

Objektni pristup modeliranju oštećenja i viskoznih deformacija linijskog nosača

Predmet ove teze je objektni pristup modeliranju oštećenja i viskoznih deformacija linijskih nosača. Teza se sastoji iz osam delova i pri tome je pretposlednji deo posvećen numeričkim primerima.

U uvodnom delu prikazan je razvoj načina analize i proračuna konstrukcija koji prati razvoj raspoloživih sredstava za proračun. Objektni pristup modeliranju kao najsavremeniji pristup, je posledica razvoja tehnike analize i programiranja u celini.

U drugom delu je prikazano modeliranje grednog elementa. Materijalne nelinearnosti koje se mogu razviti tokom analize realnog problema, dovode do promena karakteristika poprečnog preseka. Osim promene krutosti, dolazi do promene položaja težišta idealizovanog poprečnog preseka i centra smicanja. Uobičajeni postupci analize grednog elementa, koriste pretpostavke koje pojednostavljuju analizu. To se pre svega odnosi na izjednačavanje ose štapa sa težišnom osom i osom centra smicanja poprečnog preseka. U ovom poglavlju su najpre uspostavljene veze između statičkih i deformacijskih karaktera poprečnog preseka pri odstupanju referentne ose od težišta i centra smicanja. Za homogeni poprečni preseku izvedeni analitički oblici te veze. Takva veza je primenjena pri modeliranju grednih elemenata. Izvedene su matrice krutosti primenom metode deformacije i metode fleksibilnosti za složene veze sila i deformacija preseka. Navedeni izrazi se mogu primeniti i bez primene objektnog pristupa u modeliranju, ali je zbog njihove složenosti to veoma zametno. Oni čine 'pripremu' za modeliranje objekta grede koji će biti u stanju da odgovori zahtevima sistema i iskoristi informacije koje mu obezbeđuje objekat poprečnog preseka.

U trećem delu, prikazan je objektno orijentisani pristup analizi i rešavanju problema kao osnova na koju se mora osloniti svaki element koji će se uklopiti u taj sistem. U tom delu je analiziran tok linearne i nelinearne analize i utvrdjen skup poruka koje sistem upućuje grednim elementima u toku rešavanja problema.

U četvrtom, delu je analiziran postupak formiranja objekta grednog elementa. Taj objekat mora biti osposobljen za komunikaciju sa sistemom sa jedne strane i poprečnim presekom kao svojom komponentom sa druge strane. Korišćenjem izraza izvedenih u drugom poglavlju, modelirane su dve klase grednih elemenata. Jedna korišćenjem izraza metode deformacija i druga, korišćenjem izraza metode sila. U toku nelinearnog postupka proračuna, obe klase, u odnosu na sistem iskazuju identično ponašanje. Njihovo 'unutrašnje' ponašanje (način na koji one obezbeđuju odgovor sistemu) se značajno razlikuje. U okviru ovog poglavlja, utvrdjen je potreban skup podataka koji mora da sadrži svaka od ovih klasa, kao i algoritmi osnovnih funkcija.

Modeliranje i formiranje složenih veza između sila i deformacija je povereno objektu poprečnog preseka. To modeliranje je analizirano u petom poglavlju. Zahteve koje mora da

obezbedi objekat poprečnog preseka su određeni pri analizi grednog elementa. U ovom poglavlju su razvijene klase poprečnog preseka koje omogućavaju linearnu i nelinearnu analizu.

U šestom poglavlju je dat osvrt na modeliranje materijala. Analizirana su ograničenja koju nameću pretpostavke usvojene u analizi grednog nosača. U okviru tih ograničenja, modifikovani su objektni modeli određenih materijala koji su razvijeni i primenjeni u drugim programima. Za potrebe ovog rada i analize viskoznih efekata, formiran je model jednoaksijalnog linearno elastičnog viskoznog materijala.

Sadržaj

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Uvod | 3 |
| 1.1 | Razvoj metoda analize konstrukcija | 4 |
| 1.2 | Razvoj metoda programiranja računara | 5 |
| 1.2.1 | Klasični - proceduralni pristup | 5 |
| 1.2.2 | Objektno orjentisani pristup | 6 |
| 1.3 | Objektni pristup analizi u teoriji konstrukcija | 10 |
| 1.4 | Problemi strukturne analize | 12 |
| 2 | Modeliranje | |
| | linijskih nosača | 17 |
| 2.1 | Linijski element | 18 |
| 2.2 | Fleksibilnost i krutost preseka | 23 |
| 2.2.1 | Generalisane deformacije nastale pri podužnim silama (N, M_y, M_z) u linearno elastičnoj oblasti | 25 |
| 2.2.2 | Deformacije preseka uzrokovane poprečnim silama | 29 |
| 2.2.3 | Generalisane inercijalne sile u preseku - matrica masa preseka | 34 |
| 2.3 | Integracija deformacije štapa | 36 |
| 2.3.1 | Integracija matrice krutosti metodom deformacija | 39 |
| 2.3.2 | Integracija matrice fleksibilnosti štapa | 49 |
| 2.3.3 | Matrica krutosti štapa - primenom metode fleksibilnosti | 60 |
| 2.3.4 | Primer : Štap opterećen koncentrisanom silom P u pravcu ose štapa koja deluje na $2/3$ raspona | 62 |
| 2.3.5 | Primer : Štap opterećen konstantnim kontinualnim opterećenjem q_x u pravcu ose x | 63 |
| 2.4 | Štapovi sa oslobodjenim vezama na krajevima | 63 |
| 2.5 | Matrica krutosti u globalnom koordinatnom sistemu | 65 |
| 2.6 | Nedeformabilni delovi štapa (<i>offset</i> -i štapova) | 66 |
| 2.7 | Štapovi promenljivog poprečnog preseka | 68 |
| 2.8 | Matrica masa štapa | 70 |
| 3 | Formiranje objektnog modela | 74 |
| 3.1 | Linearan sistem | 76 |
| 3.1.1 | Kreiranje sistema | 77 |
| 3.1.2 | Rešavanje sistema | 77 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.2 | Nelinearan sistem | 77 |
| 3.2.1 | Tok proračuna u okviru faze | 78 |
| 4 | Objekat | |
| | grednog elementa | 80 |
| 4.1 | Element izveden metodom deformacije | 81 |
| 4.2 | Element izveden metodom fleksibilnosti | 83 |
| 4.3 | Slučajevi opterećenja | 89 |
| 4.4 | Integracija deformacije štapa | 91 |
| 4.4.1 | Numerička integracija deformacija krajeva u linearnoj analizi | 91 |
| 4.4.2 | Modifikacija numeričke integracije | 93 |
| 4.4.3 | Numerička integracija deformacije štapa u nelinearnoj analizi | 94 |
| 5 | Objekat | |
| | poprečnog preseka | 96 |
| 5.1 | Geometrijske karakteristike preseka ili dela preseka | 98 |
| 5.2 | Materijal | 99 |
| 5.3 | Homogen poprečni presek | 99 |
| 5.4 | Višedelni poprečni presek | 100 |
| 6 | Modeliranje | |
| | ponašanja materijala | 104 |
| 6.1 | Primena u modelu linijskog nosača | 105 |
| 6.1.1 | Modeli <i>idealnih</i> materijala | 107 |
| 6.1.2 | Složeni materijali | 108 |
| 6.1.3 | Materijali koji generišu dilataciju | 112 |
| 6.1.4 | Linearno elastični viskozni materijal | 114 |
| 7 | Numerički primeri | 118 |
| 7.1 | Elastični model | 119 |
| 7.2 | Ram u ravni primena elastoplastičnog materijala | 121 |
| 7.3 | Model armiranobetonske grede | 124 |
| 7.3.1 | Postupak metodom <i>početnog napona</i> | 125 |
| 7.3.2 | Modifikovan Newton-Raphson-ov postupak | 128 |
| 7.4 | Proračun spregnute konstrukcije | 132 |
| 7.4.1 | Nelinearan postupak proračuna | 133 |
| 7.4.2 | Modeliranje nosača grednim elementima | 134 |
| 8 | Rezime | 142 |
| 8.1 | Rezime | 143 |
| 8.2 | Zaključak | 143 |
| 8.3 | Mogućnosti daljeg razvoja prikazanog modela proračuna | 144 |

Glava 1

Uvod

U ovom delu je prikazan razvoj metoda analiza konstrukcija. Kroz istoriju su nove mogućnosti računске tehnike dovodile do novih metoda i upotrebe postupaka koji bez tih sredstava nisu bili upotrebljivi. Uprkos davno postavljenim terorijskim osnovama teorije elastičnosti i strukturne analize, tek pojavom računskih sretstava, razvijaju se i razradjuju metode u kojima se primenjenjuju.

Razvoj metoda anlize problema i postupaka koji se primenjuju pri dizajniranju računarskih programa je u osnovi razvoj novog alata u definisanju postupka proračuna. Metode i postupci koji su postali prihvatljivi primenom objekto orijentisanog pristupa u analizi otvorile su put povećanom stepenu apstrakcije u modeliranju uz istovremenu mogućnost da taj postupak bude i primenjen.

Prednosti objektnog pristupa modeliranju su prisutne i kod jednostavnih modela u linearnoj analizi, ali dolaze do punog izražaja tek kod složenih modela nelinearne analize. U početku primene, početkom poslednje decenije dvadesetog veka, objektno modeliranje u strukturnoj analizi je korišćeno za poboljšavanje čitljivosti koda i jednostavniji i "čistiji" razvoj programa. Tek primenom složenih algoritama nelinearnih proračuna, prednosti ovakvog pristupa modeliranju objekta materijala, konačnih elemenata i samog algoritma dolaze do punog izražaja.

1.1 Razvoj metoda analize konstrukcija

Jedan od način da se prikaže istorijski razvoj proračuna konstrukcija je da se prikaže istorija sprava koje su korišćene pri proračunima. [13]

Problemi vezani za u analizu konstrukcija, nužno su doveli do prilagodjavanja metoda analize sa raspoloživim sredstvima za računanje.

