашње стубове 3.спрата анализираних оквира

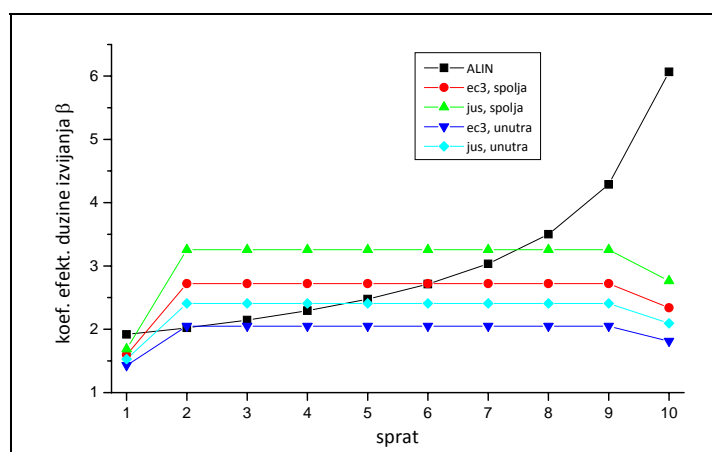
3. спрат - спољашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕСЗ	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
оквир 3 x 4	2.365	2.720	15.0	3.256	37.7
оквир 3 x 5	2.244	2.720	21.2	3.256	45.1
оквир 3 x 6	2.193	2.720	24.0	3.256	48.5
оквир 3 x 8	2.154	2.720	26.3	3.256	51.2
оквир 3 x 10	2.145	2.720	26.8	3.256	51.8
оквир 3 x 12	2.144	2.720	26.9	3.256	51.9

табела 5.25 Коефицијент  $\beta$  за унутрашње стубове 3.спрата анализираних оквира

3. спрат - унутрашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
оквир 3 x 4	2.365	2.049	-13.4	2.408	1.8
оквир 3 x 5	2.244	2.049	-8.7	2.408	7.3
оквир 3 x 6	2.193	2.049	-6.6	2.408	9.8
оквир 3 x 8	2.154	2.049	-4.9	2.408	11.8
оквир 3 x 10	2.145	2.049	-4.5	2.408	12.3
оквир 3 x 12	2.144	2.049	-4.4	2.408	12.3

Из ових резултата, приказаних у претходне две табеле, види се да у овом случају тачност резултата зависи и од спратности оквира, као и од тога да ли је се посматра ивични или унутрашњи стуб. Наиме, код спољашњих спратова грешка се повећава са спратношћу објекта, међутим код унутрашњих стубова то није толико изражено.

У сваком случају, детаљном анализом резултата на осталим спратовима може се видети да се са повећањем броја спратова грешка при приближном прорачуну повећава, поготову за горње спратове. Као потврда тога на слици 5.36 дат је графички приказ поређења резултата код десетоспратног оквира са карактеристикама које су наведене у овом делу.


 слика 5.36 Вредности  $\beta$  за померљиви оквирни носач са десет етажа

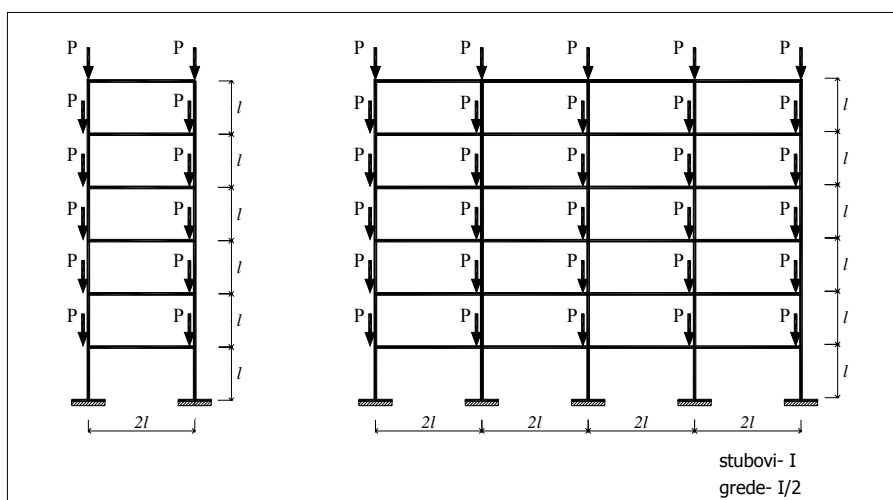
Са овог графика се лако може уочити да у највишим етажама (и код спољашњих, а поготову код унутрашњих стубова) прорачун по прописима даје резултате који

су два, па скоро и три пута мањи од оних који су добијени решавањем диференцијалне једначине аксијално оптерећеног штапа, тј. коришћењем програма ALIN. Разлог томе је што су за задато скоковито оптерећење доњи спратови оптерећенији и па је и извијање читавог оквира зависно од понашања стубова у најнижем спрату. За разлику од тога прорачун према прописима уопште не узима у обзир вредности промене аксијалне силе у стубовима, па су у случају истих карактеристика стубова вредности коефицијента  $\beta$  једнаке за стубове свих спратова (осим првог и последњег). Због тога су веће разлике у резултатима применом програма ALIN и применом прописа што је већа и спратност анализираних оквирних носача.

На овај проблем указано је и у истраживањима других аутора, као нпр. у радовима [49], [50].

#### \* Различит број поља оквирног носача

Овде је приказана упоредна анализа у случају оквирних носача код којих је вариран број поља, тј. број редова стубова. Разматрани су оквири са једним, два, три, четири, пет и шест поља. Спратност свих оквира је иста као и до сада, тј. анализирани су оквири са шест спратова, као што је приказано на слици 5.37. Димензије и карактеристике стубова и греда су исте као и у претходним примерима.



слика 5.37 Варирање броја поља оквирних носача

Код свих шест анализираних носача критична сила је прво одређена применом програма ALIN. Као што је и било за очекивати, како се број поља повећава, тако је и вредност критичне силе све већа (и мање се међусобно разликује):

Оквир са једним пољем:  $P_{cr} = 0.398 EI / l^2$

Оквир са два поља:  $P_{cr} = 0.475 EI / l^2$

Оквир са три поља:  $P_{cr} = 0.513 EI / l^2$

Оквир са четири поља:  $P_{cr} = 0.536 EI / l^2$

Оквир са пет поља:  $P_{cr} = 0.551 EI / l^2$

Оквир са шест поља:  $P_{cr} = 0.561 EI / l^2$

Карактеристичне вредности коефицијената ефективне дужине извијања су и у овом случају приказане заједно са резултатима добијеним коришћењем разматраних стандарда (табеле 5.26 – 5.29).

Прво је дата рекапитулација и поређење резултата за први најоптерећенији спрат у табелама 5.25 и 5.26. Ради боље прегледности, и овде су посебно приказане вредности за ивичне и за унутрашње стубове.

Као и у претходном случају када је варирана спратност оквирних носача, и у овде се применом актуелних прописа у свих шест анализираних случајева добијају исте вредности за коефицијент ефективне дужине извијања. Тако број поља, тј. број стубова оквирног носача нема утицаја на ту вредност, за разлику од прорачуна применом методе коначних елемената која узима у обзир реалан статички систем конструкције.

табела 5.26 Коефицијент  $\beta$  за спољашње стубове 1.спрата анализираних оквира

1. спрат - спољашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕСЗ	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
оквир 1 x 6	2.032	1.596	-21.5	1.687	-17.0
оквир 2 x 6	1.861	1.596	-14.2	1.687	-9.4
оквир 3 x 6	1.790	1.596	-10.8	1.687	-5.8
оквир 4 x 6	1.752	1.596	-8.9	1.687	-3.7
оквир 5 x 6	1.728	1.596	-7.6	1.687	-2.4
оквир 6 x 6	1.711	1.596	-6.7	1.687	-1.4

табела 5.27 Коефицијент  $\beta$  за унутрашње стубове 1.спрата анализираних оквира

1. спрат - унутрашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕСЗ	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
оквир 1 x 6	2.032	1.429	-29.7	1.527	-24.9
оквир 2 x 6	1.861	1.429	-23.2	1.527	-18.0
оквир 3 x 6	1.790	1.429	-20.2	1.527	-14.7
оквир 4 x 6	1.752	1.429	-18.4	1.527	-12.8
оквир 5 x 6	1.728	1.429	-17.3	1.527	-11.6
оквир 6 x 6	1.711	1.429	-16.5	1.527	-10.7

Из ових резултата је очигледно да се грешка при приближном прорачуну коришћењем прописа смањује како се рачунају оквири са више поља. Види се да су код стубова на првом спрату релативне грешке реда 10 до 20 %. Међутим код стубова на вишим спратовима, разлике у добијеним вредностима су знатно веће.

У табелама 5.28 и 5.29 приказани резултати за стубове на шестом спрату.

табела 5.28 Коефицијент  $\beta$  за спољашње стубове 6.спрата анализираних оквира

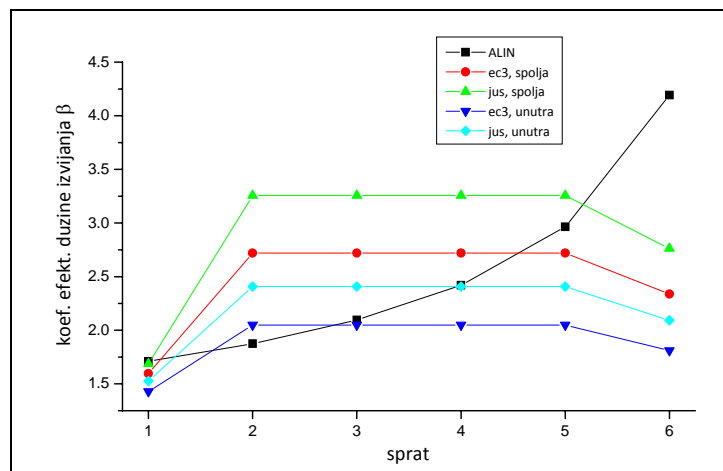
6. спрат - спољашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕСЗ	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
оквир 1 x 6	4.978	2.339	-53.0	2.763	-44.5
оквир 2 x 6	4.557	2.339	-48.7	2.763	-39.4
оквир 3 x 6	4.385	2.339	-46.7	2.763	-37.0
оквир 4 x 6	4.292	2.339	-45.5	2.763	-35.6
оквир 5 x 6	4.233	2.339	-44.7	2.763	-34.7
оквир 6 x 6	4.192	2.339	-44.2	2.763	-34.1

табела 5.29 Коефицијент  $\beta$  за унутрашње стубове 6.спрата анализираних оквира

6. спрат - унутрашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕСЗ	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
оквир 1 x 6	4.978	2.339	-53.0	2.763	-44.5
оквир 2 x 6	4.557	1.811	-60.3	2.093	-54.1
оквир 3 x 6	4.385	1.811	-58.7	2.093	-52.3
оквир 4 x 6	4.292	1.811	-57.8	2.093	-51.2
оквир 5 x 6	4.233	1.811	-57.2	2.093	-50.6
оквир 6 x 6	4.192	1.811	-56.8	2.093	-50.1

Јасно је да су овом случају јављају значајне разлике при прорачуну према европским и домаћим прописима, тј. да су резултати и више од два пута мањи од оних који су добијени решавањем диференцијалне једначине извијања. Као и у претходном примеру, и овде су разлике за вредност коефицијета  $\beta$  веће за стубове виших спратова.

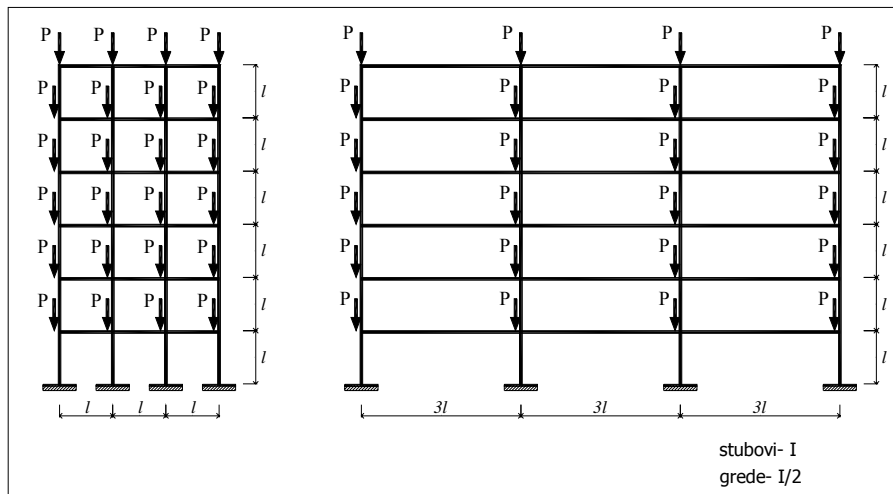
Као илустрација свега наведеног, на слици 5.38 дат је графички приказ резултата за пример шестоспратног оквирног носача са шест поља, тј. седам редова стубова.



слика 5.38 Вредности  $\beta$  за померљиви оквир са шест етажа и шест поља

#### \* Различита дужина греда (тј. растојања између два реда стубова) оквирног носача

У овом делу анализирани су примери код којих је варирана дужина ригли, односно растојање између суседних редова стубова. Истраживано је како то растојање утиче на извијање оквира и како утиче и на тачност приближног прорачуна који је саставни део актуелних прописа. Разматрана су три случаја, и то када је ширина  $l$  (тј. једнака је висини спратова), и када је два и три пута већа од висине спратова, тј.  $2l$  и  $3l$ . Као и у претходним анализама, усвојено је да оквирни носач има шест спратова, и да једнако оптерећење делује на свим етажама. Анализирани примери су приказани на слици 5.39.



слика 5.39 Варирање дужина ригли код оквирних носача

Јасно је да како се повећава растојање између стубова тако је потребна мања критична сила која доводи до извијања оквирног носача. Применом програма ALIN добијени су резултати:

$$\text{Оквир са дужином греда } l: P_{cr} = 0.776 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са дужином греда } 2l: P_{cr} = 0.513 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са дужином греда } 3l: P_{cr} = 0.394 \frac{EI}{l^2}$$

На основу ових резултата израчунате су вредности коефицијената ефективне дужине извијања, па су неки од карактеристичних резултата приказани у табелама 5.30 – 5.33, где су дате и вредности добијене применом анализираних прописа.

Тако су приказани упоредни резултати прорачуна само за први и последњи спрат, и то посебно за ивичне и унутрашње стубове. У табелама 5.30 и 5.31 прво су дате вредности за стубове на првом спрату оквирног носача.