Uprkos činjenici da su osnove teorije elastičnosti i osnove analize konstrukcija ustanovljene još u devetom veku, njihova primena u proračunu građevinskih konstrukcija je dugo bila ograničena nedostatkom adekvatne računarske tehnike.

Grafičke metode u analizi konstrukcija su u početku bile efikasno sredstvo proračuna. Postupci analize konstrukcija su prilagodjeni analognim računarima koji su bili raspoloživi u to doba (cirkle i logaritmar (tj. šiber)). Konstrukcije Mhor-ovih krugova, verižnog poligona ili Kremonin postupak, su primeri algoritama kojim se analiza napona, deformacija i geometrijskih karakteristika ili određivanje sila u štapovima rešetke mogla na taj način efikasno sprovesti.

Osnove metode sila i metode deformacija linijskih sistema su bile poznate početkom dvadesetog veka ali su se uprkos svojoj univerzalnosti suočavale sa problemom rešavanja, za to doba, velikih sistema jednačina. Otuda su se te metode primenjivale samo ako se problem mogao uprošćavanjem svesti na jednostavan sistem jednačina. Takav je na primer postupak koji je predložio Mhor za tri puta statički neodređeni rešetkasti luk [24] ili postupak elastičnog težista.

Umesto rešavanja sistema jednačina, korišćeni su iterativni postupci (*metoda sukcesivnih aproksimacija* kao što je u metodi deformacija, Kros-ov (Hary Cross) postupak. Na taj način je metoda deformacija postala opšte prihćenja, pa se pomoću logaritmara (šibera) mogao efikasno rešiti i višestruko statički neodređen nosaču u nekoliko iteracija.

Sredinom dvadesetog veka, pojavom mehaničkih računskih mašina koje su imale mogućnost da rade sa većim brojem cifara, počinju ozbiljno da se razradjuju metode kod kojih se problem svodi na sistem jednačina. Obim potrebnih operacija pri rešavanju sistema jednačina, činio je postupak dugotrajnim.

Pojava elektronskih kalkulatora dovodi do razvoja i sve šire praktične primene metoda koje su bez njih bile teško primenjive. U tom periodu se razvijaju diferencne metode za rešavanje problema savijanja ploča (premda su diferencne jednačine ovog problema uspostavljene Kirhof-ovom teorijom sredinom prethodnog veka).

Razvoj računara otvara mogućnost da se postupak proračuna formalizuje u obliku algoritma. Rešavanje sistema linearnih jednačina, postaje tada jednostavan problem. Jedanput sastavljen program, mogao se jednostavno koristiti neograničen broj puta. U literaturi se afirmišu metoda sila i posebno metoda deformacija. Sredinom dvadesetog veka se razvijaju računarski programi za numeričku analizu bez kojih bi diferencna metoda i metoda konačnih elemenata bile skoro besmislene.

Sredinom osamdesetih godina XX veka u stručnoj literaturi se javlja čitav niz radova o novim konačnim elementima. Tehnološki napredak dovodi do primene metode konačnih

elemenata u mašinstvu, avioindustriji, svemirskoj tehnologiji i medicini. Konačni elementi koji se razvijaju, prilagodjeni su specifičnim potrebama ovih grana. Programi sadrže čitave biblioteke različitih konačnih elemenata. U najvećem delu gradjevinarstva, osnovni model za analizu, primenu kodova i dimenzionisanje ostaje linijski nosač. Tehnologija izvodjenja konstrukcija, oblici pojedinih konstrukcija i relativna jednostavnost analize statičkih uticaja, dovode do široke primene linijskih nošača.

U praksi se proračuni po pravilu sprovode nekim od gotovih programa koji se zasnivaju na metodi konačnih elemenata.

1.2 Razvoj metoda programiranja računara

Razvoj računara u suštini predstavlja usavršavanje jedne vrste mašina. Osnovu razvoja metoda programiranja čini stvaranje alata kojim se te mašine podešavaju, da bi se na najbolji način iskoristile mogućnosti mašina.

Računari međjutim nisu uobičajene mašine već pre sredstvo za ubrzanje čovekovog razmišljanja (u [7] citiran je izraz "bicycles for the mind") i istovremeno drugačiji medijum za izražavanje načina razmišljanja. Otuda i programski jezik ima malo zajedničkog sa alatom već više podseća na sretstvo koje služi da se način razmišljanja jednoznačno irazi, prilagodi mašini i formalizuje.

1.2.1 Klasični - proceduralni pristup

Svi programski jezici nameću određeni stepen uopštavanja (apstrakcije). Najjednostavniji primer je skup mašinskih instrukcija u džepnom kalkulatoru koji se pokreće kad se izvrši operacija (sabiranje ili sl.). U ovom slučaju uopštavanje se svodi na činjenicu da su argumenti operacije (brojevi koje smo ukucali) mogli imati proizvoljnu vrednost, i bez tog uopštavanja program ne bi imao smisla.

Stepen apstrakcije (ili uopštavanja) je neposredno vezan sa složenošću problema koji se rešava. Pisanje programa u assembleru ili mašinskom jeziku podrazumeva mali stepen apstrakcije (uopštavanja) i u mnogome podseća na podešavanje konkretne mašine. Takvi programi, pisani za jednu vrstu računara, se ne mogu direktno primeniti na drugu vrstu računara. Za programiranje u assembleru ili mašinskom jeziku, karakteristično je da se problem prilagodjava mašini.

Razvojem računara i razvojem programskih jezika, postaje moguće prilagodjavati rad računara potrebama inženjera. Istovremeno, metode koje se koriste u inženjerskoj praksi se prilagodjavaju novim mogućnostima računskih mašina.

Programski jezici koji se nazivaju višim (Basic, Fortran ili C), su u suštini predstavljali apstrakciju assemblera. U njima je umesto memoriskih lokacija u assembleru bilo moguće koristi promenjive, nizove promenjivih, odnosno čak definisati i koristiti svoje strukture podataka. Ovi programski jezici omogućavaju da se znatno složeniji problemi rešavaju sa manje truda, ali je u suštini, ostala nužnost da se najveći trud posveti izradi algoritma - postupka kojim se način rada (niz instrukcija) jednoznačno određuje.

Doprinos ovog tipa jezika i njihova primena u analizi konstrukcija je nemerljiva. SAP IV je klasičan primer programa ove generacije. Korisnici ovog programa / misli se na stručnjake

kojima je kod programa bio dostupan i koji su na njemu za svoje potrebe vršili intervencije/ dobro se sećaju takozvane dinamičke alokacije memorije. U to vreme, stepen razvoja alata kojim je pisan (fortran compiler-a) je zahtevao da se veličina prostora za promenljive odredi u trenutku pisanja programa. Drugi problem je bila raspoloživa memorija koja je bila veoma ograničena. Kako su u zavisnosti od problema bile potrebne različite količine memorije za različite podatke, to se na početku programa, memorija za nizove alocirala u jednom nizu, koji je sadržao ostale nizove (A[10000]). Lokacije nizova podataka u tom velikom nizu su se prosledjivale u okviru jednog common bloka koji je sadržao samo adrese početaka nizova (A[N1], A[N2] ,...). Rutinama koje su bile pripremljene da kao argument dobiju niz podataka, kao argument u pozivu je prosledjivana ta lokacija u nizu. U tom smislu se ovakva tehnika može smatrati tipičnim primerom prilagodjavanja problema računaru.

Ovi se programi ne mogu lako izmeniti, dopuniti ili prilagoditi novom, dodatnom problemu što predstavlja njihovu osnovnu manu. Pokušaj da se izvrši neka intervencija na jednom delu programa, zahteva dodatni trud i analizu da se ne bi javio sporedni efekat i poremetio postojeću funkciju nekog drugog dela programa.

Strukturno programiranje

Razvitak tehnike programiranja dovodi do usvajanja niza pravila i principa koji se pri razvoju programa moraju poštovati. razvoju programa. Uočava se potreba da se grupa podataka organizuje u novi tip - strukturu. Praćenje i razumevanje samog programa, na taj način postaje lakše. U strukturu su se mogli grupisati podaci (promenljive), koji opisuju neke logičke celine (čvor, štap, ...). Prosledjivanje adrese strukture, postaje jednostavan način za prenos velikog broja informacija, organizovanih u celinu.

Uprkos prednostima koje je strukturno programiranje donelo, ostaje činjenica da se u analizi i razvoju ovakvih programa najveća pažnja poklanjala razvoju novih algoritama i njihovom uskladjivanju sa postojećim algoritmima. U osnovi, pisanje i modifikacija programa su unapredjeni ali potreba da se vodi računa o potencijalnim sporednim efektima umanjuje suštinski značaj i doprinos ove tehnike programiranja. Pod sporednim efektima se misli na mogućnost da neki deo programa (rutina) izmeni neki podatak koji je bio prosledjen kao argument toj rutini a da pri tom, to ostane na posredan način skriveno. Otuda ovakav pristup, sem poznavanja struktura, zahteva poznavanje i procedura koje modifikuju podatke. Analiza koda je , barem u fizičkom smislju, pojednostavljena, ali kvalitativni skok u izradi modela analize i obrade podataka putem računara uvodi objektno orijentisani pristup.

1.2.2 Objektno orjentisani pristup

Programi razvojem dobijaju sve veće mogućnosti i time postaju sve složeniji. Pre ili kasnije, programi postaju suviše obimni za održavanje i unapredjivanje. Složenost i obim programa zahteva angažovanje većeg broja autora i saradnika. Vreme koje je potrebno pojedincu (autoru ili saradniku) da upozna strukturu programa kao celine postaje značajan faktor, te dalji razvoj postaje suviše skup. Ilustracije radi, broj fajlova u projektu OpenSees je veći od 2700.

Grupisanje podataka u strukture je olakšalo modeliranje problema i analizu postojećih programa. Istovremeno je uočena činjenica da je organizacija podataka bitna za određeni deo programa i da korisnicima tih delova programa, (onim koji koriste rutine koje je drugi pisao) nije bitna sama organizacija podataka unutar tih rutina, već pre svega njihova funkcionalnost.

Jednom rečju od interesa je skup podataka koji je potreban kao *ulaz* i rezultat tih funkcija, odnosno *izlaz*.

Ukoliko bi svaki korisnik bio u stanju da direktno utiče na stanja podataka u tim rutinama, on bi morao dobro da poznaje ne samo šta te rutine *rade*, već i da pronikne u ideje autora rutina. Morao bi da pregleda i reviduje rutine, pronikne u razne optimizacije u okviru koda i reprodukuje način razmišljanja autora tih rutina. U protivnom, lako se može desiti da intervencijom na podacima (njihovoj organizaciji ili tipovima) *pokvari* deo koda koji se uveliko koristi u ostatku programa.

Podaci uredjeni na odredjeni način, imaju smisla, samo za odgovarajuću grupu rutina. Otuda se javlja potreba da se uz podatke koji opisuju stanja, grupišu i rutine koje ih menjaju. Na taj način su formirane klase i objekti kao pojedini primerci članova klasa.

Na primeru modeliranja mehaničkih osobina materijala mogu se ilustrovati prednosti ovakvog pristupa. Model materijala, u programima koji se bave strukturnom analizom, će biti deo programa u kome je smešteno sve sto je vezano za opisivanje ponašanja materijala. U najjednostavnijem slučaju to će biti promenljive (modul elastičnosti, Poason-ov koeficijent, koeficijent termičke dilatacije, zapremiska masa i sl.) , ali u opštijem slučaju tu će se naći i rutine koje omogućavaju promene ovih vrednosti (usled nivoa opterećenja, oštećenja, promene temperature, starosti, vlažnosti i sl.). Pri analizi, od modela materijala se očekuju informacije o navedenim parametrima, dok je na samom materijalu da u slučaju nelinearne analize, menja karakteristike. Funkcije koje utiču na promenu parametara, se mogu grupisati uz parametre i na taj način formiraju klasu materijala.

Kako u modelu konstrukcije ima više tačaka u kojima će biti različite karakteristike materijala, to će se pojaviti potreba za formiranjem više članova ove klase.

U pristupu sa manjim stepenom apstrakcije pogodno je, umesto kalase materijala, čuvati promenljive koje sadrže njihove karakteristike, ali se na taj način, umanjuje mogućnosti razvoja programa. U tom slučaju bi svako uvodjenje neke intervencije na ovim promenljivama, rizikovlao da poremeti logiku u nekom drugom delu programa.

Karakteristike objekta [11] su:

- Stanje - Stanje objekta je jednoznačno odredjeno vrednostima njegovih promenljivih. Promenljive, koje karakterišu stanje objekta, se mogu menjati tokom vremena ali ne spontano (već samo kao rezultat operacija koje sistem (program) primenjuje na ovom objektu).
- Operacije - Objekat može menjati svoje stanje i uticati na ostatak programa preko operacija (koje se nazivaju funkcije ili metodi).
- Identitet - Pored stanja i operacija, objekat karakteriše i njegov identitet. Možemo imati dva objekta koji u početku imaju ista stanja i iste operacije (na primer dva primerka objekta kalase materijala u početnom trenutku mogu imati mehaničke karakteristike i isti set) ali se kao posledica različitih uticaja kasnije njihova stanja počinju razlikovati. S obzirom da posmatrana dva objekta imaju različita stanja, da bi to bilo moguće, to od početka moraju biti tretirani kao odvojeni objekti.

Objekti istog tipa se nazivaju klasom objekata. Oni imaju ista moguća stanja i operacije. (Materijal je klasa objekata, a pojedini konkretni objekti (konkretan materijal u tački A) se nazivaju primerci klase.

Objekti (organizovani podaci i rutine koje ih modifikuju) se koriste slanjem poruka (iniciranjem javnih funkcija). Na taj način analiza toka rešavanja problema postaje analiza poruka koje objekti šalju jedni drugima. Takva analiza postaje jednostavna, jer se unutrašnje ponašanje objekta 'zatvara' (inkapsulira). To znači da je korisniku bitan odgovor objekta na određeni zahtev a ne sam postupak (algoritam) koji je taj objekat primenio da odgovori na taj zahtev. Najjednostavniji primer za objekat materijala bio bi zahtev za definisanjem matrice veza izmedju napona i deformacija. U najopštijem slučaju to bi bila matrica koja bi odgovarala trenutnom stanju i istoriji napona i određenom inkrementu napona. U slučaju linearno elastičnog materijala, ta matrica će biti konstantna, ali u nekim drugim slučajevima, ona će zavisiti od niza parametara (istorije napona, deformacija, temperature, vlažnosti, pravca prirašta napona i sl. ...). Korisniku klase materijala je bitna matrica veza, a ne sam način na koji se do nje došlo. Otuda je tok analize takav, da se objektu šalje zahtev za matricom veza, i kao odgovor dobija tražena matrica veza. Time je omogućeno da se klasa materijala nezavisno razvija od klasa koje koriste materijale, sve dok je isti oblik poruka koje se iniciraju izmedju spoljnjeg programa i same klase. Na taj način je moguće *zatvoriti* (inkapsulirati), probleme vezane za ponašanje materijala u ovu klasu i nezavisno od nje razvijati druge delove programa.

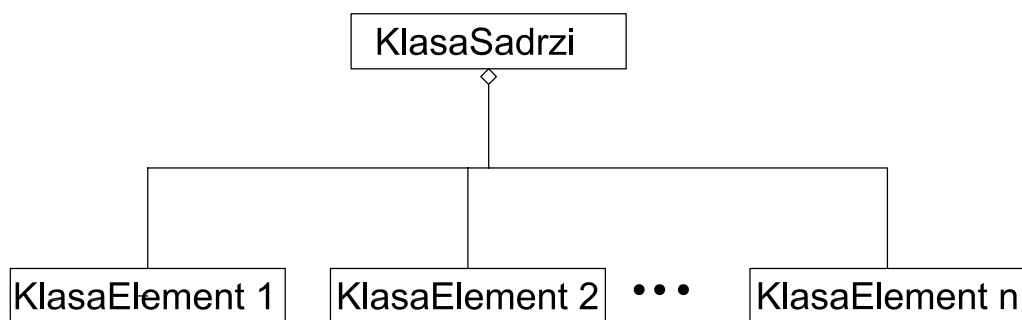
Objektni pristup omogućava lako generisanje novih klasa *izvodjenjem* iz postojećih. Izvedena klasa, nasledjuje sve osobine klase na osnovu koje je izvedena uz mogućnost da joj se dodaju nove funkcije i stanja. Izvedena klasa se može posmatrati kao specijalna vrsta objekta klase iz koje je izvedena. To omogućava da se u postojećem kodu, umesto klase koja već postoji, ugradi nova klasa, koja je izvedena iz klase koja već postoji. Ukoliko se u izvedenoj klasi ne definišu nove funkcije, primenjivaće se funkcije klase iz koje je izvedena (bazne klase). Ukoliko se pak, u izvedenoj klasi, *preklopi* neka funkcija (napiše funkcija sa istim nazivom i argumentima) primenjivaće se funkcija iz izvedene klase. Ova tehnika je omogućila brz razvoj novih klasa na osnovu funkcionalnosti postojećih klasa.

Relacije izmedju klasa se prikazuju dijagramima u kojima su klase predstavljene pravougaonicima u kojima je naziv klase. U slučaju da klasa pri svom funkcionisanju komunicira sa (koristi funkcije) nekom drugom klasom, koristi se izraz *i zna za nju*, pravougaonici se povezuju linijom. Na taj način se lako uočava koja sve klasa može biti pozvana pri izvršenju programa.

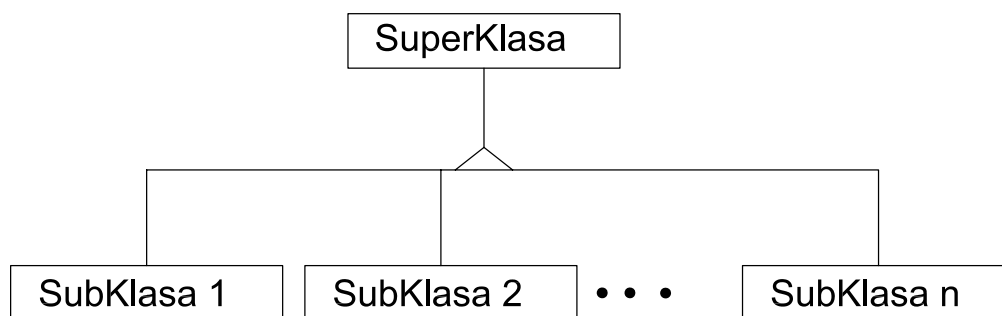
Sledeći oblik veze je kada klasa sadrži član koji je primerak neke druge klase. Na primer, klasa koja bi opisivala gredni nošač, u sebi bi sadržala poprečne preseke. Javlja se potreba da se svaki poprečni presek grede u nelinearnoj analizi iskaže drugačije ponašanje. Nelinearno ponašanja materijala može da se iskaže kroz promenjene vrednosti krutosti preseka.

Na slici 1.1 je grafički prikazana ta relacija.