табела 5.30 Коефицијент  $\beta$  за спољашње стубове 1.спрата анализираних оквира

1. спрат - спољашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	ЕСЗ	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
распон - L	1.456	1.429	-1.9	1.527	4.9
распон - 2L	1.790	1.596	-10.8	1.687	-5.8
распон - 3L	2.042	1.687	-17.4	1.766	-13.5



табела 5.31 Коефицијент  $\beta$  за унутрашње стубове 1.спрата анализираних оквира

1. спрат - спољашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
распон - L	1.456	1.277	-12.3	1.363	-6.4
распон - 2L	1.790	1.429	-20.2	1.527	-14.7
распон - 3L	2.042	1.527	-25.2	1.624	-20.5

Приказани резултати показују, као што је и очекивано, да у првој етажи приближни прорачуни дају боље резултате у случају када је оквирни носач са мањим дужинама греда.

У табелама 5.32 и 5.33 дати су резултати за последњи шести спрат. Из тих резултата се јасно види да су грешке у овом случају доста веће него код стубова прве етаже. Тако приближни прорачун који је заступљен у стандардима даје резултате који су и више него два пута мањи од (условно речено) тачних који су израчунати применом програма ALIN. Такође, уочава се да је у овој горњој етажи грешка која се чини при примени прописа практично иста код свих типова анализираних оквира, тј. не зависи од распона између два суседна реда стубова.

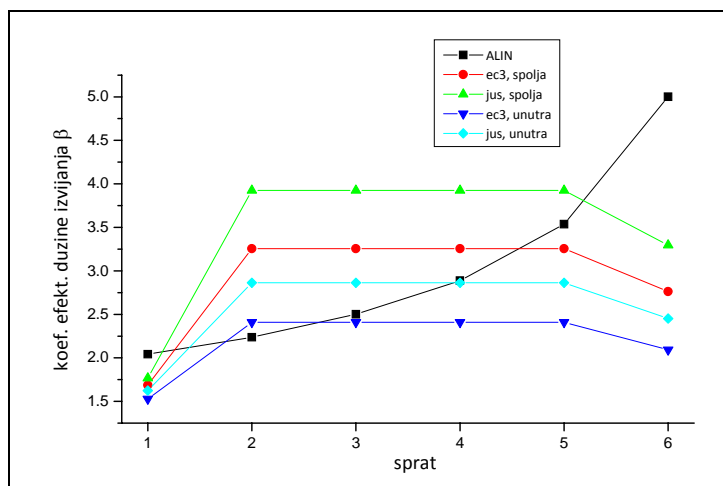
табела 5.32 Коефицијент  $\beta$  за спољашње стубове 6.спрата анализираних оквира

6. спрат - спољашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
распон - L	3.566	1.811	-49.2	2.093	-41.3
распон - 2L	4.385	2.339	-46.7	2.763	-37.0
распон - 3L	5.002	2.763	-44.8	3.296	-34.1

табела 5.33 Коефицијент  $\beta$  за унутрашње стубове 6.спрата анализираних оквира

6. спрат - унутрашњи стубови					
метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)
распон - L	3.566	1.470	-58.8	1.651	-53.7
распон - 2L	4.385	1.811	-58.7	2.093	-52.3
распон - 3L	5.002	2.093	-58.2	2.452	-51.0

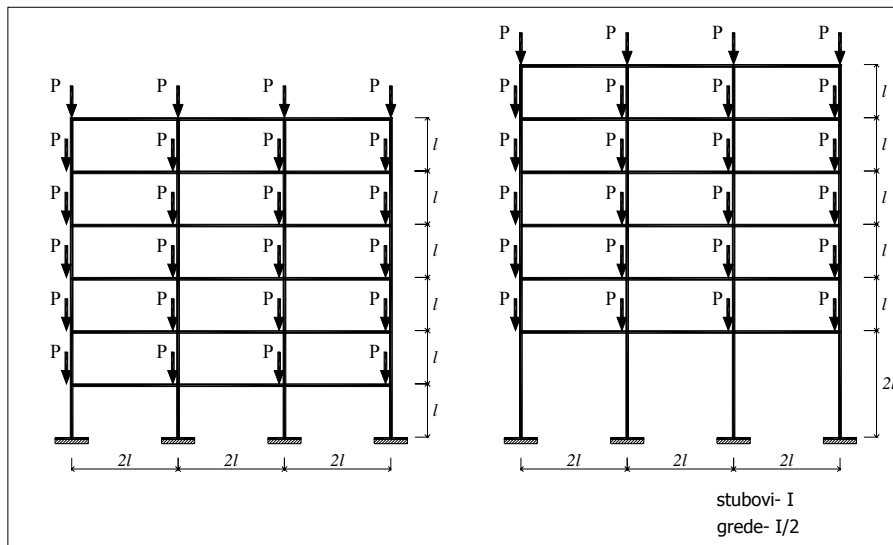
На крају, на слици 5.40 дат је графички приказ резултата за пример оквирног носача са дужином греда  $3l$  (слика 5.39, десно). И из овог графика се такође уочавају разлике у решењима за коефицијент ефективне дужине извијања које се добијају применом актуелних стандарда. Најтачнији резултати се добијају у стубовима прве етаже, док су на горњим спратовима разлике веће.



слика 5.40 Вредности  $\beta$  за шестоспратни померљиви оквир са дужином греда  $3l$

#### \* Различита висина првог спрата оквирног носача

Као што је раније речено, стубови у првој (приземној) етажи су најоптерећенији и може се рећи да они одређују укупну стабилност оквирног носача. Зато је занимљиво да се спроведе анализа у којој се варира њихова висина и да се на основу тога види како то утиче на резултате метода прорачуна које су примењене у овом делу рада. Висина првог спрата је узета у распону од  $l$  (колика је висина и осталих стубова) до  $2l$ . Урађено је укупно шест примера и то са вредностима висине првог спрата:  $l$ ,  $1.2l$ ,  $1.4l$ ,  $1.6l$ ,  $1.8l$  и  $2l$ . Распон греда, као и карактеристике попречних пресека свих елемената су исте као и у претходним случајевима анализе, и то је приказано на слици 5.41.



слика 5.41 Варирање висине првог спрата оквирних носача

Резултати прорачуна критичне силе, према програму ALIN су:

$$\text{Оквир са висином првог спрата } h_1 = l : P_{cr} = 0.513 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са висином првог спрата } h_1 = 1.2 l : P_{cr} = 0.475 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са висином првог спрата } h_1 = 1.4 l : P_{cr} = 0.427 \frac{EI}{l^2}$$

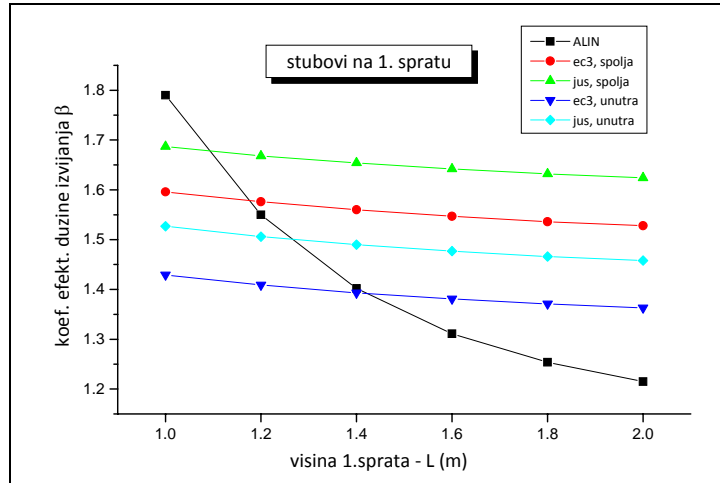
$$\text{Оквир са висином првог спрата } h_1 = 1.6 l : P_{cr} = 0.374 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Оквир са висином првог спрата } h_1 = 1.8 l : P_{cr} = 0.323 \frac{EI}{l^2}$$

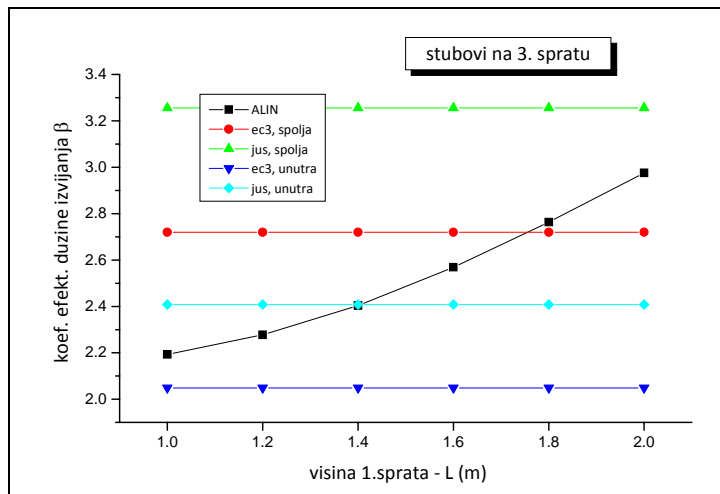
$$\text{Оквир са висином првог спрата } h_1 = 2 l : P_{cr} = 0.278 \frac{EI}{l^2}$$

Неке од карактеристичних вредности коефицијената ефективне дужине извијања које су израчунате на основу ових вредности критичних сила, као и применом стандарда, графички су приказани на сликама 5.42 – 5.44. На овим сликама је дато поређење коефицијената ефективне дужине извијања за први, трећи и последњи (шести) спрат за свих шест анализираних случајева висине оквирног носача.

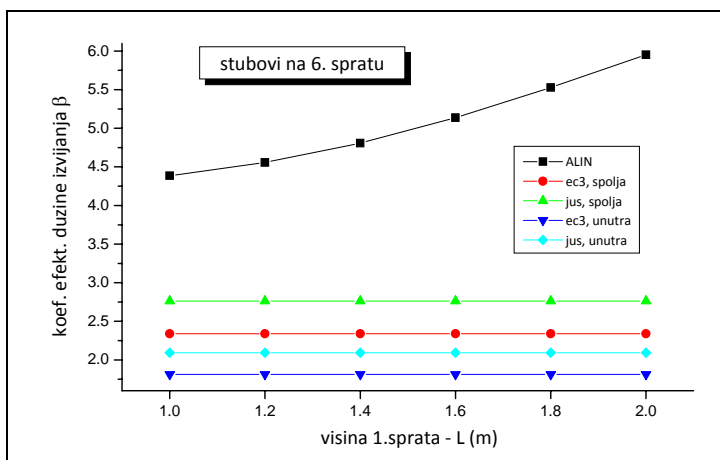
Прво је на слици 5.42 приказан график на коме су дате вредности коефицијента  $\beta$  за стубове на првом спрату.



слика 5.42 Вредности  $\beta$  стубова 1.спрата оквира са различитом висином 1.спрата  
 Резултати за стубове на једном од средишњих спратова (конкретно трећем) и последњем (шестом) спрату дати су на сликама 5.43 и 5.44.



слика 5.43 Вредности  $\beta$  стубова 3.спрата оквира са различитом висином 1.спрата

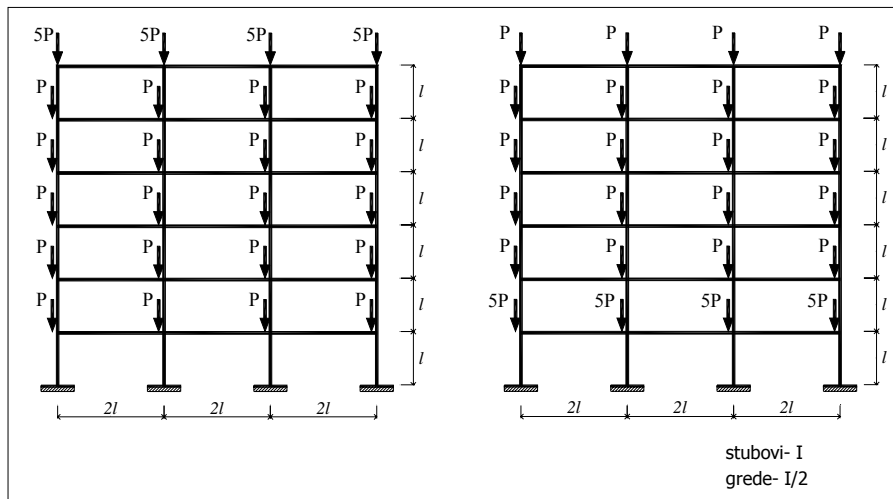


слика 5.44 Вредности  $\beta$  стубова 6.спрата оквира са различитом висином 1.спрата

Као што може да се види са графика на претходним сликама, прорачун према европским и домаћим прописима узима у обзир карактеристике елемената (па самим тим и њихову дужину) тако да вредности  $\beta$  на првом спрату нису константне у свим посматраним случајевима (за разлику од осталих спратова). Међутим ти прорачуни не узимају у обзир вредност аксијалне силе у стубовима па долази до великих одступања у решењима (поготову на вишим спратовима). Интересантно је да у стубовима првог спрата вредност  $\beta$  опада са порастом висине стубова првог спрата, док у осталим спратовима  $\beta$  расте у тим случајевима. То је због тога што је из израза за коефицијент ефективне дужине извијања јасно да је  $\beta$  обрнуто пропорционалну висини стуба, па постоји разлика у решењима када се та висина мења (1. спрат) и када је константна (2 – 6. спрат).

**\* Деловања већег аксијалног оптерећења у различитим спратовима оквирног носача**

У претходним примерима је претпостављено да на свим спратовима делује једнако оптерећење, тако да је у сваком стубу концентрисана сила означена параметром  $P$ . Међутим, занимљиво је посматрати случај када на једном спрату делује знатно веће оптерећење него на осталима. Тако је у овом поглављу анализирано какви се резултати у том случају добијају применом програма ALIN и какве се грешке чине коришћењем приближних поступака који су саставни део прописа. Овде је претпостављено да на једном спрату у сваком стубу делује пет пута веће аксијално оптерећење ( $5P$ ) него на осталим етажама (где делују силе  $P$ ) и приказана је анализа у случајевима када оптерећење већег интензитета делује посебно на свакој од шест етажа. Као што се види на слици 5.45, геометрија оквирног носача као и карактеристике попречних пресека свих елемената усвојени су као и до сада.