Složeniji oblik relacije je nasledjivanje klasa. Ta relacija omogućava formiranje novih klasa koje su specifični oblici već postojećih klasa. Može se objasniti na primeru klase koja bi opisivala poprečni presek u gredi. Za samu gredu, poprečni presek ima funkcije kojima vraća informacije o silama, deformacijama i vezama generalisanih sila i deformacija u preseku (informacije o krutosti i zaostaljoj deformaciji). Pri tome oblik poprečnog preseka obezbeđuje informaciju o geometrijskim karakteristikama (površini, položaju težista, momentima inercije). U najopštijem slučaju, klasa koja čuva geometriju konkretnog poprečnog preseka, bi trebala da sadrži sve potrebne geometrijske karakteristike. U velikom broju slučajeva, poprečni presek je specifičnog oblika (pravougaoni, kružni i sl.) i tada je dovoljno imati informaciju o širini i visini u slučaju pravougaonog ili prečniku u slučaju kružnog. Otuda se pravougaoni poprečni presek ili kružni poprečni presek mogu smatrati specijalnim slučajevima poprečnog preseka. Prema tome, poprečni presek je bazna (osnovna ili super klasa) dok su pravougaoni poprečni

Slika 1.1: Dijagram koji prikazuje relaciju *sadrži se*

preseka ili kružni poprečni preseka izvedene klase (ili subklase). Na slici 1.2 je prikazana ta relacija grafički.



Slika 1.2: Dijagram koji prikazuje relaciju nasleđivanja

Kombinacijom dijagrama 1.2 i 1.1 može se prikazati složena struktura veza između klasa. Razvojem objektnog modula i povećavanjem broja klasa, takav način prikazivanja postaje nepregledan, pa se niz klasa prikazuje u obliku tabulirane liste. U toj listi, klase se ispisuju jedna ispod druge, dok se izvedene klase (subklase) ispisuju tabulirano u odnosu na klasu iz koje su izvedene. Na taj način se može prikazati veliki broj klasa, ali izostaju relacije *zna za* i *sadrži*.

SuperKlasa1

subklasaA, SuperKlase1
 subklasaB, SuperKlase1
 subklasaC, SuperKlase1

SuperKlasa2

subklasaD, SuperKlase2
 subklasaE, SuperKlase2
 subklasaF, SuperKlase2

Objektni pristup analizi problema, znatno je olakšao izradu programa. Obim vremena koji je potreban za izradu programa je znatno smanjen. Stvorena je mogućnost korišćenja objekata

koji su kreirani od strane različitih autora i na taj način, u posrednom smislu, omogućen je zajednički rad stručnjaka koji se međusobno ni ne poznaju.

Primere efikasnosti objektnog prisutpa možemo videti u korišćenju rutina pri Windows programiranju. Uz pomoć objekata i klasa koje su dostupne uz kompajler, sa lakoćom se može napraviti program koji koristi Windows okruženje sa kompletnom funkcionalnošću karakterističnom za windows programe.

Objektni pristup i njegova široka primena dovodi, u nekim slučajevima, i do smanjivanja efikasnosti programa - brzine rešavanja problema (tzv. performanse programa). To je pre svega posledica zanemarivanja značaja brzine izvršavanja programa u početku kreiranja objektnog modela. Sloboda koju daje objektni pristup, omogućava brz razvoj programa. Zbog toga autori veoma često kreiraju programe kojima žele da što pre dobiju rezultate koji verifikuju njihov rad. Poboljšavanje performansi se ostavlja za kasnije. Na žalost, kod primene objektnog pristupa, veoma se teško kasnije mogu suštinski poboljšati performanse. Otuda se, u poslednje vreme, razvijaju posebne tehnike kojima se ocenjuje brzina i efikasnost problema koji se rešava još u fazi kreiranja objektnog modela. Tako se u [25] konstatuje da su loše performanse programa pre posledica lošeg dizajna programa nego implementacije. Predviđanje performansi objektno orijentisanog sistema može biti veoma problematično, jer se po pravilu radi o *decentralizovanom* sistemu koji može biti rezultat rada velikog broja ljudi. Software Performance Engineering (SPE) je oblast koja je razvijena sa ciljem povećanja efikasnosti softwarea još u fazi njegovog kreiranja.

1.3 Objektni pristup analizi u teoriji konstrukcija

Uvodjenje tehnike objektnog pristupa početkom poslednje decenije dvadesetog veka, uticalo je na razvoj analize u teoriji konstrukcija. Objektni modeli koji se razvijaju su raznoliki i kroz njih se uočava postupno usvajanje objektnog pristupa modeliranju.

Autori su u početku koristili nove mogućnosti modeliranja, pre svega u smislu pojednostavljivanja razvoja programa. Na taj način je izvršeno unapredjenje postojećeg proceduralnog programa *NAP* u novi program *ObjectNAP* [3]. U tom pristupu se uz naglasak na jednostavnijem razvoju, uočava potreba da se promeni i pristup analizi u celini, ali se ipak najvećim delom, ostalo na reprodukciji (dupliranju) postojećeg postupka koji je primenjivan u proceduralnom programu. Sam program je prilagodjen razvoju izoparametarskih elemenata, te se u klasi elemenata, nalaze:

- broj i raspored čvorova, dok je svaki čvor u klasi *nod*;
- klasa materijala, koja obezbeđuje matricu krutosti materijala;
- Funkcije oblika *ShapeFcns* kao objekti koji u svom sastavu imaju funkcije koje obezbeđuju vrednost interpolacione funkcije i njenih izvoda po lokalnim koordinatama.
- Interpolacione tače u klasi *gauss*, koje sadrže lokalne koordinate i težinske vrednosti u zavisnosti od dimenzija problema i broja tačaka.

Klasa element vrši numeričku integraciju matrice krutosti, odnosno nalazi vrednosti statičkih veličina u elementu. Ovakav pristup sa jedne strane formira uopšteni izoparametarski konačni element i pogodan je za prikazivanje metoda i uvodjenje novih interpolacionih funkcija.

Sračunavanje matrice krutosti, zahteva veliki broj operacija koje su sakrivene u objektima koje sačinjavaju ovakav pristup, pa je on ilustrativan ali nije efikasan. Apstrakcija (uopštavanje) kojom se izražava ponašanje proizvoljnog elementa je sadržana u obliku, broju interpolacionih tačaka i funkcija oblika, dok se primenjuje isti algoritam integracije konačnog elementa. Pri tome se ignoriše mogućnost nasledjivanja, koja će se kasnije javiti kao efikasan vid apstrakcije problema. Nasledjivanje je korišćeno samo u okviru poziva grafičkih rutina elemenata.

Značajan aspekt korišćenja objektnog modeliranja je u razvijanju novih objekata koji imaju funkciju alata pri razvijanju programa. Klase matrica, vektora ili tenzora su razvijani u tom smislu. Opet se radi o veoma ilustrativnim klasama kojima se izrada modela pojednostavljuje.

Primer ovakve opštosti je klasa "tensor", koju je pisao Jeremić Boris u okviru svog doktorata [4]. Klasa je obezbedila funkcionalnost konvencija o sabiranju i omogućila viši stepen apstrakcije pri radu sa ovakvim tipom podataka. Primer operacije :

$$C_{il} = (A_{ijk} + B_{ijk}) * D_{jkl}$$

se kodirao u programu sa instrukcijama:

$$\begin{aligned} & \text{tensor } C; \\ & C = (A("ijk") + B("ijk")) * D("jkl"); \end{aligned}$$

Primena ove klase, u suštini predstavlja primenu alata, veoma je jednostavna i ilustrativna ali istovremeno sakriva od korisnika kompleksnost a time i veliki broj operacija koje se obavljaju pri izvršavanju takve instrukcije u kodu.

Ovakav pristup sadrži visok stepen apstrakcije i primeren je izradi programa kojim se testiraju modeli materijala na relativno ograničenom broju jednostavnih konačnih elemenata. Sa druge strane, primena takve klase ne može zadovoljiti sve potrebe teorijske mehanike, jer klasa ne pravi razliku između kovarijantnih i kontravarijantnih indeksa, ali se može primeniti u svim konačnim elementima u ortogonalnim koordinatnim sistemima. Treba naglasiti da primena takvih operacija klase tenzor u modelu materijala, pri izradi numeričkih modela sa 10^6 konačnih elemenata (od kojih svaki sadrži barem jedan primerak klase materijala u okviru čije primene su višestruko pozivane ovakve operacije) dovodi do programa koji se sporo izvršava. U svakom pozivu ove operacije, se mora izvršiti sintaksna analiza niza karaktera koji su prosledjeni objektu tenzora, pre poziva operacije množenja, i proveriti da li se još negde u izrazu pojavljuje isti indeks. Takav pristup omogućava visok stepen apstrakcije pri kreiranju programa, ali dovodi do problema u toku primene takvog postupka na realnom modelu sa velikim brojem čvorova i elemenata.

Optimizacija broja operacija u postupku numeričkog modeliranja i analize umanjuje opštost ali dovodi do efikasnijih programa. U velikom broju konkretnih primera, krajnjem korisniku programa nije od interesa stepen apstrakcije koji je primenjivan u modeliranju, već njegovi rezultati, brzina i lakoća kojom dolazi do njih. Otuda se javlja potreba za nizom optimizacija u kodu kojima se umanjuje čitljivost, dok se apstrakcija svodi na mogućnost formiranja baznih i izvedenih klasa (superklasa i subklasa prikazanih na slici 1.2).

Najveći deo literature i raspoloživog koda u konačnim elementima je u svojoj opštosti orijentisan u smeru formiranja numeričkog modela 2D i 3D elemenata (pločastih elemenata,

ljuski, ili solida) dok je primena rezultata u dimenzionisanju u građevinarstvu ograničena na linijske elemente i napone određene na osnovu njih.

Prednosti i problemi do kojih dolazi uopštavanjem objektnog modela mogu se uporediti sa prednostima i problemima primene izraza mehanike kontinuma u proizvoljnom krivolinijskom koordinatnom sistemu. Naime, vođenje računa o kovarijantnim i kontravarijantnim indeksima uz ostala pravila diferencijalne geometrije (tenzorskog računa), dobijamo veoma moćno analitičko orudje. Sa druge strane, u praktičnoj primeni su uglavnom pravougli koordinatni sistemi u kojima su svi izrazi daleko jednostavniji. Prednosti koje donosi opštost izraza koji važe i u krivolinijskim koordinatnim sistemima, ne dolaze do izražaja u najvećem broju praktičnih primera.