слика 5.45 Варирање дејства оптерећења већег интензитета на појединим етажама

Разумљиво је да је оквир нестабилнији када силе  $5P$  делују на вишим етажама. Вредност критичног оптерећења читаве оквирне конструкције, израчуната применом програма ALIN, за свих шест случајева оптерећења износи:

$$\text{Силе } 5P \text{ делују на 6. етажи: } P_{cr} = 0.268 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Силе } 5P \text{ делују на 5. етажи: } P_{cr} = 0.270 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Силе } 5P \text{ делују на 4. етажи: } P_{cr} = 0.274 \frac{EI}{l^2}$$

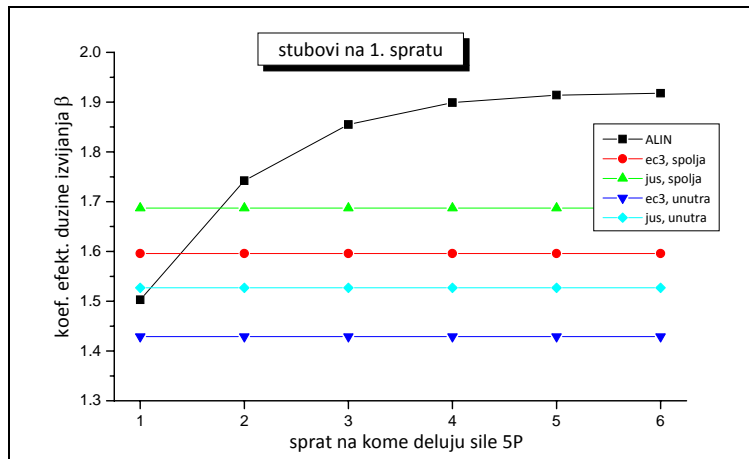
$$\text{Силе } 5P \text{ делују на 3. етажи: } P_{cr} = 0.287 \frac{EI}{l^2}$$

$$\text{Силе } 5P \text{ делују на 2. етажи: } P_{cr} = 0.325 \frac{EI}{l^2}$$

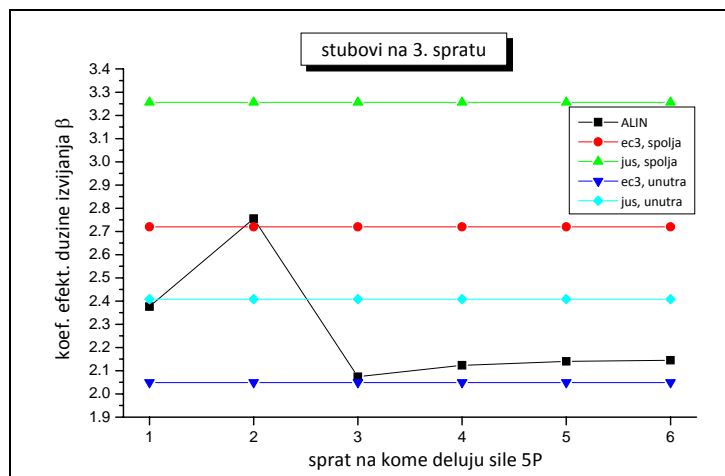
$$\text{Силе } 5P \text{ делују на 1. етажи: } P_{cr} = 0.437 \frac{EI}{l^2}$$

Значи, ови резултати показују да како се „веће“ оптерећење спушта доле, тако се значајно и повећава стабилност носача. На основу добијене критичне силе израчунате су вредности коефицијената ефективне дужине извијања, и неки од резултата графички су приказани на сликама 5.46 – 5.48.

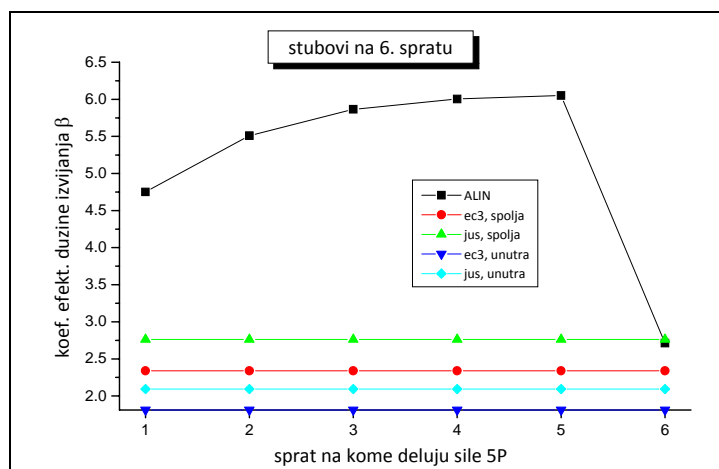
Због ограниченог обима рада, као и у претходним примерима, приказани су само неки од карактеристичних резултата. Тако је дато поређење резултата за стубове на најнижем (првом) спрату, неком од средишњих спратова (трећем спрату) и највишем (шестом) спрату.



слика 5.46 Вредности  $\beta$  стубова 1.спрата оквира са варијацијом деловања оптерећења већег интензитета на појединим етажама



слика 5.47 Вредности  $\beta$  стубова 3.спрата оквира са варијацијом деловања оптерећења већег интензитета на појединим етажама



слика 5.48 Вредности  $\beta$  стубова 6.спрата оквира са варијацијом деловања оптерећења већег интензитета на појединим етажама

Као што је већ речено, код приближног прорачуна на основу прописа коефицијенти ефективне дужине извијања код стубова су исти за свих шест случајева оптерећења зато што се ту не узима у обзир вредност аксијалне силе у стубовима. То је и један од разлога зашто су овде неслагања при том прорачуну у односу на (условно речено) тачан прорачун велика. Код прорачуна који је примењен у програму ALIN, очекивано је добијено да вредност  $\beta$  расте са порастом висине на којој делује оптерећење (пошто се у тим случајевима смањује вредност критичне силе). Међутим, на сликама 5.46 и 5.47 уочава се нагли „пад“ криве која повезује вредности  $\beta$  за различите нивое на којима делује оптерећење од  $5P$ . Јасно је да се то дешава између етажа где се јавља велики скок у вредности аксијалним силама у стубовима, тј. где се јавља разлика за вредност новог оптерећења од  $5P$ . Собзиром да је у изразу (5.3) за израчунавање  $\beta$  вредност аксијалне силе у имениоцу, зато и долази до наглог смањивања вредности коефицијента ефективне дужине извијања.

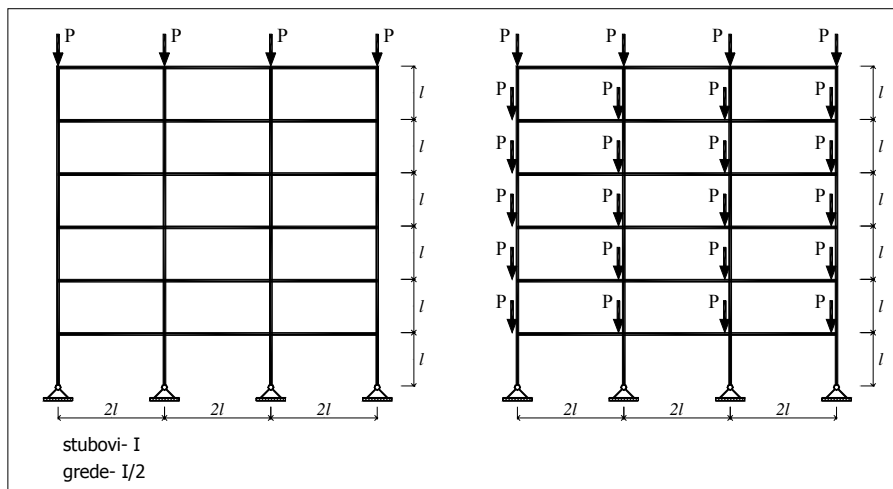
### 5.3.2.5 Зглобно ослоњени вишеспратни оквири

У досадашњем делу рада анализирани су оквири чији су стубови укљештени. Иако је то чешће заступљен начин ослањања у реалним конструкцијама, потребно је разматрати и друге случајеве. Тако ће у овом делу бити анализирани и оквири код којих су стубови зглобно ослоњени на доњем крају. Као и у претходним примерима, и у овом ће бити разматран шестоспратни оквирни носач са три поља (тј. четири реда стубова). Претпостављена је једнака висина стубова на свим спратовима  $l$ , док је распон греда усвојен дупло већи, тј.  $2l$ . Моменат инерције свих стубова је  $I$ , док је за греде узета дупло мања вредност  $I/2$ . Модул еластичности је, код анализе извијања у еластичној области, усвојен константан и износи  $E$ .

Овде су анализирана два случаја оптерећења која су дата на слици 5.49. Прво је разматран случај оквира код кога су константне силе у свим стубовима, тј. оптерећење делује само у највишем нивоу рама. У другом случају оптерећење делује на сваком спрату, тако да се аксијална сила повећава по спратовима гледајући одозго ка доле. Резултати добијени код ових примера упоређени су са



результатима код укљештених оквира који су разматрани у деловима 5.3.2.1 и 5.3.2.2, тј. приказани на сликама 5.25 и 5.29.



слика 5.49 Зглобно ослоњени оквирни носачи

Прорачун је прво спроведен применом програма ALIN. Као што је и очекивано, оквири са зглобно везаним стубовима су знатно нестабилнији од оних који су укљештени. У случају константног оптерећења стубова (оквир на слици 5.49 лево)

критична сила износи:  $P_{cr} = 1.218 \frac{EI}{l^2}$ ,

тако да дужина извијања за све стубове тог оквира износи:

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot EI}{1.218 \frac{EI}{l^2} \cdot l^2}} = 2.846.$$

За укљештен оквир који је исто овако оптерећен, у делу 5.3.2.1 срачуната је критична сила  $P_{cr} = 2.040 \frac{EI}{l^2}$ , као и одговарајући коефицијент  $\beta = 2.199$ .

Из овога се јасно види да је у случају укљештеног оквира критично оптерећење које доводи до извијања око 70% веће у односу на зглобно ослоњен носач.

Када код анализираниг оквирног носача оптерећење делује у сваком нивоу (слика 5.49 десно) логично је да је мање критично оптерећење потребно да изазове нестабилност система. Применом програма ALIN добијена је вредност критичне силе:  $P_{cr} = 0.211 \frac{EI}{l^2}$ .

За разлику од претходног примера, аксијалне силе по спратовима сада нису једнаке, па су и коефицијенти ефективне дужине извијања различити на сваком спрату и износе од  $\beta_1 = 2.795$  на првом спрату до  $\beta_1 = 6.846$  на последњем спрату.

Случај укљештеног оквира са истим оваквим оптерећењем приказан је у делу 5.3.2.2 и тада је добијена критична сила  $P_{cr} = 0.513 \frac{EI}{l^2}$ .

Одавде је очигледно да је у овом случају још већи однос критичне силе укљештеног оквира у односу на зглобно ослоњен и он сада премашује два пута.

Упоредни приказ ових резултата дат је на сликама 5.50 – 5.53.

### Прорачун према ЕС3

Као што је већ речено, приближан прорачун према прописима за анализирани стуб у обзир само узима стубове и греде који су везани у чворовима тог стуба. То значи да се у односу на прорачун укљештеног шестоспратног у оквира у овом случају разликују само вредности  $\beta$  на првом спрату (пошто су различити услови ослањања у нивоу пода). Тако се у овом случају добијају вредности:

\* 1. спрат – спољашњи стубови

$$\eta_1 = 1 \text{ (зглобна веза)}, \eta_2 = 0.8421 \Rightarrow \beta_{1,s} = 4.099$$

\* 1. спрат – унутрашњи стубови

$$\eta_1 = 1 \text{ (зглобна веза)}, \eta_2 = 0.7273 \Rightarrow \beta_{1,u} = 3.225$$

### Прорачун према ЈУС-у

Пошто се домаћи прописи базирају на истим теоријским претпоставкама као и европски, и у овом случају се разликују само вредности коефицијента ефективне дужине извијања за стубове на првом спрату. Тако се добија:

\* 1. спрат – спољашњи стубови

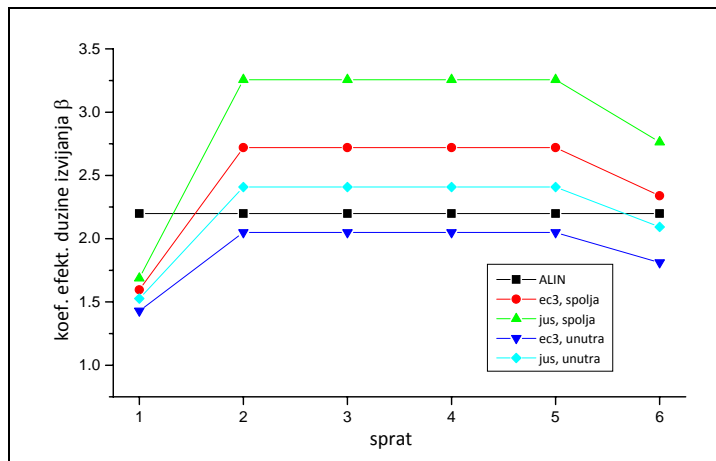
$$\eta_A = 1 \text{ (зглобна веза)}, \eta_B = 0.9231 \Rightarrow \beta_{1,s} = 4.817$$

\* 1. спрат – унутрашњи стубови

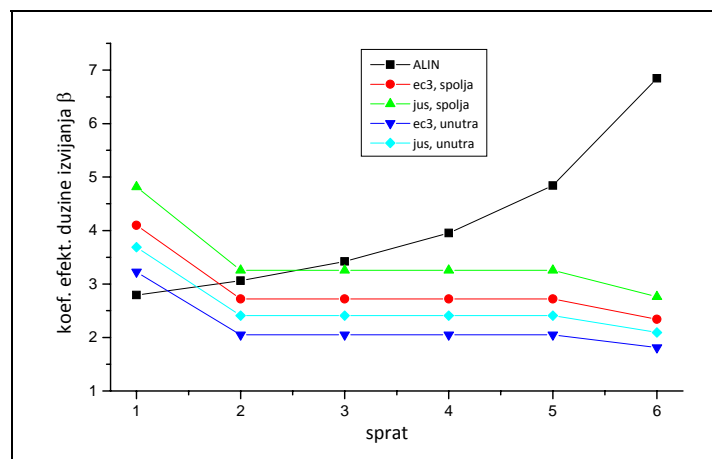
$$\eta_A = 1 \text{ (зглобна веза)}, \eta_B = 0.8571 \Rightarrow \beta_{1,u} = 3.687$$

Као што је већ речено европски и домаћи прописи не узимају у обзир промену вредности аксијалне силе у стубовима. Тако ове добијене вредности важе и када у штаповима делује константана сила и када је аксијално оптерећење делује у нивоу сваке етаже.

Рекапитулација карактеристичних резултата, заједно са резултатима применом матричне анализе, приказана је на сликама 5.50 – 5.53.



слика 5.50 Коefицијент  $\beta$  за шестоспратни оквир са слике 5.49 лево

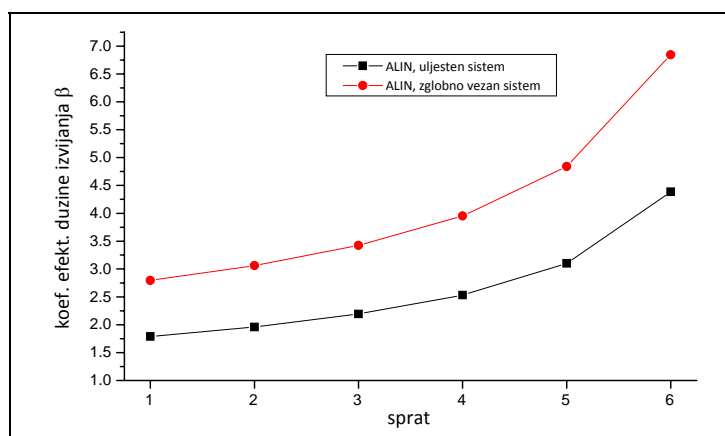


слика 5.51 Коefицијент  $\beta$  за шестоспратни оквир са слике 5.49 десно

На слици 5.50 приказано је поређење резултата применом програма ALIN и прописа у случају константног оптерећења у стубовима зглобно ослоњеног оквира, док су за случај скоковитог оптерећења у стубовима резултати дати на слици 5.51. Као и у случају укљештеног оквира јасно је да до поклапања резултата долази када оптерећење делује само на врху оквирног носача, тј. када је сила у

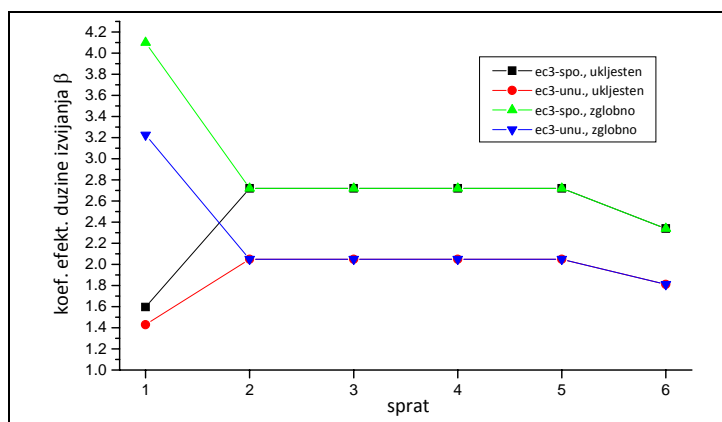
свим стубовима константна. То је због тога што приближан прорачун који је заступљен у прописима не узима у обзир промену аксијалне силе у стубовима. Зато у случају где постоји разлика у аксијалном оптерећењу стубова по етажама долази до већих грешака применом приближног поступка.

У наставку је приказано поређење резултата анализе стабилности укљештених и зглобно везаних оквирних носача. У сваком случају је интересантније посматрати случај када оптерећење делује у сваком спрату шестоспратног носача са три поља. Тако је на слици 5.52 дат упоредни приказ коефицијената ефективне дужине извијања израчунатих применом програма ALIN.



слика 5.52 Коефицијент  $\beta$  добијен применом програма ALIN за стубове укљештеног и зглобно ослоњеног оквира

Као што је већ речено, јасно је да зглобно ослоњени оквири имају мању крутост од укљештених, тако да им је критична сила мања и самим тим коефицијент ефективне дужине извијања већи на свим спратовима.



слика 5.53 Коефицијент  $\beta$  добијен применом прописа за стубове укљештеног и зглобно ослоњеног оквира

Већ више пута је показано да европски и домаћи прописи за челичне конструкције дају сличне резултате, пошто се и базирају на истим претпоставкама. Зато је у овом случају на слици 5.53 приказано само поређење резултата европских прописа за зглобно ослоњене и укљештене оквире.

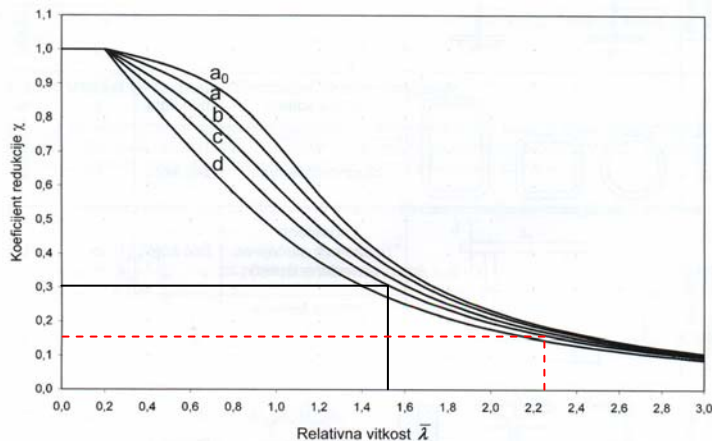
Одавде је јасно да се резултати за оба анализирана статичка система разликују само на првом спрату. Разлог томе је што се при рачунању коефицијената расподеле  $\eta$  у разматрање узима једино чињеница да ли је доњи чвор стуба укљештен или зглобно везан. Управо ово занемаривање посматрања оквирног носача у целини је један од главних разлога грешака које се чине при прорачуну коришћењем прописа.

На крају анализе зглобно везаних шестоспратних оквира поново је приказано како грешке у израчунатим дужинама извијања имају последице на прорачун носивости аксијално притиснутих стубова. Разматран је шестоспратни оквир код кога оптерећење делује у нивоу сваке етаже, слика 5.49 десно. У наведеном прорачуну је за материјал узет челик са истим карактеристикама као и у претходном делу овог рада. Усвојени су нешто крући стубови, тј. висине  $l = 4\text{m}$  (значи да су греде распона  $2l = 8\text{m}$ ) и попречног пресека 2 [30 ( $A = 0.0118\text{ m}^2$ ,  $I = 0.00007257\text{ m}^4$ ), а важи као и до сада да је  $I_{gr} = I_{st}/2$ . Релативна виткост за најоптерећеније стубове у првој (приземној) етажи износи:

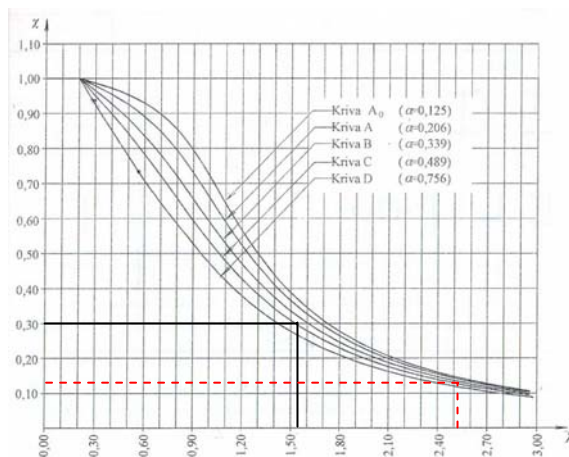
$$P_{cr} = 0.211 \frac{EI}{l^2} = 200.97\text{ kN} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{6 \cdot P_{cr} \cdot l^2}} = 2.795$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{min}} = \frac{2.795 \cdot 4}{0.0784} = 142.60 \Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{142.60}{92.93} = 1.534$$

Истим поступакотом добијене су и вредности за релативне виткости када су ефективне дужине извијања израчунате на основу приближног поступка из европских и домаћих стандарда. На слици 5.54 приказана су решења Еврокода 3, а на слици 5.55 решења ЈУС стандарда. У овом примеру пуном линијом су означени резултати добијени применом програма ALIN, док су испрекиданом линијом приказани резултати за спољашње стубове првог спрата који су проистекли из прописа.



слика 5.54 Одређивање коефицијента  $\chi$  према ЕС3  
(1.спрат оквира са слике 5.49 десно)



слика 5.55 Одређивање коефицијента  $\chi$  према ЈУС-у  
(1.спрат оквира са слике 5.49 десно)

Са слика 5.54 и 5.55 види се колике разлике се добијају при прорачуну носивости зглобно ослоњених шестоспратних померљивих оквира. За разлику од укљештених носача (слике 5.31 и 5.32) овде се применом прописа добијају мање вредности за коефицијент извијања  $\chi$ , односно носивост стубова, него у случају примене методе коначних елемената.

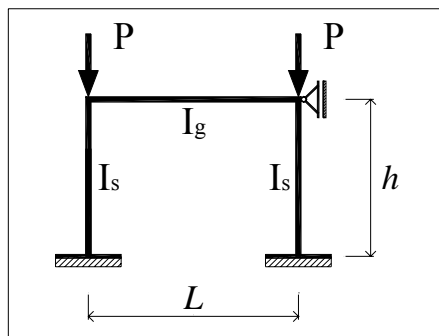
На крају овог дела, треба још напоменути да с обзиром да конструкције са оваквим статичким системом имају велику виткост, њихово извијање се дешава у еластичној области.

### 5.3.3 ЈЕДНОСПРАТНИ ОКВИР СА НЕПОМЕРЉИВИМ ЧВОРОВИМА

При анализи стабилности, како челичних тако и бетонских конструкција, посебно се разматра случај оквира са померљивим, а посебно оквира са непомерљивим чворовима. Зато ће и у овом раду бити анализирана оба случаја. У досадашњем делу овог поглавља детаљно су разматрани оквири са померљивим чворовима који су важнији за анализу овог типа јер је код њих израженији проблем стабилности.

У овом делу је приказано неколико карактеристичних примера оквира са непомерљивим чворовима, где ће, као и у претходним случајевима, пажња бити усмерена на изразе које се односе на прорачун дужине извијања, као основног податка који се користи у прорачуну аксијално притиснутих штапова.

Прво је анализиран најједноставнији једноспратни оквир са два реда стубова (тј. једним распоном) који је симетрично оптерећен силама притиска  $P$ , као што се види на слици 5.56.



слика 5.56 Једноспратни оквир са непомерљивим чворовима

Као и у делу 5.3.1 код померљивих система, и овде је спроведен прорачун за различите односе крутости стубова и греда, где је овај однос приказан преко параметра  $c$ :

$$c = \frac{k_{st}}{k_{gr}} = \frac{I_s/h}{I_g/L} = \frac{I_s}{I_g} \cdot \frac{L}{h}$$

#### Прорачун применом програма ALIN

Критична сила овог једноспратног оквира са непомерљивим чворовима израчуната је за све претпостављене вредности коефицијента  $c$ . Тако се нпр. за случај  $c = 1$  добија:

$P_{cr} = 25.210 \frac{EI}{l^2}$ , где су усвојене ознаке за карактеристике стубова:  $I_s = I$  и  $h = l$ .

Коефицијент ефективне дужине извијања стубова у овом случају износи:

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} \cdot l^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot EI}{25.210 \frac{EI}{l^2} \cdot l^2}} = 0.626$$

Приказ резултата за остале случајеве је дат је касније у табели 5.34, као и графички на слици 5.57.

### Прорачун према ЈУС-у и ЕС3

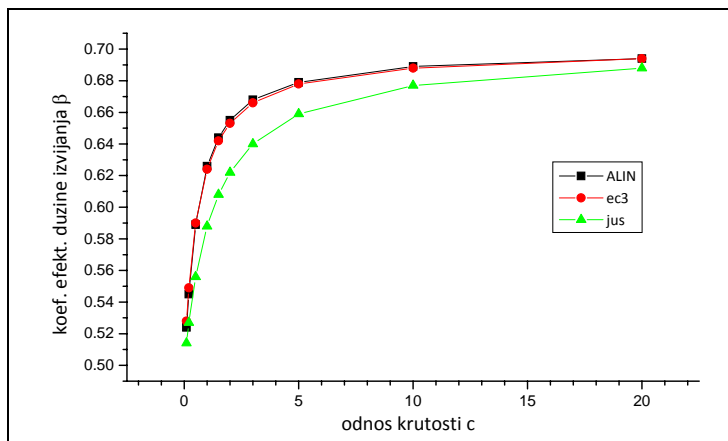
На сличан начин како и код носача са померљивим чворовима, и овде се применом приближних формула из прописа може израчунати тражени коефицијент ефективне дужине извијања. Део европских прописа за челичне конструкције (Eurocode 3), као и домаћих ЈУС стандарда који се овде користе дати је Анексу овог рада. Израчунате вредности коефицијента  $\beta$  за анализиране односе крутости стубова и греде приказани су у табели 5.34.

табела 5.34 Коефицијент  $\beta$  за стубове оквира са слике 5.56

метод прорачуна	ALIN	ЕС3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)	
коефицијент $\beta$	0.1	0.524	0.528	0.76	0.514	-1.91
	0.2	0.545	0.549	0.73	0.527	-3.30
	0.5	0.589	0.590	0.17	0.556	-5.60
	1.0	0.626	0.624	-0.32	0.588	-6.07
	1.5	0.644	0.642	-0.31	0.608	-5.59
	2.0	0.655	0.653	-0.31	0.622	-5.04
	3.0	0.668	0.666	-0.30	0.640	-4.19
	5.0	0.679	0.678	-0.15	0.659	-2.95
	10.0	0.689	0.688	-0.15	0.677	-1.74
	20.0	0.694	0.694	0.00	0.688	-0.86

Графички приказ ових резултата дат је на слици 5.57.

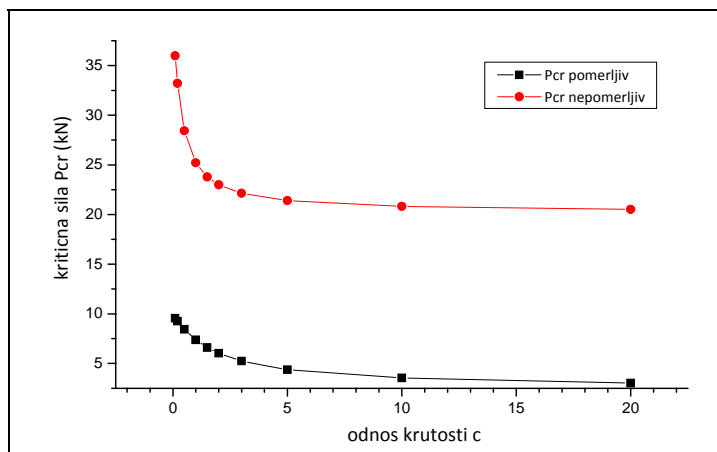




слика 5.57 Зависност  $c - \beta$  код једносратног оквира са непомерљивим чворовима

Европски прописи (EC3) практично дају тачна решења, док је код домаћих прописа (JUS) разлика у односу на решење применом програма ALIN мала. Зато може да се каже да у овим случајевима једноставних једносратних оквира примена приближних поступака заступљених у прописима даје практично тачна решења.