1.4 Problemi strukturne analize

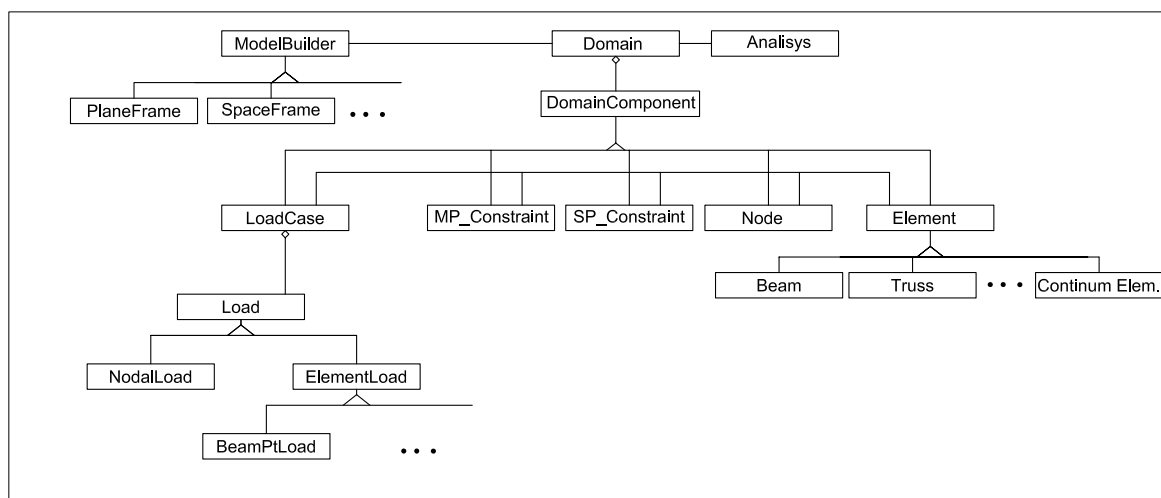
Veliki broj mogućih problema u inženjerskoj praksi, nameću i veliki broj potencijalnih algoritama - postupaka u njihovom rešavanju. Aproksimacije koje se uvode pojednostavljaju postupke i čine ih efikasnim sa jedne strane, dok im sa druge strane umanjuju opštost. U ovom delu će se prikazati osnovni objekti modeli koji se koriste u analizi konstrukcija.

Problem strukturne analize koji se rešava numeričkim postupkom se u najopštijem slučaju svodi na rešavanje problema iskazanog jednačinom.

$$F(X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n) = 0 \quad (1.1)$$

Jednačina (1.1) u slučaju linearne analize, predstavlja linearan sistem jednačina, dok u opštem slučaju može biti nelinearni sistem jednačina i u tom slučaju je teško naći rešenje u zatvorenom obliku, već se primenjuje neki od iterativnih postupaka.

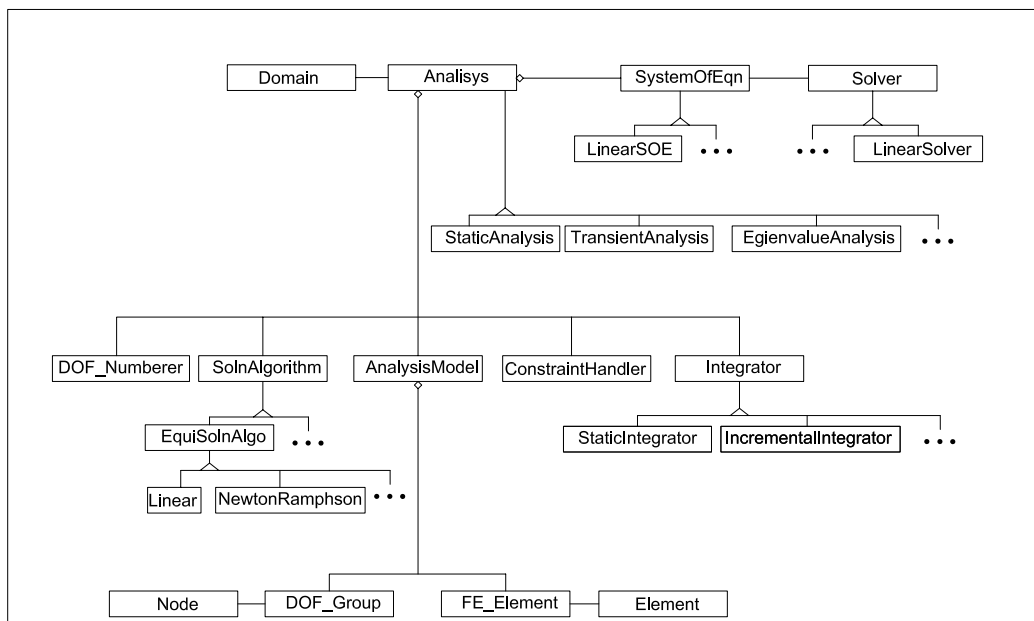
U objektnom pristupu analizi, rešavanje navedenog problema je povereno klasama koje se bave analizom. Preostali deo opslužuje potrebe navedenih klasa. U slučaju objektnog pristupa, koji je prezentiran u doktorskoj tezi McKenne [21], relacije između klasa su prikazane na slici 1.3.



Slika 1.3: Osnovne relacije između klasa u OpenSees-u

U osnovi, podela je izvršena na:

- *Domain* koji sadrži i manipuliše svojim komponentama (komponente su čvorovi, konačni elementi, do opterećenje i sl.). Svi elementi sistema su izvedeni iz klase *DomainComponent* koja obezbeđuje funkcionalnost na osnovu koje se elementi pozivaju. Domen u sustini, služi kao velika baza podataka koja omogućava pristup svojim komponentama. Takodje, sam domen može biti menjan u toku analize (u slučajevima da je potrebno da se izvrši prognošenje mreže na određenom mestu ili slično).
- *ModelBuilder* je klasa koja generiše komponente Domena. Ta klasa na osnovu ulaznog fajla ili interaktivnog unosa (u windows okruženju) pravi elemente modela. Otuda se kao Subklase (izvedene klase) ove klase javljaju: *PlaneFrame*, *SpaceFrame*, ... Svaka od izvedenih klasa, generiše sistem (konačne elemente, i čvorove sa odgovarajućom geometrijom i specifičnostima). U zavisnosti od problema koji se obradjuje, ova klasa dodeljuje čvorovima moguće stepene slobode, generiše odgovarajuće elemente i veze.
- *Analysis* klasa sadrži postupak rešavanja sistema. Sve Subklase *Analysis* klase, se obraćaju *Domain* klasi i od nje dobijaju odgovore na osnovu kojih usmeravaju tok analize. Ova klasa u osnovi, rešava problem formulisan jednačinom (1.1). Kako se u opštem slučaju radi o različitim postupcima za rešavanje različitih problema, kod kojih se u toku rešavanja koriste njihove specifičnosti, to bi detaljan prikaz objektnih modela ove klase koji se javljaju u postojećim programima prevazišao obim ovog doktorata. U navedenoj literaturi [21] je predložen i prikazan objektni model koji obuhvata veliki broj raznovrsnih analiza i dat je na slici 1.4.



Slika 1.4: Objektni model klase za analizu u [21]

Ovakav oblik modela omogućava jednostavno dodavanje novih tipova analize koje će koristiti razne specifičnosti bez uticaja na domen. Ipak, analizom takvog objektnog modela se

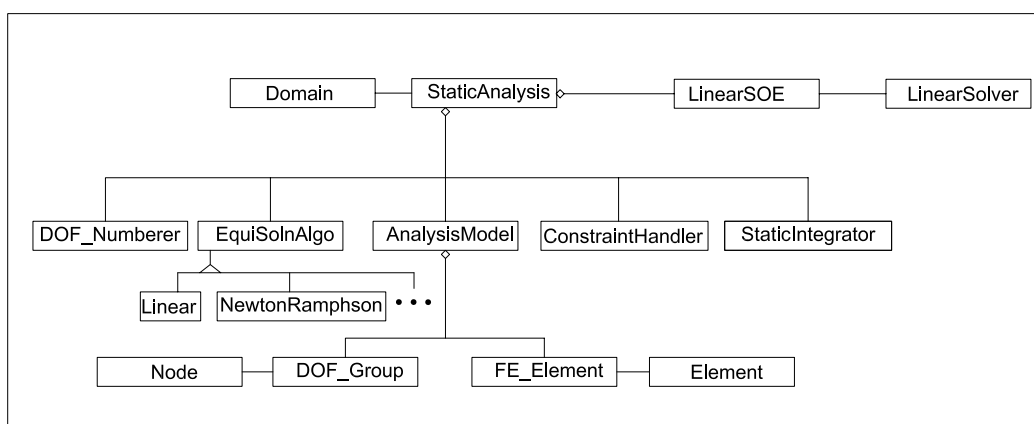
može uočiti da je on prilagodjen nelinearnoj analizi i to posebno odredjenim tipovima problema, mada usled opštosti, daje mogućnost da se primeni na proizvoljnom modelu.

U objektnom modelu prikazanom u [21], klasa *Analisis* sadrži objekte:

- *SolnAlgorithm* kao klasu koja će voditi celokupan tok analize. U zavisnosti od formulacije problema, mogu se koristiti raznovrsni algoritmi, ali od interesa za temu ovog doktorata su algoritmi za rešavanje statičkih problema koji mogu biti linearni ili neki od nelinearnih (*NewtonRamhson-ov*).
- *AnalysisModel* je klasa koja sadrži *DOF_Group* (grupe stepena slobode do kojih dolazi preko čvorova) i *FE_Element*, koji predstavljaju Elemente.
- *Integrator* je klasa koja rukovodi integracijom matrica krutosti (formiranjem sistema jednačina), kao i ažuriranjem vrednosti pomeranja u čvorovima.
- *ConstraintHandeler* rukovodi constraint-ovima. To su ograničenja u pomeranjima čvorova i mogu biti modelirana na razne načine.
- *DOF_Numberer* vrši numeraciju stepeni slobode. Za brzinu rešavanja sistema, od velikog je značaja numeracija jednačina. Kako je u modelu predvidjena mogućnost dodavanja novih čvorova i elemenata, to je i eventualno renumerisanje povereno ovoj klasi.