На слици 5.58 дат је упоредни приказ вредности критичне силе померљивих и непомерљивих једносратних носача, за различите вредности усвојеног коефицијента  $c$ , израчунт применом програма ALIN.



слика 5.58 Зависност  $P_{cr} - c$  за једносратне померљиве и непомерљиве оквире

На овом графичком приказу резултата јасно се уочава колико су непомерљиви системи стабилнији, тј. колико је већа критична сила потребна за извијање оваквих система.

Као контрола овог прорачуна може се узети јако мала крутост греде у односу на стубове и проверити да ли се тада стубови понашају као да греда нема утицаја на њих, тј. проверити да ли решење одговара основним Ојлеровим случајевима.

Тако за случај оквира са померљивим чворовима добијамо:

$$\text{- за } c = 100 : P_{cr} = 2.586 \frac{EI}{l^2}, \text{ док за } c = 1000 : P_{cr} = 2.479 \frac{EI}{l^2}.$$

Код првог Ојлеровог случаја (конзола) – слика 5.19, познато је да је коефицијент ефективне дужине извијања  $\beta = 2.0$ , тако да би се критична сила добила:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_i^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2 \cdot l)^2} = 2.467 \frac{EI}{l^2}, \text{ што одговара горњем решењу.}$$

Код оквира са непомерљивим чворовима је израчунато:

$$\text{- за } c = 100 : P_{cr} = 20.270 \frac{EI}{l^2}, \text{ а за } c = 1000 \text{ се добија: } P_{cr} = 20.214 \frac{EI}{l^2}.$$

Овај пример одговара Ојлеровом случају са укљештењем на једном крају и покретним ослонцем на другом крају (слика 5.19), тако да је у том случају коефицијент ефективне дужине извијања  $\beta = 0.7$ . Тада одговарајућа критична сила износи:

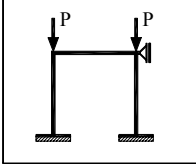
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_i^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7 \cdot l)^2} = 20.142 \frac{EI}{l^2}, \text{ што практично опет доводи до поклапања решења.}$$

У поглављу 5.1 је показано да је феномен извијања у нееластичној области израженији код оквира са непомерљивим чворовима у односу на оне са померљивим чворовима. Зато ће у овом делу бити приказана и еласто-пластична анализа стабилности једносратног оквира на слици 5.56.

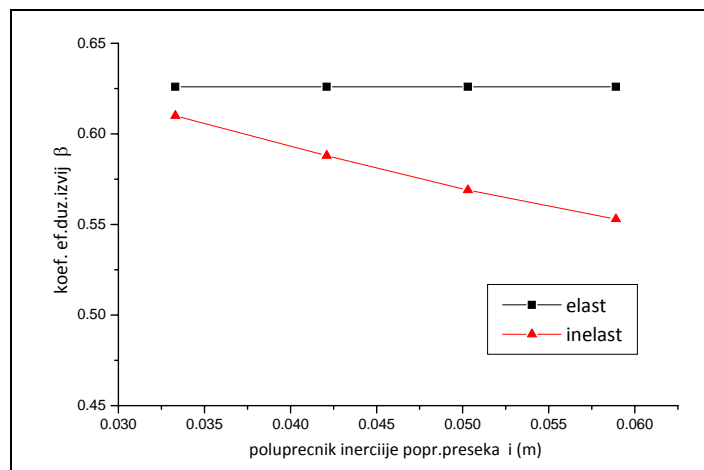
И у овом случају је усвојено да су елементи система направљени од челика  $\check{C}0361$  са карактеристикама  $E=210,000,000 \text{ kN/m}^2$  и  $\sigma_v=240,000 \text{ kN/m}^2$ . Опет је узето да су стубови и греде исте дужине и пресека (тј.  $c = 1$ )  $h = L = 5 \text{ m}$ .

Резултати овог прорачуна за четири попречна пресека, који су разматрани у претходним поглављима овог рада, приказани су у табели 5.35.

табела 5.35 Резултати за  $P_{cr}$ ,  $\beta$  и  $E_t$  за анализиране примере једносратног оквира са непомерљивим чворовима

		$\beta_{el}$	$P_{cr,inel}$ (kN)	$E_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\beta_{inel}$
	2[ 8	0.626	399.33	154,820,987	0.610
	2[12		701.04	101,666,036	0.588
	2[16		1045.25	70,626,233	0.569
	2[20		1447.18	50,080,703	0.553

Анализом добијених резултата може се уочити следеће. У еластичној анализи коефицијент ефективне дужине извијања не зависи од изабраног попречног пресека, тј. има исту вредност у свим анализираним случајевима. Код еласто-пластичне анализе стабилности, коефицијент  $\beta$  зависи од изабраног попречног пресека. Према изразу (5.4)  $\beta_{inel}$  је директно пропорционалан корену тангентног модула ( $E_t$ ), а обрнуто пропорционалан корену добијене критичне силе ( $P_{cr,inel}$ ). Тако се, што је попречни пресек „крући“ добија мања вредност коефицијената ефективне дужине извијања. На слици 5.59 су и графички упоређени ови резултати.

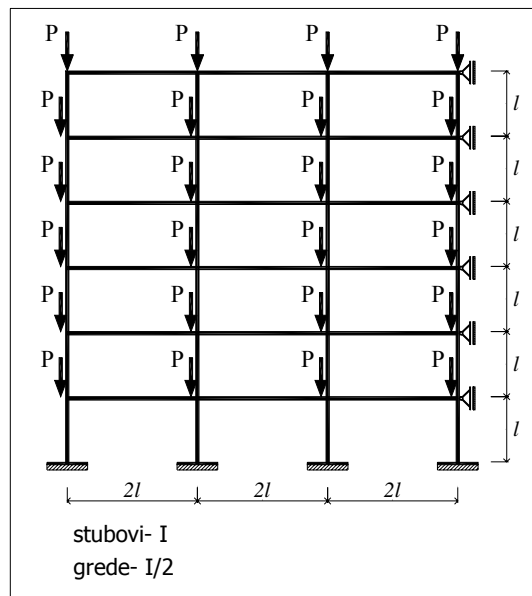


слика 5.59 Поређење вредности  $\beta$  за једносратни оквир са померљивим и непомерљивим чворовима

На крају анализе стабилности у делу 5.3.4 биће анализирани и вишесратни оквирни носачи са непомерљивим чворовима.

### 5.3.4 ВИШЕСПРАТНИ ОКВИРИ СА НЕПОМЕРЉИВИМ ЧВОРОВИМА

И у овом случају анализиран је шестоспратни носач са четири реда стубова, код кога једнако оптерећење делује на свим етажама. Ради једноставнијег поређења резултата сви подаци су задати у параметарском облику. Анализиран оквир је приказан на слици 5.60.



слика 5.60 Шестоспратни непомерљиви оквир са скоквитом аксијалном силом у стубовима

#### Прорачун применом програма ALIN

Применом еластичне анализе стабилности у програму ALIN критична сила у овом случају износи:  $P_{cr} = 2.935 \frac{EI}{l^2}$ .

Вредности коефицијента  $\beta$  за стубове на свих шест спратова приказане су у табелама 5.36 и 5.37.

#### Прорачун према ЕС3 и према ЈУС-у

Применом приближних формула из европских и домаћих прописа и овде су израчунати коефицијенти ефективне дужине извијања. Ти резултати су такође приказани у табелама 5.36 и 5.37 и то посебно за спољашње (ивичне) и унутрашње стубове. Као и у претходим случајевима дата је релативна разлика у резултатима (у процентима) при прорачуну према прописима у односу на решење добијено применом матричне анализе у програму ALIN.

табела 5.36 Коефицијент  $\beta$  за спољашње стубове оквира са слике 5.60

спољашњи стубови						
метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)	
спрат	1	0.749	-8.4	0.672	-10.3	
	2	0.820	15.5	0.917	11.8	
	3	0.917	0.947	3.3	0.917	0.0
	4	1.059	0.947	-10.6	0.917	-13.4
	5	1.297	0.947	-27.0	0.917	-29.3
	6	1.834	0.926	-49.5	0.886	-51.7

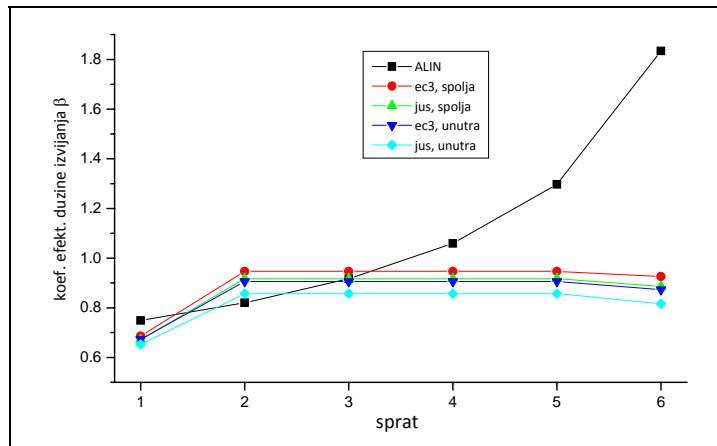
табела 5.37 Коефицијент  $\beta$  за унутрашње стубове оквира са слике 5.60

унутрашњи стубови						
метод прорачуна	ALIN	EC3	разлика (%)	ЈУС	разлика (%)	
спрат	1	0.749	-10.2	0.652	-13.0	
	2	0.820	10.5	0.857	4.5	
	3	0.917	0.906	-1.2	0.857	-6.5
	4	1.059	0.906	-14.5	0.857	-19.1
	5	1.297	0.906	-30.5	0.857	-33.9
	6	1.834	0.873	-52.4	0.816	-55.5

Графички приказ резултата из ове две табеле је дат на слици 5.61.

Прегледом ових резултата лако се може уочити да прорачун према прописима за оквира са непомерљивим чворовима даје резултате за коефицијенте ефективне дужине извијања који су мањи од 1. За разлику од тога, код прорачуна применом сопственог програма ALIN, који је описан у овом раду, добијају се и коефицијенти који су (на вишим спратовима) и већи од 1. Наиме, познато је да геометријска интерпретација дужине извијања, изведена из основних Ојлерових случаја стабилности, представља растојање превојних тачака или дужину полуталаса извијеног облика штапа. Очигледно је да она остаје у важности само код симетричних једносратних оквира. Код сложенијих оквирних система, дужина извијања нема више такву геометријску интерпретацију, већ само представља еквивалентну дужину која се одређује на основу познате критичне силе. Зато је могуће да се тачним прорачуном, за оквира са непомерљивим

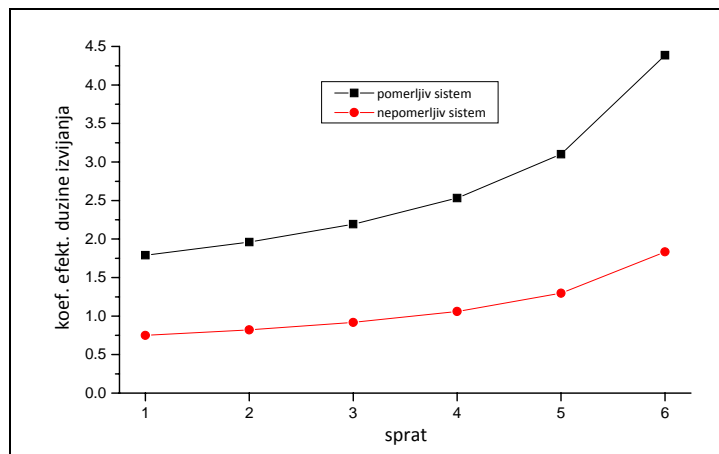
чворовима, могу добити коефицијенти ефективне дужине извијања стубова који су и већи од 1.



слика 5.61 Рекапитулација вредности  $\beta$  за шестоспратни оквир са слике 5.60

Јасно је да европски и домаћи прописи дају сличне резултате код носача са непомерљивим чворовима, и не праве велику разлику између резултата за ивичне и средишње стубове на истој етажи.

На слици 5.62 приказан је још један график на коме су дати упоредни резултати за коефицијенте ефективне дужине извијања штапова за шестоспратни оквир са непомерљивим и померљивим чворовима у случају приказаног оптерећења које делује на свакој етажи.



слика 5.62 Поређење вредности  $\beta$  за шестоспратне оквире са померљивим и непомерљивим чворовима (слике 5.29 и 5.60)

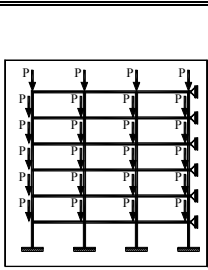
Пошто је за исти оквир са непомерљивим чворовима (из овог примера) критична сила скоро шест пута већа у односу на исти такав са померљивим чворовима (део 5.3.2.2), овакви резултати за коефицијент  $\beta$  су и очекивани.

Као што је раније речено, у актуелним прописима су приказана решења која се добијају анализом еластичне стабилности. Зато су та решења и упоређена са резултатима програма ALIN где је добијена „еластична“ критична сила, тј. претпостављено је да је модул еластичности све време константан. Међутим, као што је већ показано у делу 5.1.5, код вишеспратних оквирних носача са непомерљивим чворовима стубови се често извијају у нееластичном подручју. Зато је овде спроведен и тај начин прорачуна.

Посматран је пример где су усвојене димензије елемената као и раније: стубови су висина  $l = 5\text{m}$ , а греде дужина  $2l = 10\text{m}$ . Карактеристике материјала су  $E=210,000,000\text{kN/m}^2$  и  $\sigma_v=240,000 \text{ kN/m}^2$ . Ради поређења добијених резултата, прорачун је спроведен за свих шест досада анализираних попречних пресека.

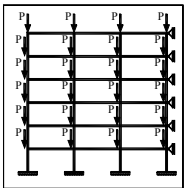
Детаљн приказ резултата за најоптерећеније стубове (на првој етажи) је дат у табели 5.38.