Navedeni objektni model omogućava primenu raznovrsnih algoritama dok je elementima nametnuta obaveza prilagodjavanja univerzalnom algoritmu. Zbog potrebe da element komunicira sa proizvoljnim algoritmom, od elementa se traži i da na zahtev sistema odgovori na univerzalne poruke. Ovakav objektni model može biti pojašnjen na jednostavnom primeru statičke analize.

U slučaju statičke analize, kad se primenjuje *StaticAnalysis* klasa (jedna od subklasa-izvedena klasa klase *Analysis*). Objektni model sa slike 1.4 se svodi na objektni model prikazan na slici 1.5.



Slika 1.5: Objektni model klase za statičku analizu u [21]

Sama klasa *StaticAnalysis*, ima dve funkcije:

- *domainChanged()* koja poziva funkcije *setLinks* po svim objektima u domenu, poziva *ConstraintHandler*-ovu funkciju *handle()* koja kreira *FE_Element* -e i *DOF_Group* -e, poziva *number()* u okviru *DOF_Numberer* objekta koja vrši numeraciju stepena slobode i jednačina, objektu *LinearSOE* saopštava broj jednačina i na kraju izveštava *EquiSolnAlgo* i *StaticIntegrator* da je domen izmenjen pozivom njihovih funkcija *analysisModelChanged*.
- *analyse()* Ova funkcija poziva funkciju *domainChanged()*, poziva *applyLoad()* funkciju *AnalysisModel* klase koja poziva opterećenja da generišu svoje doprinose i na kraju poziva *solveCurrentStep()* funkciju *EquiSolnAlgo* koja vrši analizu. Na kraju se poziva funkcija *commit()* na objektu *Domain* koja utvrđuje sračunate vrednosti (pozivom funkcija *commit* po svim objektima u domenu).

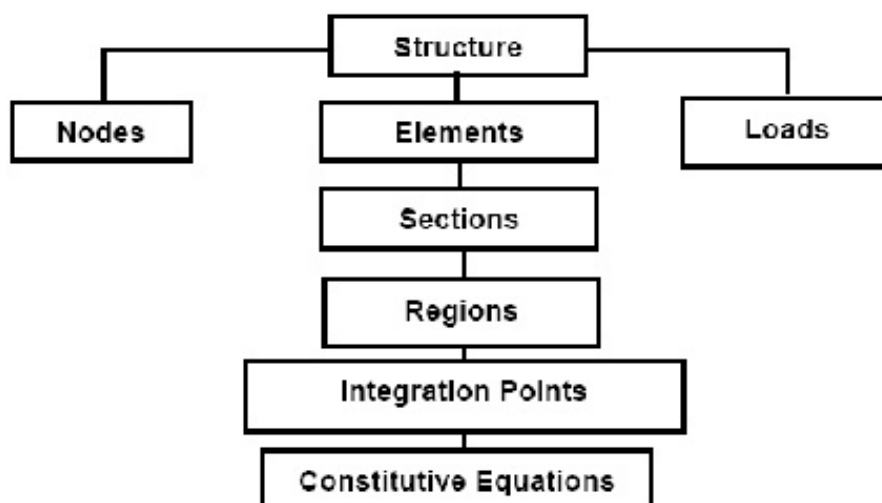
U slučaju statičke analize, na mesto bazne klase *SolutionAlgorithm*, primeniće se njena subklasa *EquiSolnAlgo* koja kao i svaka klasa tipa *SolutionAlgorithm* kontroliše tok rešavanja problema. U ovom slučaju u zavisnosti da li je problem linearan ili nelinearan, primeniće se subklasa *Linear* ili neka od nelinearnih (npr. *NewtonRaphson*). Sve klase ovog tipa imaju funkciju *solveCurrentStep()*, koja se poziva od strane *Analysis* klase.

Prikazani objektni model je veoma kompleksan sa jedne strane a konačni elementi moraju da sadrže funkcije kojima ispunjavaju zahteve različitih analiza. Ako pogledamo samo razliku u linearnoj i nelinearnoj analizi statičkog problema, već se mogu uočiti funkcije objekata koje moraju postojati u nelinearnoj dok se uopšte ne pominju u linearnoj analizi.

Otuda se može konstatovati da apstrakcija primenjena u tom modelu nije primerena objektnom modelu linijskog elementa koji će biti razvijen u okviru ove teze. Kako je predmet ove teze Objektno modeliranje oštećenja i viskoznih deformacija, to je akcenat stavljen na specifičnosti objekata vezanih za model linijskog elementa, poprečnog preseka, materijala i postupke koji se primenjuju u takvoj analizi. U McKennin-om objektnom modelu, prikazanom na skicama 1.4 i 1.5 akcenat je stavljen na apstrakciji algoritma, prati se istorija usvojenih vrednosti pomeranja u čvorovima (istorija se pamti u *DOF_Group*), dok se od elementa očekuje da na osnovu ustanovljenih vrednosti (pomeranja u čvorovima) formira kako tangentne matrice, tako i vektore rezidualnog opterećenja. Naravno da se posredno ostavlja mogućnost da i element pamti istoriju svojih stanja, ali osnovna ideja je da se istorija pamti u stepenima slobode. Otuda je takav pristup prilagodjen elementima kod kojih je ' ceo element ' od materijala istih mehaničkih karakteristika dok se u slučaju promene karakteristike u delu elementa, ostavlja mogućnost dodavanja novih čvorova i novih elemenata (progušćavanje mreže). To je pre svega, primereno pločastim i trodimenzionim elementima.

Izloženi model analizira funkcionisanje i razvoj visoko decentralizovanog sistema objekata. On je primeren analizi koja je vršena u [21] , gde je vršena analiza mogućnosti primene paralelnih procesa. U osnovi isti model je primenjen i u razvoju *OpenSees*-a.

Ovako uopšten pristup je prilagodjen problematici kojom se bavio McKenna. Sa druge strane, fokusiranje na probleme modeliranja štapa omogućavaju znatno jednostavniji prikaz objektnog modela i fokusiranje na modeliranje konkretnog problema. Tako se u navedenoj literaturi [22] razradjuje objektni model štapa prikazan na slici 1.6.



Slika 1.6: Osnovne relacije izmedju klasa u radu [22]

Glava 2

Modeliranje linijskih nosača

U ovom poglavlju će se prikazati numeričko modeliranje linijskih nosača. Naglasak u ovom modeliranju će se staviti na povećavanje stepena opštosti izraza. Cilj povećavanja opštosti je omogućavanje upotrebe složenog modela poprečnog preseka.

Analitički izrazi i postupci, izvedeni i prikazani u ovom poglavlju se primenjuju u objektima koji su modelirani u narednim poglavljima.

Uobičajeni i široko primenjivani izrazi za članove matrice krutosti grednog elementa, zasnivaju se na pretpostavkama koje su pojednostavile problem i prema kojima je osa štapa težišna osa poprečnog preseka koja se istovremeno poklapa sa osom centra smicanja poprečnog preseka. Usvaja se da se poprečne ose štapa poklapaju sa pravcima glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka pa se veze sila u preseku sa generalisanim deformacijama poprečnog preseka, svode se na dijagonalnu matricu.

Usvajanje uopštene veze između vektora sila u porečnom preseku i vektora generalisanih deformacija poprečnog preseka, vodi formiranju matrica krutosti i fleksibilnosti samog preseka koje imaju vandijagonalne članove. Članovi ovih matrica imaju složenije ali opštije izraze, čiji su specijalni slučajevi u literaturi široko poznati.

U prvom delu ovog poglavlja, prikazano je modeliranje ponašanja poprečnog preseka. Izvedeni su izrazi za matrice krutosti i fleksibilnosti homogenih elastičnih preseka. Obradjen je slučaj odstupanja položaja težista i centra smicanja od ose štapa kao i odstupanje lokalnih osa od glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka. Odstupanja težista ima uticaja i na matrici masa poprečnog preseka.

U drugom delu poglavlja, izvedene su matrice krutosti, primenom uopštenog modela poprečnog preseka. Specijalni slučajevi ovih matrica se svode na poznate matrice krutosti. U integraciji je korišćena metoda deformacije i fleksibilnosti.

U trećem delu, prikazan je postupak određivanja ekvivalentnog čvornog opterećenja kao i opšti postupak 'modifikacije matrice krutosti oslobadjanjem uticaja na krajevima štapa'.

Na kraju poglavlja, modeliranje efekata nedeformabilnih delova štapa, tzv. offseta, je prikazano i iskorišćeno umesto numeričke integracije matrice fleksibilnosti štapa sa promenljivim poprečnim presecima. Mada nije direktna tema ovog doktorata, navedeno uopštavanje je dovelo i do problema sa integracijom matrice masa štapa, pa je izvedena i matrica masa štapa sa ekscentrično postavljenim poprečnim presekom.

2.1 Linijski element

Strukturalna analiza linijskih elemenata sadrži čitav niz aproksimacija koje pojednostavljaju analizu. Prostorni element svodi na linijski, jednodimenzioni element. Pri tome se sve karakteristike redukuju na jednu dimenziju - liniju. Osnovne karakteristike elementa (statičke i deformacijske veličine) su izražene u funkciji položaja preseka duž ose. Veza između statičkih i deformacijskih veličina određena je geometrijskim oblikom poprečnog preseka i materijalnim karakteristikama u njemu i izražava se kao *krutosti preseka*.