табела 5.38 Резултати за  $P_{cr}$ ,  $\beta$  и  $E_t$  за стубове 1.спрата анализираниг оквира са непомерљивим чворовима на слици 5.60

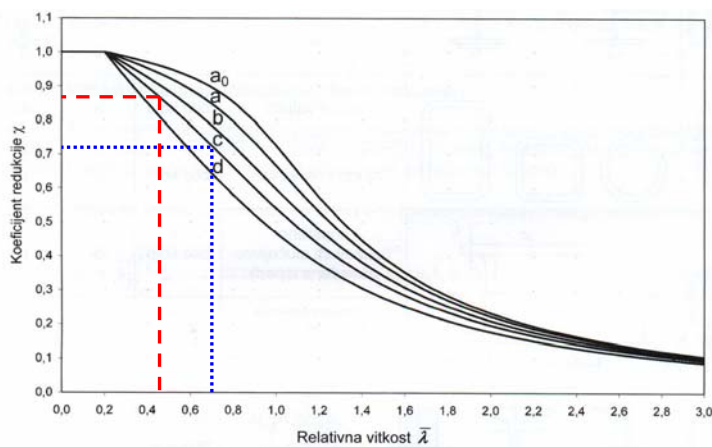
		$\beta_{el}$	$P_{cr,inel}$ (kN)	$E_t$ (kN/m <sup>2</sup> )	$\beta_{inel}$
 <b>1.спрат</b>	2[C 8]	0.749	57.64	189,812,194	0.726
	2[C12]		113.67	115,288,933	0.635
	2[C16]		176.35	62,886,369	0.533
	2[C20]		243.19	44,356,530	0.518
	2[C26]		372.07	29,994,653	0.509
	2[C30]		457.51	24,997,478	0.511

У табели 5.39 приказани су вредности коефицијента  $\beta$  за стубове свих етажа овог непомерљивог шестоспратног оквирног носача. Може се видети колике се разлике добијају када се прорачун врши у еластичној, односно еласто-пластичној области.

табела 5.39 Вредности  $\beta$  за стубове на свим спратовима оквира на слици 5.60

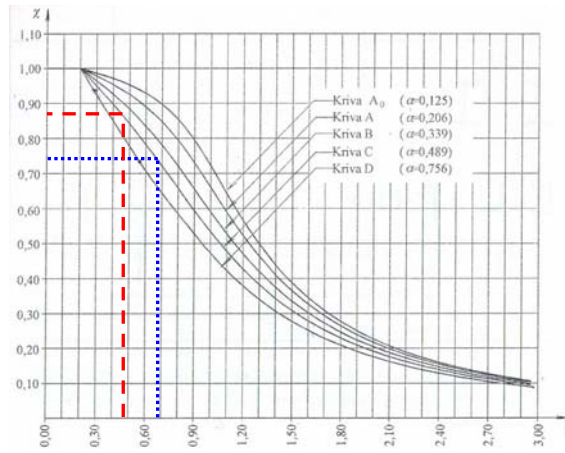
		$\beta_{el}$	2Г 8	2Г12	2Г16	2Г20	2Г26	2Г30
	$\beta_{in,1}$	0.749	0.726	0.635	0.533	0.518	0.509	0.511
	$\beta_{in,2}$	0.820	0.833	0.863	0.905	1.012	1.176	1.278
	$\beta_{in,3}$	0.917	0.936	1.042	1.163	1.334	1.583	1.734
	$\beta_{in,4}$	1.059	1.080	1.195	1.374	1.592	1.905	2.093
	$\beta_{in,5}$	1.297	1.323	1.484	1.557	1.814	2.180	2.398
	$\beta_{in,6}$	1.834	1.871	2.098	2.388	2.762	2.424	2.669

На сликама 5.63 и 5.64 приказане су криве извијања за стубове прве етажне са попречним пресеком 2 Г20 ( $i = 0.0589 \text{ m}$ ). Решења добијена на основу еластичне, односно нееластичне анализе приказана су тачкастом, односно испрекиданом линијом.



слика 5.63 Одређивање коефицијента  $\chi$  према ЕС3 за 1.спрат оквира са слике 5.60





слика 5.64 Одређивање коефицијента  $\chi$  према ЈУС-у за 1.спрат оквира са сл.5.60

Очигледно је да се чини значајна грешка у прорачуну носивости стуба, уколико се уместо тачне вредности за  $\beta$  односно  $\bar{\lambda}$  које одговарају извијању у пластичној области користе вредности које одговарају извијању у еластичној области како је то дефинисано постојећим стандардима.

## 6. ЗАКЉУЧАК

На основу резултата који су добијени у овире ове дисертације, може се закључити следеће:

Досадашња анализа и прорачун стабилности оквирних конструкција заснива се првенствено на концепту прорачуна који се састоји у томе да се из конструкције као целине издвајају поједини изоловани штапови и на тај начин формирају једноставни рачунски модели. Ови модели затим омогућују да се до критичне силе, односно дужине извијања појединих штапова дође релативно лако помоћу одговарајућих дијаграма и приближних формула. Такав приступ коришћен је као основа за формирање националних, па и европских стандарда, како би се инжењерима у пракси омогућило да на брз и једноставан начин дођу до неопходних података за прорачун инжењерских конструкција. У овире ове дисертације показано је да такав „пешачки“ поступак, када су у питању оквирне конструкције, има бројне недостатке, пре свега са аспекта његове тачности и да га је потребно заменити савременијим начином прорачуна.

Може се констатовати да су већ двадесетак и више година уназад персонални рачунари постали доступно и незаобилазно средство великог броја грађевинских инжењера, а одговарајући рачунарски програми су све квалитетнији и комплекснији омогућавајући формирање интегралних рачунских модела комплетних конструкција. Тиме је потреба за коришћењем једноставних рачунских модела који дају само приближна решење проблема стабилности увелико изгубила у значају. Зато је у овој дисертацији предложен прорачун који се заснива на анализи глобалне стабилности оквирне конструкције и, у првом кораку, одређивању критичне силе за конструкцију у целини. Затим се у наставку одређују критичне силе, односно дужина извијања појединих притиснутих штапова и то на бази односа између укупне критичне силе у конструкцији и нормалне силе у појединим штаповима.

Предложени поступак није непознат, али начин како је он овде формулисан и спроведен није до сада примењен ни у једном од комерцијалних програма који се баве стабилношћу оквирних носача. Наиме, у тим програмима анализа стабилности заснована је на матричној једначини где осим класичне линеарне матрице крутости фигурише и геометријска матрица крутости која зависи од нормалних сила у штаповима. Инерполационе функције за коначне елементе усвајају се као кубни (Ермитови) полиноми који се добијају из решења диференцијалне једначине савијања греде по теорији првог реда. У питању је значи приближно решење, јер је проблем бифуркационе стабилности по својој суштини геометријски нелинеаран и захтева примену теорије другог реда. Ово приближно решење зато тражи да се дуж сваког штапа усвоји минимално по четири или, још боље, и више коначних елемената да би се добили прихватљиво тачни резултати у одређивању критичног оптерећења. Са друге стране, треба напоменути да су ресурси рачунара све већи, тако да није посебан проблем да се решавају овако велики проблеми са огромним бројем једначина. Ипак, као алтернатива овом приближном решењу, у дисертацији је предложен поступак прорачуна где се за интерполационе функције усвајају решења која се добијају из диференцијалне једначине савијања штапа по теорији другог реда. То има за последицу да се уместо кубних полинома сада јављају инерполационе функције, и то у облику тригонометријских функција за притиснуте штапове и хиперболничних функција за затегнуте штапове. У овом случају је довољно да се усвоји само по један коначни елемент дуж сваког штапа у оквирној конструкцији, чиме се драстично смњује бој непознатих, односно једначина у методи коначних елемената. Управо је и то главна предност овог поступка прорачуна и формираног програма ALIN у односу на уобичајени поступак који користе постојећи комерцијални програми. Наравно има и програма који могу да анализирају велика померања и обртања, односно посткритичну конфигурацију, “snap trough buckling”, итд. али то нису инжињерски програми за практичне примене.

У циљу да ова дисертација има већи практичан значај за наше инжењере-пројектанте, по први пут код нас овде је детаљно испитивана тачност решења која су дата у нашим ЈУС и ЕС3 стандардима, а односе се на дужине извијања притиснутих штапова оквирних носача. Анализирани су једносpratни и

вишеспратни оквири са непомерљивим и померљивим чворовима. Испитиван је утицај већег броја параметара на величину критичне силе, као што су начин ослањања, геометрија носача, врста оптерећења итд. Применом предложене методе показано је да се у појединим случајевима чине значајне грешке ако се користе постојећи изрази и дијаграми дати у нашим стандардима. То значи да је потребно прићи иновацији ових стандарда на начин како је то, на пример, овде предложено, како би се нашим инжењерима у пракси омогућио тачнији начин прорачуна. Паралелно са ЈУС стандардима, у овој дисертацији испитивана је и тачност решења која су дата у европским стандардима ЕС3. Резултати указују да су и у тим стандардима потребне значајне промене у начину прорачуна стабилности оквирних носача, јер се применом постојећих решења чине грешке које су реда величине као и у нашим стандардима. У том смислу већ су учињени кораци за измену и ових европских стандарда, посебно у делу који се односи на сложене деформабилне конструкције где се захтева прорачун по теорији другог реда.

Предложени поступак прорачуна у овом раду коришћен је и за еласто-пластичну анализу када се у прорачун осим геометријске уводи и материјална нелинеарност. Изведене су матрице крутости коришћењем тангентног модула еластичности који прати промену крутости штапа у нееластичној области. Применом програма ALIN показано је да се могу срачунати криве извијања у пластичној области, које иначе служе за одређивање носивости штапа. Треба истаћи да се у напред наведеним стандардима критична сила у пластичној области одређује само приближним прорачуном. Он се састоји у томе да се прво одреди критична сила као да се штап извија у еластичној области, а затим се коришћењем кривих извијања које су у стандардима дефинисане преко приближних (емпиријских) израза, одређује критична сила у пластичној области. Допринос ове дисертације састоји се у томе што се на основу формираног алгоритма прорачуна који је имплементиран у програму ALIN овај приближан „мешовит“ замењује тачнијим. Наиме, коришћењем овог програма могу се срачунати тачне криве извијања не само у еластичној већ и пластичној области. Тиме је омогућено праћење феномена губитка стабилности оквирне конструкције и у пластичној области и директно одређивање критичне силе при њеном колапсу.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Allen H.G., Bulson P.S. (1980), "Background to buckling", McGraw Hill, U.K.
- [2] Wood R.H. (1974), "Effective lengths of columns in multi-storey buildings", Structural Engineer, Vol.52, Iss.7,8,9 pp.235-244, 295-302, 341-346.
- [3] European Convention for Constructional Steelwork (ECCS) (1978), "European recommendations for steel structures".
- [4] Horne M.R., Merchant W. (1965), "The stability of frames", Pergamon, Oxford.
- [5] White D., Hajjar J., (1997), "Buckling Models and Stability Design of Steel Frames: a Unified Approach", Journal of Constructional Steel Research, Vol.42, Iss.3, pp.171-207.
- [6] White D., Hajjar J., (1997), "Accuracy and simplicity of alternative procedures for stability design of steel frames", Journal of Constructional Steel Research, Vol.42, Iss.3, pp.209-261.
- [7] Horne M.R., (1975), "An approximate method for calculating the elastic critical loads of multi-storey plane frames", Structural Engineer, Vol.56, Iss.6, pp.242-248.
- [8] Stevens L.K., (1967), "Elastic stability of practical multi-story frames", Proceedings of the ICE, Vol.36, Iss. 1, pp.99-117.
- [9] Mageirou G., (2011), "Contribution to the design of multi-story steel frames against flexural buckling", Doctoral Thesis, National Technical University of Athens, Greece.
- [10] Gantes C., Mageirou G., (2005), "Improves stiffness distribution factors for evaluation of effective buckling lengths in multi-story sway frames", Engineering Structures, Vol.27, Iss.7, pp.1113-1124.
- [11] Gallagher R.H., (1975), "Finite Element Analysis", Prentice-Hall, Inc. New Jersey.

- [12] Bathe K.J., (1982), “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”, Prentice-Hall.
- [13] Ђурић М., (1977), “Стабилност и динамика конструкција”, Грађевински факултет, Београд
- [14] Engesser F. , (1892), “Ueber die Knickfestigkeit Gerader Stabe”, Zeitschrift fur Architektur und Ingenieurwesen, 35.
- [15] Chen W.F., Kim S.E. (1997), “LRFD Steel design using advanced analysis”, CRC Press, New York..
- [16] Chen W.F. (2000), “Structural stability: from theory to practice”, Engineering structures, Vol.22, Iss.2, pp.116-122.
- [17] Yoo H., Choi D.H. (2008), “New method of inelastic buckling analysis for steel frames”, Journal of Constructional Steel Research, Vol.64, Iss.10, pp.1152-1164.
- [18] Farshi B., Kooshesh F. (2009), “Buckling analysis of structural steel frames with inelastic effects according to codes”, Journal of Constructional Steel Research, Vol.65, Iss.10-11, pp.2078-2085.
- [19] Geng-shu T., Lei Z., Guo-ran X. (2009), “Inelastic story-buckling factor of steel frames”, Journal of Constructional Steel Research, Vol.65, Iss.2, pp.443-451.
- [20] Bazant Z.P., Cedolin L. (2003), “Stability of Structures”, Dover Publications, New York, USA
- [21] McGuire W., Gallagher R., Ziemain R. (2000), ” Matrix Structural Analysis, 2<sup>nd</sup> edition”, John Wiley and Sons, New York, USA.
- [22] Galambos T.V (editor) (1998), “Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 5<sup>th</sup> edition”, John Wiley and Sons, New York, USA.
- [23] CRC Japan (1971), “Handbook of Structural Stability”, Corona, Tokyo
- [24] Буђевац Д., Марковић З., Богавац Д., Тошић Д., (1999), “Металне конструкције”, Грађевински факултет Универзитета у Београду.
- [25] Brčić S., Žugić-Zornija Lj., (2009), ” Simple and effective C++ matrix-vector library for nonprofessionals in computer science”, International Journal of Computational Methods, Vol.6, Iss.1, pp.43-74.
- [26] Brčić S., ” libsmv: simple and effective matrix-vector library in C++”, <http://code.google.com/p/libsmv/>

- [27] Жугић-Зорнија Љ., (2009), “Нелинеарна анализа мостова са косим кабловима”, докторска дисертација, Грађевински факултет Универзитета у Београду.
- [28] Секуловић М., (2004), “Теорија линијских носача”, Грађевинска књига, Београд.
- [29] Мијалковић М., (2005), “Анализа просторних линијских носача по теорији другог реда”, Задужбина Андрејевић, Београд.
- [30] Lafore R. (1989), ” Turbo C, Programming for the PC, Revised Edition”, Howard W. Sams & Company, USA .
- [31] Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B., (2007), ” Numerical Recipes, the Art of Scientific Computing, third edition”, Cambridge University Press, New York, USA.
- [32] Милићев Д. (1995), ” Објектно оријентисано програмирање на језику C++ ”, Микро књига, Београд.
- [33] Schildt H. (1995), ” C++ The Complete Reference, 2nd Ed. ”, Osborne McGraw-Hill.
- [34] Zieman R., McGuire W., (2007), ” Tutorial for MASTAN2”, John Wiley & Sons.
- [35] TOWER 6, Упутство за рад са програмом, Radimpex, Београд.
- [36] Зарић Б., Буђевац Д., Стипанић Б., (2000), “Челичне конструкције у грађевинарству”, Грађевинска књига, Београд.
- [37] Kanchanalai, T. (1977), “The design and behaviour of beam-columns in unbraced steel frames”, AISI Project No.189, Report No.2, Civil Engineering / Structures Research Laboratory, University of Texas at Austin, USA
- [38] Liew, J.Y.R. (1992), “Advanced analysis for frame design”, PhD Disertation, School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, IN, USA
- [39] Yuan Z. (2004), “ Advanced Analysis of Steel Frame Structures Subjected to Lateral Torsional Buckling Effects”, PhD Thesis, Queensland University of Technology.
- [40] AISC (1994), “ Manual of Steel Construction, Load and Resistance Factor Design, 2<sup>nd</sup> edn.”, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL.
- [41] Еврокод 3 (1993), “Прорачун челичних конструкција - ENV 1993-1-1: 1992”, Грађевински факултет Универзитета у Београду.

- [42] Еврокод 3 (2006), “Прорачун челичних конструкција - ENV 1993-1-1: 2005”, Грађевински факултет Универзитета у Београду.
- [43] Timoshenko S.P., Gere J.M., (1961), “Theory of Elastic Stability”, New York, McGraw-Hill
- [44] Rondal J., Maquoi R. (1979), “Single Equation for SSRC Column Strength Curves“, ASCE J.Struct.Div., Vol.105, No.ST1, pp.247-250.
- [45] Massonnet C.E., Maquoi R. (1978), “Recent progress in the field of structural stability of steel structures“, IABSE, Zurich, Switzerland.
- [46] Ђорић С. (2006), “Прилог одређивања дужина извијања стубова оквирних носача”, магистарска теза, Грађевински факултет Универзитета у Београду.
- [47] Ћорић С., Врчић С. (2009), “Column Buckling Investigation of Plane Frames ”, Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Congress of Serbian Society of Mechanics, ed. T.Atanacković, D.Spasić, S.Simić, C-08, Palić, Serbia.
- [48] Ђорић С. (2010), “Анализа стабилности и дужина извијања оквирних носача са оценом тачности постојећих прописа”, Трећи интернационални научно-стручни скуп Грађевинарство – наука и пракса, Жабљак, Црна Гора. Зборник радова, књига 1, стр. 15-20.
- [49] Choi D.H., Yoo H., (2009), “Iterative system buckling analysis, considering a fictitious axial force to determine effective length for multi-story frames”, Engineering Structures, Vol.31, Iss.2, pp.560-570.
- [50] Choi D.H., Na H.S., Jung J.W., Yoo H., (2010), “Iterative Eigenvalue Analysis for Stability Design of Three-dimensional Frames Considering a Fictitious Axial Force Factor”, International Journal of Steel Structures, Vol.10, Iss.4, pp.325-335.



## **АНЕКС**

### **СТАНДАРДИ ЗА ПРОРАЧУН СТАБИЛНОСТИ ЧЕЛИЧНИХ КОНСТРУКЦИЈА У ДЕЛУ КОЈИ СЕ ОДНОСИ НА ПРОРАЧУН ДУЖИНЕ ИЗВИЈАЊА**

#### **» Европски прописи ЕС3**

Прорачун стабилности оквирних носача разматра се у европским нормама: EVROKOD 3 (ЕС3) у поглављу 5.2 стандарда EN 1993.1.1:2005 [41]. Ту је наведен следећи поступак:

*I – У случају стандардних конструкција које нису значајно деформабилне, примењује се класичан поступак анализе, који подразумева прорачун конструкције по теорији првог реда уз појединачну контролу стабилности елемената конструкције, узимајући у обзир њихову дужину извијања.*

*II – У случају сложених, деформабилних конструкција обавезан је прорачун по теорији другог реда при чему се узимају у обзир глобалне и локалне имперфекције на конструкцији.*

У оквиру овог докторског рада се анализира дужина извијања стубова оквирних носача, који се спроводи према првом ( I ) поступку, а он је описан у оквиру Еврокода 3 у Анексу Е (ENV 1993-1-1:1992) [39], а исто тако коришћен је и у другим радовима везаним за ову област, као нпр. [9].

#### **” АНЕКС Е “ - ДУЖИНА ИЗВИЈАЊА ПРИТИСНУТОГ ЕЛЕМЕНТА**

##### **E.1 ОСНОВЕ**

*(1) Дужина извијања I притиснутог елемента је дужина другачијег сличног елемента са зглобно везаним крајевима (крајеви штапа имају спречено бочно померање али могу слободно да ротирају у равни извијања) који имају исту отпорност на извијање.*

- (2) У недостатку бољих података, може се усвојити на страни сигурности теоријска дужина извијања за еластично критично извијање.
- (3) Еквивалентна дужина извијања може се користити за спровођење прорачуна отпорности на извијање елемента неравномерном оптерећењу помоћу другачијег сличног елемента који је изложен равномерно оптерећењу.
- (4) Еквивалентна дужина извијања може да се такође користи за спровођење прорачуна отпорности на извијање елемента променљивог пресека преко отпорности на извијање елемента константног пресека под сличним условима оптерећења и ослањања.

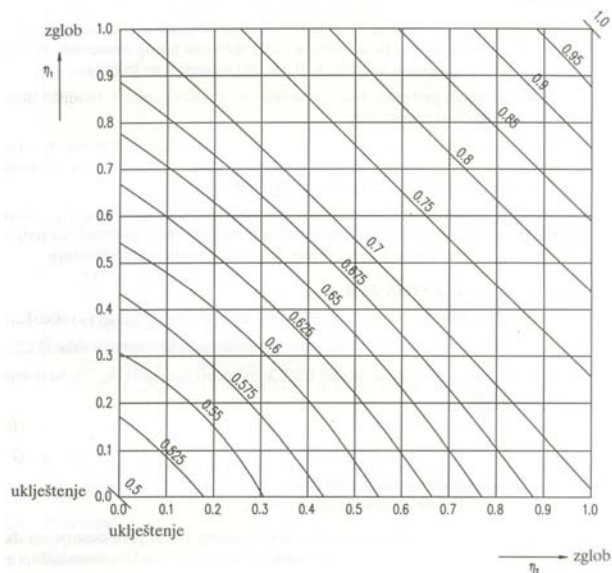
### Е.2 СТУБОВИ У СКЕЛЕТИМА ЗГРАДА

- (1) Дужина извијања  $l$  стуба у бочно непомерљивом скелету може се добити са Сlike 1.
- (2) Дужина извијања  $l$  стуба у бочно померљивом скелету може се добити са Сlike 2.
- (3) За теоријске моделе приказане на Сlici 3 коефицијенти расподеле  $\eta_1$  и  $\eta_2$  се добијају помоћу формула:

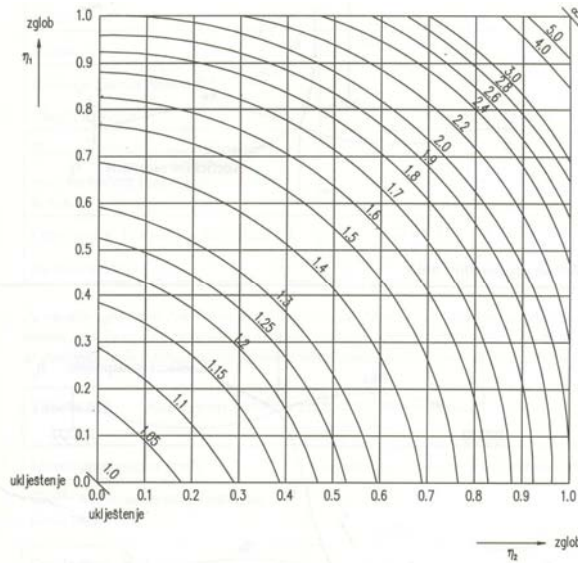
$$\eta_1 = K_c / (K_c + K_{11} + K_{12})$$

$$\eta_2 = K_c / (K_c + K_{21} + K_{22})$$
(1)

где су:  $K_c$  коефицијент стуба  $l/l$ ,  $K_{ij}$  коефицијент ефективне крутости греде.



Слика 1 Коефицијент дужине извијања  $l/L$  за стуб у бочно непомерљивом облику

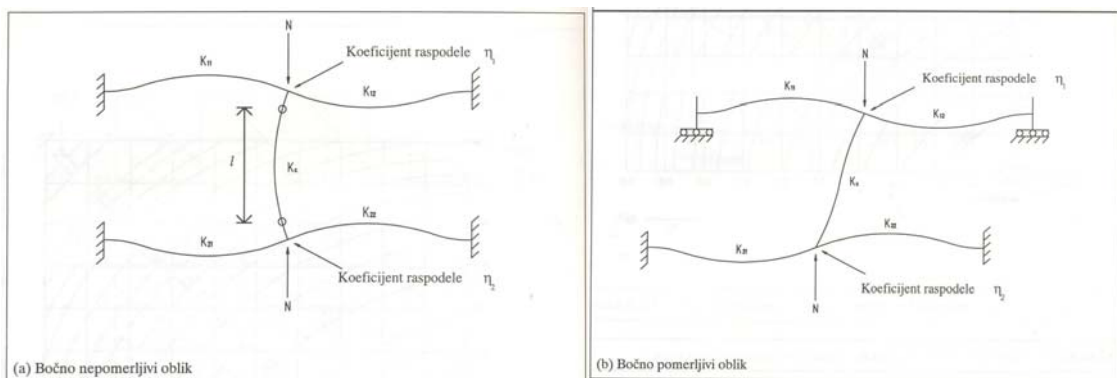


Слика 2 Коэффициент дужине извијања  $l/L$  за стуб у бочно померљивом облику

- (4) Ови модели се могу усвојити за прорачун континуалног стуба, предпостављајући да је свако поље стуба оптерећено до исте вредности односа  $(N/N_{cr})$ . У општем случају где је  $(N/N_{cr})$  променљиво, ово доводи до вредности која је на страни сигурности за  $l/L$  за већину критичних дужина стубова.
- (5) За свако поље континуалног стуба, предпоставка учињена у тачки (4) може се увести у користећи модел приказан на Слици 4, а коэффицијенти расподеле  $\eta_1$  и  $\eta_2$  се добијају помоћу формула:

$$\eta_1 = \frac{K_c + K_1}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} \quad , \quad \eta_2 = \frac{K_c + K_2}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} \quad (2)$$

где су  $K_1$  и  $K_2$  коэффицијенти крутости суседних поља стуба.



Слика 3 Коэффициент расподеле за стубове

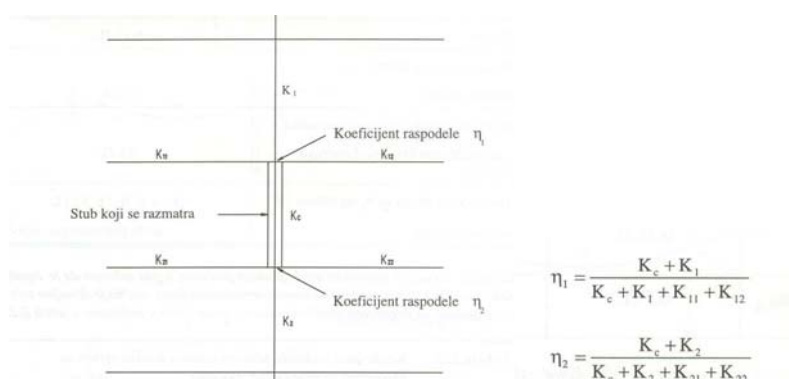
- (6) Када греде нису оптерећене аксијалним силама, њихови коэффицијенти ефективне крутости могу да се одреде помоћу Табеле 1, под условом да греде остају у еластичној области при рачунским моментима.

Услови ротационог ограничења на даљем крају греде	Коефицијент ефективне крутости греде $K$ (под условом да греда остаје еластична)
Укљештење	$1.0 \cdot l/L$
Зглоб	$0.75 \cdot l/L$
Ротација као на ближем крају (дупла кривина)	$1.5 \cdot l/L$
Ротација једнака, а супротног знака оној на ближем крају (једнострука кривина)	$0.5 \cdot l/L$
Општи случај. Ротација $\theta_a$ на ближем и $\theta_b$ на даљем крају	$(1+0.5 \cdot \theta_b/\theta_a) \cdot l/L$

(7) За скелетне зграде са бетонским међуспратним плочама, а под условом да је топологија скелета правилна и да је оптерећење равномерно расподељено, обично је довољно тачно да се претпостави да коефицијенти ефективних крутости износе како је приказано у Табели 2.

Услови оптерећења греде	Непомерљиви чворови	Померљиви чворови
Греде непосредно носе бетонске плоче таванице	$1.0 \cdot l/L$	$1.0 \cdot l/L$
Остале греде под директним оптерећењима	$0.75 \cdot l/L$	$1.0 \cdot l/L$
Греде оптерећене само моментима на крајевима	$0.5 \cdot l/L$	$1.5 \cdot l/L$

(8) Када, за исти случај оптерећења, рачунски момент у било којој од греда прекорачи вредност  $W_{ef} f_y / \gamma_{MO}$ , за греду треба сматрати да је зглобно ослоњена у разматраној тачки или тачкама.