Posledica takve aproksimacije je značajno pojednostavljenje modela i analize. Uprkos činjenici da su danas mogućnosti proračuna znatno veće, i da su se i pre više decenija pojavili radovi u kojima je umesto linijskog modela tretiran više dimenzioni model (greda se modelira 2D membranskim elementima [31], [32], [18], [27], [30], [1] ili se od 3D elemenata [2], [28], [18], [10] formira prostorni model) kao i da je tim modelima moguće analizirati složene uticaje. U praktičnoj analizi i važećim standardima, koriste se uticaji i veličine karakteristične za linijski elementi. To je posledica jednostavnosti analize, lake mogućnosti kontrole kao i potrebe da se uvek "ostajane na strani sigurnosti".

Kompleksne rezultate koje može da obezbedi trodimenzioni model grede, u projektanskoj praksi veoma teško možemo kontrolisati, proveriti i upotrebiti. Verifikacija rezultata ovakvog modela se svodi na proveru i potvrđivanje materijalnog modela i određenih specifičnih uticaja. Sa druge strane, kontrola sigurnosti i ojačanje (dimenzionisanje) se standardima definišu u odnosu na uticaje karakteristične za jednodimenzione elemente.

Pri analiziranju uticaja u jednodimenzionim (grednim) elementima, razvija se čitav niz postupaka kojima se obuhvataju pojedini efekti. Pri tome se misli na čitav niz elemenata čije ponašanje se u strukturi (u celini sistema) posmatra kao jednodimenzioni element (bilo da se radi o definisanju geometrije, ograničavanju u mogućim pomeranjima ili analizi rezultata), dok se sa druge strane, unutar elementa vrši diskretizacija i uspostavljanje novih pretpostavki o deformacijama ili mogućim raspodelama statičkih uticaja. Problem u primeni ovih elemenata u složenom modelu sa više desetina štapova, može se uočiti posmatranjem spoljašnjih stepeni slobode koji moraju odgovarati spoljašnjim stepenima slobode linijskog elementa a to su statički i deformacijski uslovi na krajevima štapa (sile odnosno pomeranja čvorova). Na taj način, spoljašnji stepeni slobode su ograničeni na 6 stepeni slobode po svakom čvoru, odnosno 12 na celom elementu. Otuda se ili deplanacija mora izgubiti na kraju elementa ili se moraju uvoditi dodatni stepeni slobode u čvorovima. Dodatni stepeni slobode u čvorovima sa druge strane, ograničavaju opštost konačnog elementa i mogućnost povezivanja sa drugim elementima. Tako se u navedenoj literaturi [14] uvode fleksibilni čvorovi kako bi se izbegli efekti krutih čvorova u vezi štapova.

Postoje raznovrsni nazivi za navedenu diskretizaciju, pri čemu se koriste različiti nazivi za istu vrstu diskretizacije ili isti nazivi za različite vrste diskretizacije unutar linijskog elementa.

Sa jedne strane najjednostavniji model diskretizacije se dobija generisanjem štapa kombinacijom postojećih pločastih konačnih elemenata ili 3D-solid elemenata. Često se ti 2D i 3D elementi obogaćuju slojevima ili 1D linijama armature ili prednapregnutog čelika [10]. U tom slučaju se u sustini posmatra prostorno telo, kome se samo geometrija definiše kao "linijski

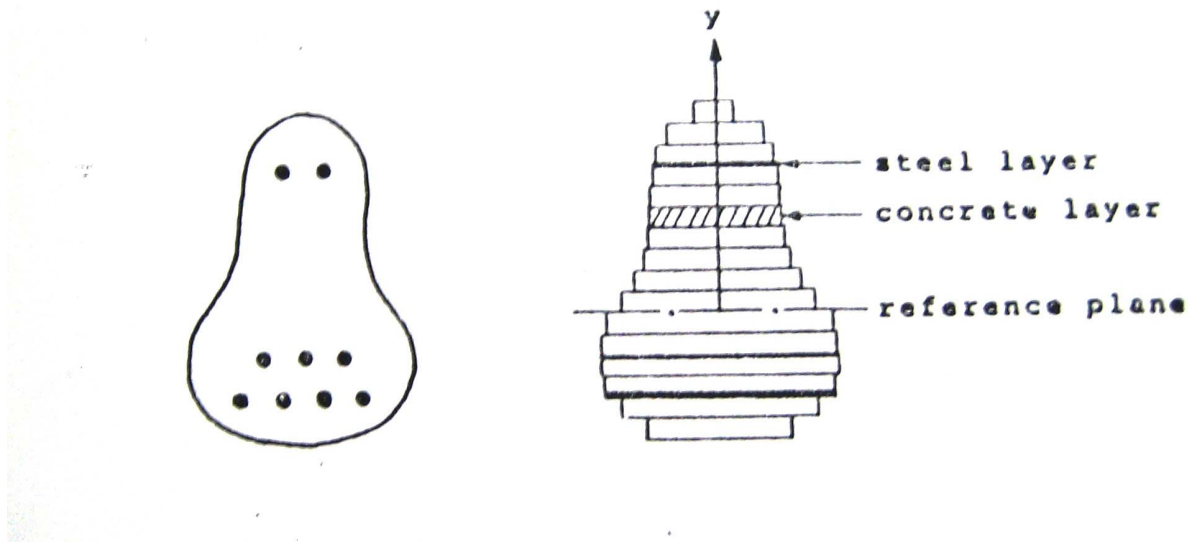
2.1. LINIJSKI ELEMENT

element” odnosno, uticaji se redukuju na jednu osu. Ali što se analitičkog modela tiče, to je u suštini prostorni model konačnih elemenata i sem analize rezultata, nema puno veza sa štapom. Zbog toga, ovaj pristup neće biti predmet analize u ovom radu.

Složeniji efekti se mogu opisati primenom slojeva uz dopuštanje deplanacije poprečnog preseka kad govorimo o layerima [14] ili o tankozidnim štapovima. Korišćenjem deplanacije u linijskom elementu, javlja se potreba za specijalnim vezama takvog štapa sa drugim štapovima, odnosno za mogućnošću da se efekat prenese na sledeći štap. To nameće potrebu da čvorovi imaju dodatne stepene slobode. Jedna od mogućnosti je da se koriste fleksibilni čvorovi [14]. Kod ovih elemenata deformacija svake tačke u štapu u poprečnom pravcu je funkcija deformacije ose štapa (i rotacije preseka oko uzdužne ose i položaja tačke u preseku). Deformacija u podužnom pravcu (u pravcu ose štapa) je kombinacija deformacije ose štapa (pomeranja u uzdužnom pravcu, i rotacija preseka oko poprečnih osa pomnoženim sa odstojanjima od osa) i deplanacije samog preseka.

Materijalna nelinearnost je kod najvećeg broja građevinskih konstrukcija osnovni uzrok nelinearnog ponašanja. Efekti ove nelinearnosti se sa nivoa materijalne tačke generalizuju na nelinearnim vezama statičkih i deformacijskih veličina u preseku. U cilju formiranja modela koji će na osnovu nelinearnog ponašanja materijala generisati nelinearne veze između sila i deformacija u preseku primenjuje se pretpostavka o ravnom preseku uz diskretizaciju poprečnog preseka. Diskretizacija može biti izvršena vlaknima (fiber-ima), slojevima (Layer-ima) ili regionima (zonama) [22].

U slučaju diskretizacije u okviru poprečnog preseka, pomeranja svih tačaka su određena pomeranjem tačke na osi štapa. Usvaja se pretpostavka da presek ostaje ravan i posle deformacije dok se dopušta njegova rotacija u odnosu na osu štapa.



Slika 2.1: Diskretizacija preseka slojevima

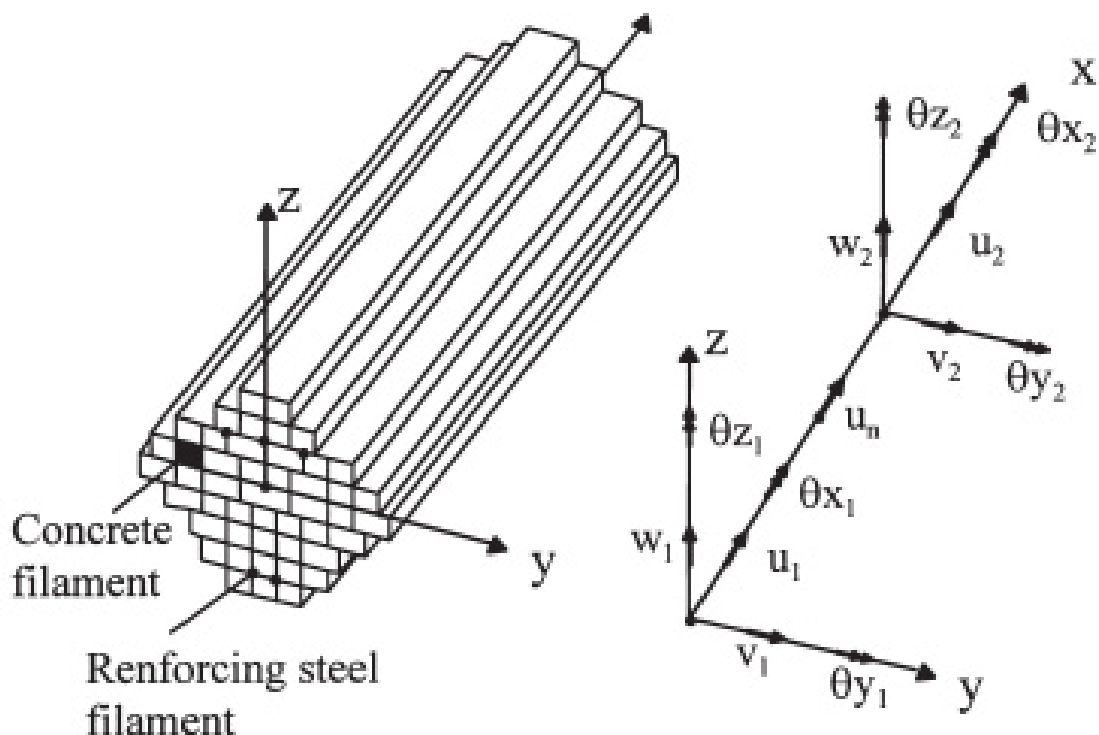
Primeri diskretizacije su:

- *Slojeviti poprečni presek* se deli na više slojeva ili "Layer-a". To je jedna od najjednostavnijih diskretizacija i primenjuje se kod štapova u jednoj ravni (ili kad je savijanje oko

2.1. LINIJSKI ELEMENT

jedne ose dominantno). Utvrđivanje karakteristika se vrši na osnovu pretpostavke da je konstitutivni model materijala u *sloju* isti. U navedenoj literaturi [15] se vrši takva diskretizacija a model poprečnog preseka je prikazan na slici 2.1. Slojevi mogu biti od različitih materijala, dok se pojedini slojevi mogu preklapati. Podaci potrebni za definisanje preseka se svode na "širinu" i „visinu“ sloja kao i na materijal od kojeg je sloj načinjen.