Слика 4 Коефицијент расподеле за континуалне стубове

- (9) Када греда има номинално зглобне везе, треба претпоставити да је зглобно ослоњена у разматраној тачки или тачкама.
- (10) Када греда има полу-круте везе, њен коефицијент ефективне крутости треба редуковати следствено томе.
- (11) Када су греде изложене аксијалним силама, њихове коефицијенте ефективне крутости треба прилагодити следствено томе. Могу се користит функције стабилности. Као једноставна алтернатива, може се занемарити повећање коефицијената крутости услед аксијалног затезања, а утицаји од аксијалног притиска могу се узети у обзир коришћењем апроксимација на страни сигурности које су дате у Табели 3

Табела 3 Апроксимативне формуле за редуковане коефицијенте крутости греда услед аксијалног притиска	
Услови ротационог ограничења на даљем крају греде	Коефицијент ефективне крутости греде К (под условом да греда остаје еластична)
Укљештење	$1.0 \cdot l/L (1-0.4 \cdot N/N_E)$
Зглоб	$0.75 \cdot l/L (1-0.4 \cdot N/N_E)$
Ротација као на ближем крају (дупла кривина)	$1.5 \cdot l/L (1-0.2 \cdot N/N_E)$
Ротација једнака, а супротног знака оној на ближем крају (једнострука кривина)	$0.5 \cdot l/L (1-1.0 \cdot N/N_E)$
У овој табели: $N_E = \pi^2 EI / L^2$	

- (12) Следећи емпиријски изрази се могу користити као апроксимације на страни сигурности уместо вредности које се могу очитати са Сlike 1 и 2.

а) бочно непомерљив облик (Слика 1)

$$l/L = 0,5 + 0,14 (\eta_1 + \eta_2) + 0,055 (\eta_1 + \eta_2)^2$$

или алтернативно:

$$l/L = \left[ \frac{1 + 0.145 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.265 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{2 - 0.364 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.247 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \right] \quad (3)$$

б) бочно померљиви модел (Слика 2)

$$l/L = \left[ \frac{1 - 0.2 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.12 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2}{1 - 0.8 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0.6 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \right]^{0,5} \quad (4)''$$

» **Домаћи прописи**

Прорачун стабилности оквирних носача предмет је наших стандарда ЈУС У. Е.7.111/1986 – 5.8.6. СТАБИЛНОСТ ОКВИРНИХ НОСАЧА и може се наћи у [23].

**„ПОГЛАВЉЕ 5.“ ОДРЕЂИВАЊЕ ЕФЕКТИВНИХ ДУЖИНА ИЗВИЈАЊА СТУБОВА**

Ефективна дужина извијања стубова, односно притиснутих елемената оквирних система, одређује се из једначине:

$$l_{s,i} = \beta \cdot h_s \tag{5}$$

где је:

$l_{s,i}$  – ефективна дужина извијања стуба, односно притиснутог елемента оквирног система.

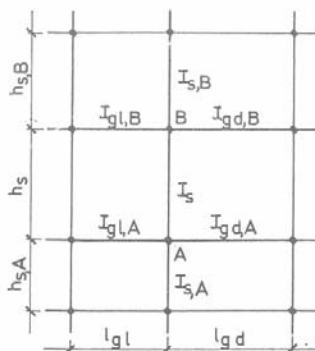
$h_s$  – системна дужина стуба, односно притиснутог елемента, једнака одстојању између чворова оквирног система.

$\beta$  - коефицијент ефективне дужине извијања  $\beta$  одређује се према одредбама т. 5.1 за оквирне системе са непомерљивим чворовима и према одредбама т. 5.2 за оквирне системе са померљивим чворовима.

**5.1 Оквирни системи са непомерљивим чворовима**

Коефицијент ефективне дужине извијања  $\beta$  штапа А-В оквирног система са непомерљивим чворовима (слика 5), одређује се из израза:

$$\beta = \frac{1.6 + 1.9 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 2.1 \cdot \eta_A \cdot \eta_B}{3.2 + 1.8 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 0.7 \cdot \eta_A \cdot \eta_B} \tag{6}$$



Слика 5

са вредностима  $\eta_A$  и  $\eta_B$ , које су дате једначинама:

$$\eta_A = \frac{k_s + k_{s,A}}{k_s + k_{s,A} + \Sigma k_{g,A}}, \quad \eta_B = \frac{k_s + k_{s,B}}{k_s + k_{s,B} + \Sigma k_{g,B}} \quad (7)$$

где је:

$k_s = I_s / h_s$  - крутост посматраног стуба  $A - B$  за који се одређује коефицијент ефективне дужине извијања.

$I_s$  – моменат инерције пресека стуба у односу на осу управну на раван оквирног система.

$h_s$  – системна дужина стуба  $A - B$ .

$k_{s,A} = I_{s,A} / h_{s,A}$  - крутост стуба који је за посматрани стуб  $A - B$  прикључен у чвору  $A$ .

$k_{s,B} = I_{s,B} / h_{s,B}$  - крутост стуба који је за посматрани стуб  $A - B$  прикључен у чвору  $B$ .

$\Sigma k_{g,A} = \Sigma (I_{g,A} / l_g)$  – сума крутости греда које су за посматрани стуб  $A - B$  прикључене у чвору  $A$ .

$\Sigma k_{g,B} = \Sigma (I_{g,B} / l_g)$  – сума крутости греда које су за посматрани стуб  $A - B$  прикључене у чвору  $B$ .

Крутости појединих греда множе се коефицијентом:

3/2 – ако је крај греде, супротан посматраном чвору  $A$  или  $B$ , зглобно ослоњен.

2 – ако је крај греде, супротан посматраном чвору  $A$  или  $B$ , укљештен.

Крутости појединих греда добијају вредност једнаку нули, ако су зглобно ослоњене у посматраном чвору  $A$  или  $B$ .

Ако је стуб  $A - B$  зглобно ослоњен у чвору  $A$ , односно ако је сума крутости греда занемарљива у односу на крутости стубова, онда је

$$\eta_A = 1$$

Ако је стуб  $A - B$  укљештен у чвору  $B$ , односно ако је сума крутости греда бесконачно велика у односу на крутости стубова, онда је

$$\eta_B = 0$$

На слици 6 дати су дијаграми крива коефицијената ефективне дужине извијања стубова оквирних система са непомерљивим чворовима, за случај када су греде на крајевима супротним од чворова  $A$  и  $B$  укљештене

## 5.2 Оквирни системи са померљивим чворовима

Коефицијент ефективне дужине извијања штапа  $A - B$  оквирног система са померљивим чворовима одређује се из обрасца:

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{1.5 - 0.70 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 0.22 \cdot \eta_A \cdot \eta_B}{1.5 - 1.30 \cdot (\eta_A + \eta_B) + 1.10 \cdot \eta_A \cdot \eta_B}} \quad (8)$$

где се  $\eta_A$  и  $\eta_B$  одређују из образаца (8), са ознакама и значењима према т.1 и сл.5.

Крутости појединих греда се множе коефицијентом:

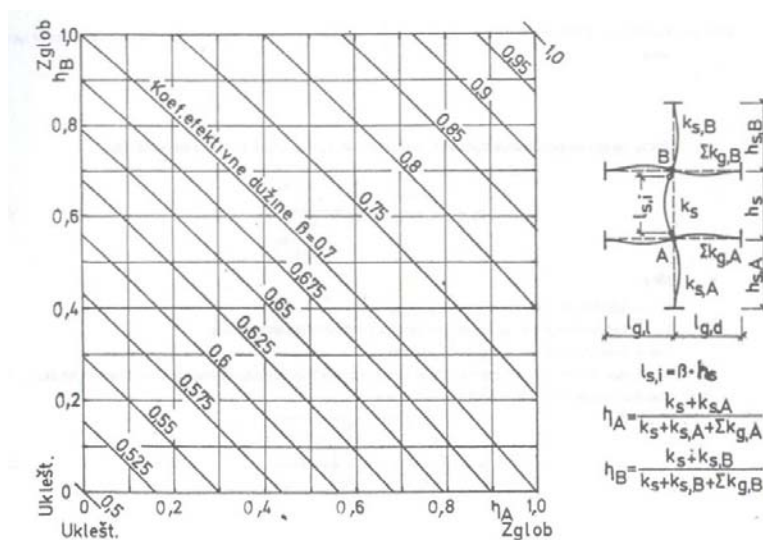
1/2 - ако је крај греде, супротан посматраном чвору  $A$  или  $B$ , зглобно ослоњен.

2/3 - ако је крај греде, супротан посматраном чвору  $A$  или  $B$ , укљештен.

Крутост  $\eta_A$  (односно  $\eta_B$ ) = 0, ако је стуб укљештен или ако је сума крутости греда бесконачно велика у односу на крутост стуба, односно  $\eta_A = 1$ , ако је стуб зглобно ослоњен у посматраном чвору или ако је сума крутости греда занемарљива у односу на крутост стуба.

На слици 7 дати су дијаграми коефицијената ефективне дужине извијања стубова оквирних система са померљивим чворовима за случај када су греде на крајевима супротним од чворова  $A$  и  $B$  укљештене.

На коефицијент ефективне дужине извијања стуба  $A - B$  оквирног система са померљивим чворовима утичу начин прикључивања, као и разлике у оптерећењима и карактеристикама попречних пресека осталих стубова у посматраном спрату у односу на стуб  $A - B$ .



Слика 6 Коефицијенти ефективне дужине извијања за стубове оквирних система са непомерљивим чворовима. (греде укљештене)

Утицај начина прикључивања стубова у посматраном спрату уводи се преко параметра  $\alpha_1$ .

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + m_k} \quad , \quad m_k = \sum_{i=1}^{n-k} N_i / \sum_{j=1}^k N_j \quad (9)$$

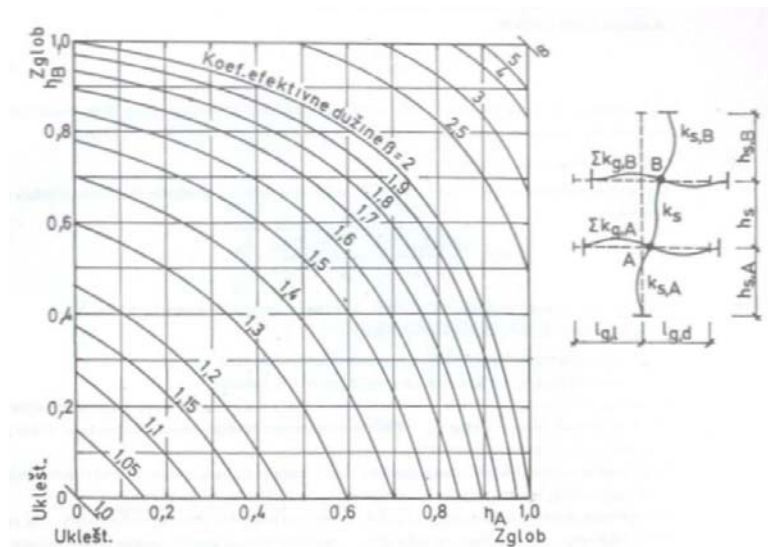
где је:

$n$  - укупан број стубова посматраног спрата,

$k$  - број стубова који су круто повезани за греде посматраног спрата,

$n-k$  - број стубова који су зглобно повезани





Слика 7 Коефицијенти ефективне дужине извијања за стубове оквирних система са померљивим чворовима. (грете уклештене)

Утицај разлике у оптерећењима и карактеристикама попречних пресека стубова у посматраном спрату у односу на стуб  $A - B$  уводи се преко параметра  $\alpha_2$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{I_s \cdot \sum_{i=1}^k N_i \cdot h_i^2}{N_s \cdot h_s^2 \cdot \sum_{i=1}^k I_i}} \quad (10)$$

Ако је висина свих стубова  $h_u$  у посматраном спрату иста, параметар  $\alpha_2$  постаје:

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{I_s \cdot \sum N_i}{N_s \cdot \sum I_i}} \quad (11)$$

где је:

$N_s$  – подужна сила у стубу  $A-B$ ,

$N_i$  – подужна сила у  $i$ -том стубу истог спрата,

$I_s$  – моменат инерције пресека стуба  $A-B$  у односу на осу управну на раван рама,

$I_i$  – моменат инерције пресека  $i$ -тог стуба у односу на осу управну на раван рама.

Увођењем параметара  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , коефицијент ефективне дужине извијања постаје

$$\beta = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_0 \quad (12)$$

Ако су сви стубови у посматраном спрату исте висине, оптерећени истим подужним силама и имају исти попречни пресек, изрази (10)- (12) постају

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \quad \beta = \beta_0$$

Коефицијенти ефективне дужине извијања једноставних једносратних оквирних система могу се прорачунати из теоријских израза датих у табели у функцији параметара  $m_0$ ,  $m_u$  и  $c$  за оквирни стуб изнад ослонца  $A$ . За друге стубове оквирног система коефицијенти  $B$  прорачунавају се на начин одређен овим стандардом.”

## БИОГРАФИЈА АУТОРА

Станко Ћорић рођен је 22.12.1974. године у Београду где је завршио основну школу и Пету београдску гимназију. Грађевински факултет у Београду је уписао 1993. године. Дипломирао је 1999. године са просечном оценом 8.65 и оценом 10 на дипломском раду под називом „Утицај динамичког оптерећења воза на подземну конструкцију за пролазак метроа“. У звање асистента приправника на Катедри за Техничку механику и теорију конструкција изабран је 2000. године. Исте године је уписао постдипломске студије на смеру Техничка механика и теорија конструкција Грађевинског факултета у Београду и положио је све испите са просечном оценом 10. Магистарску тезу под насловом „Прилог одређивању дужина извијања стубова оквирних носача“ одбранио је 2006. године. Следеће 2007. године изабран је у звање асистента на Катедри за Техничку механику и теорију конструкција и у том статусу се и тренутно налази. Крајем 2007. године уписује докторске студије у оквиру пројекта „SEEFORM“ под покровитељством DAAD-а, а у организацији Ruhr Universitat Bochum, Универзитета у Београду, Универзитета у Нишу и Универзитета „Св. Кирил и Методиј“ у Скопју. Станко Ћорић, као асистент, учествује у извођењу наставе на предметима Техничке механике. Поред наставне активности, учествовао је и у реализацији 6 научних пројеката под покровитељством Министарства за науку Републике Србије. Коаутор је једног рада објављеног у међународном часопису са SCI листе, 6 радова у домаћим часописима, као и преко 20 радова објављених у зборницима међународних и домаћих конференција. Ожењен је и отац је двоје деце.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани Станко Ћорић

број индекса \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

### **НЕЛИНЕАРНА АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, мај 2013.

---

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Станко Ћорић

Број индекса \_\_\_\_\_

Студијски програм Грађевинарство

Наслов рада НЕЛИНАРНА АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА

Ментор проф. др Станко Брчић, дипл.грађ.инж.

Потписани Станко Ћорић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, мај. 2013.

### Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

### НЕЛИНЕАРНА АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ ОКВИРНИХ НОСАЧА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, мај 2013.

---