- *Vlknasti poprečni presek* se deli na više vlakana (delova površina ili patch-ova) pri čemu se analiza naprezanja u svakom vlaknu vrši na jednodimenzionom materijalnom modelu. Vlknasti model za razliku od slojevitog modela, omogućava analizu uticaja kombinacije dva momenta sa vektorima u različitim pravcima (koso savijanje) i ekscentričnog naprezanja. U literaturi se za ovakav model koriste nazivi *fibre section* ili *filament* [20], [19], [16], [8]. Prikaz ove diskretizacije je dat na slici 2.2. Uz pretpostavku o ravnim presecima, se može generisati veza između prirasta vektora statičkih veličina (sila u preseku) i deformacije u preseku. Treba napomenuti da navedeni model ne omogućava analizu efekata kombinovanog dejstva smičućih sila i momenta torzije sa jedne strane i normalne sile i momenata savijanja sa druge strane.

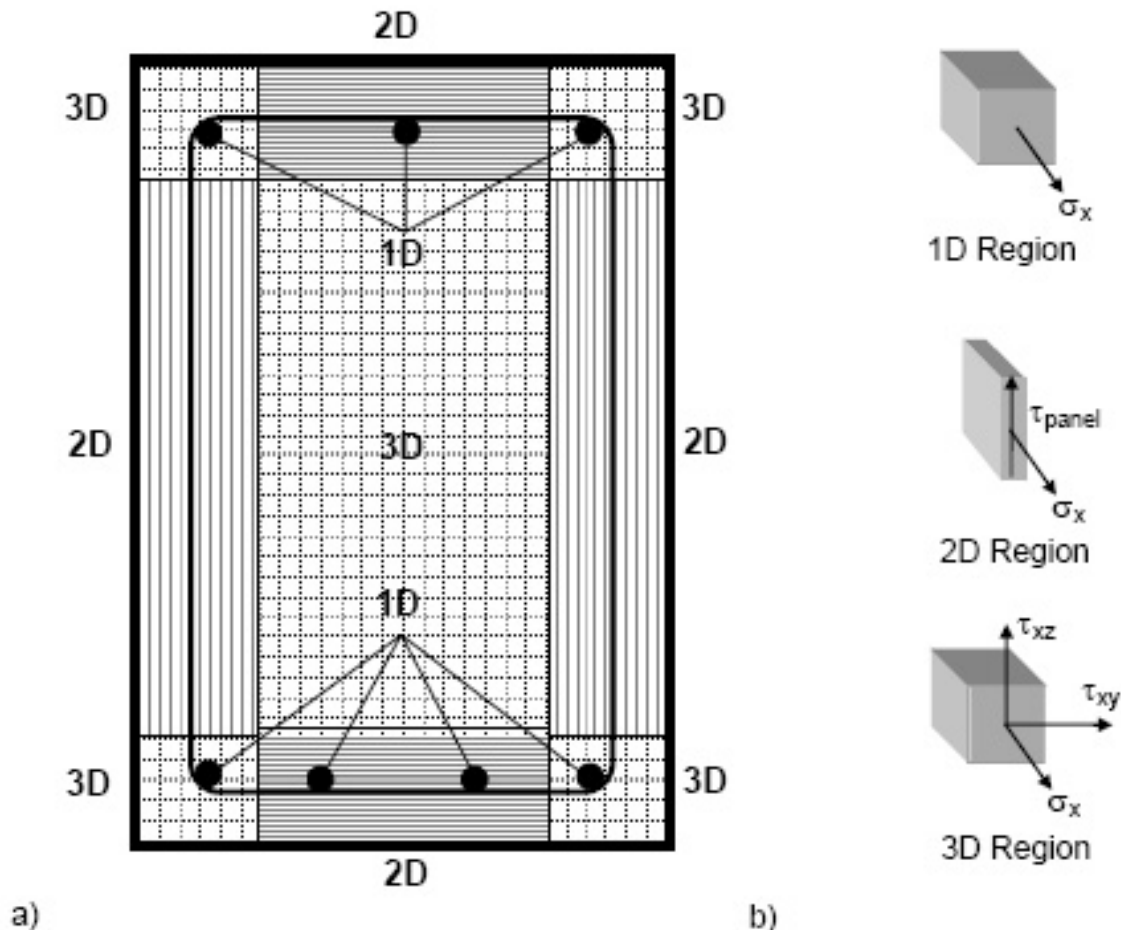


Slika 2.2: Diskretizacija preseka vlaknima prikazana u [20]

- *Podela preseka na regione* je postupak kojim se najpre izvrši podela na regione u kojima se primenjuju različiti materijalni modeli. Pod pojmom *različiti materijalni modeli* misli se na različita stanja napona (linearno, ravansko ili prostorno) koja se koriste u materijalnom modelu. Kako regioni zauzimaju veće površine poprečnog preseka to za razliku

2.1. LINIJSKI ELEMENT

od slojevitog ili vlaknastog modela nije osnovana pretpostavka da se ceo region nalazi u približno homogenom naponskom ili deformacijskom stanju, to se u okviru regiona uvode interpolacione tačke (kojih, prema potrebi, može biti proizvoljno mnogo). Ovakav model je prikazan u radu [22]. Diskretizacija preseka je prikazana na slici 2.3.



Slika 2.3: Diskretizacija preseka regionima u [22]

1D - regionima se opisuju delovi površine poprečnog preseka koji će uvek biti u linearnom naponskom stanju (podužna armatura). U tim oblastima, materijalni model će prikazivati samo normalni napon σ_x .

2D - regionima se opisuju oblasti u kojima se očekuje ravno naponsko stanje. To su oblasti u kojima postoji poprečna armatura u jednom pravcu i raspoređena podužna armatura u pravcu ose grede. U tim oblastima, model će dati samo normalni napon u pravcu ose štapa σ_x i smičući napon u pravcu prostiranja poprečne armature τ_{panel} .

3D - regionima se opisuju oblasti u kojima je moguće očekivati uticaje normalnog napona u pravcu ose štapa σ_x i smičućih napona u proizvoljnom pravcu za ravan sa normalom x: τ_{xy} i τ_{xz} .

Navedenim modelima preseka se formiraju - (integrišu) veze izmedju generalisanih statičkih i deformacijskih veličina. Drugim rečima, na taj način se određuje "krutost" preseka štapa (na

savijanje, aksijalna krutost, na torziju i smicanje). Usvajanjem idealizovanog težišta poprečnog preseka štapa za tačku u odnosu na koju se određuju krutosti, kao i usvajanjem glavnih centralnih osa inercije poprečnog preseka za referentne ose štapa, dobijaju se poznate, jednostavne veze između generalisanih statičkih i deformacijskih veličina. U cilju pojednostavljenja pri fomulisanju i izvodjenju izraza kojima se određuju članovi matrice krutosti štapa, u velikom broju radova se težište preseka usvaja tačka kroz koju prolazi uzdužna osa štapa.

Tokom nelinearnog ponašanja, menjaju se mehaničke karakteristike jednog dela poprečnog preseka. Promena karakteristika materijala u jednom delu preseka, dovodi do promene krutosti preseka a time i do promene položaja idealizovanog težišta. Zbog toga se javlja potreba da se pri uspostavljanju veza između sila duž štapa i deformacija ose štapa umesto težišta idealizovanog preseka, koristi proizvoljna referentna tačka.

2.2 Fleksibilnost i krutost preseka

U ovom delu će se opisati i uspostaviti veze između generalisanih statičkih i deformacijskih veličina u poprečnom preseku. To su karakteristike preseka koje su potrebne za integraciju matrice fleksibilnosti i krutosti štapa. Ove veze imaju potpunu analogiju sa konstitutivnim modelom materijala pri integraciji matrica krutosti prostornih 3D elemenata (solida).

Pod generalisanim deformacijama preseka podrazumevamo šest veličina sračunatih u odnosu na referentnu tačku R (koja ne mora biti težište ili centar smicanja) prikazanih u obliku vektora:

$$\{\varepsilon_L^R\} = \{\varepsilon_x^R, \gamma_{xy}^R, \gamma_{xz}^R, \theta_x, \kappa_y, \kappa_z\}^T \quad (2.1)$$

Gornji indeks R - označava deformaciju referentne tačke.

U slučaju korišćenja pretpostavke o ravnim presecima, deformacije (dilatacija i klizanja) svake tačke na poprečnom preseku su jednoznačno određeni položajem tačke i generalisanim deformacijama preseka datim jednačinama (2.2).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(y, z) &= \varepsilon_x^R - \kappa_y(z - z^R) - \kappa_z(y - y^R) \\ \gamma_{xy}(y, z) &= \gamma_{xy}^R - \theta_x(z - z^R) \\ \gamma_{xz}(y, z) &= \gamma_{xz}^R + \theta_x(y - y^R) \end{aligned} \quad (2.2)$$

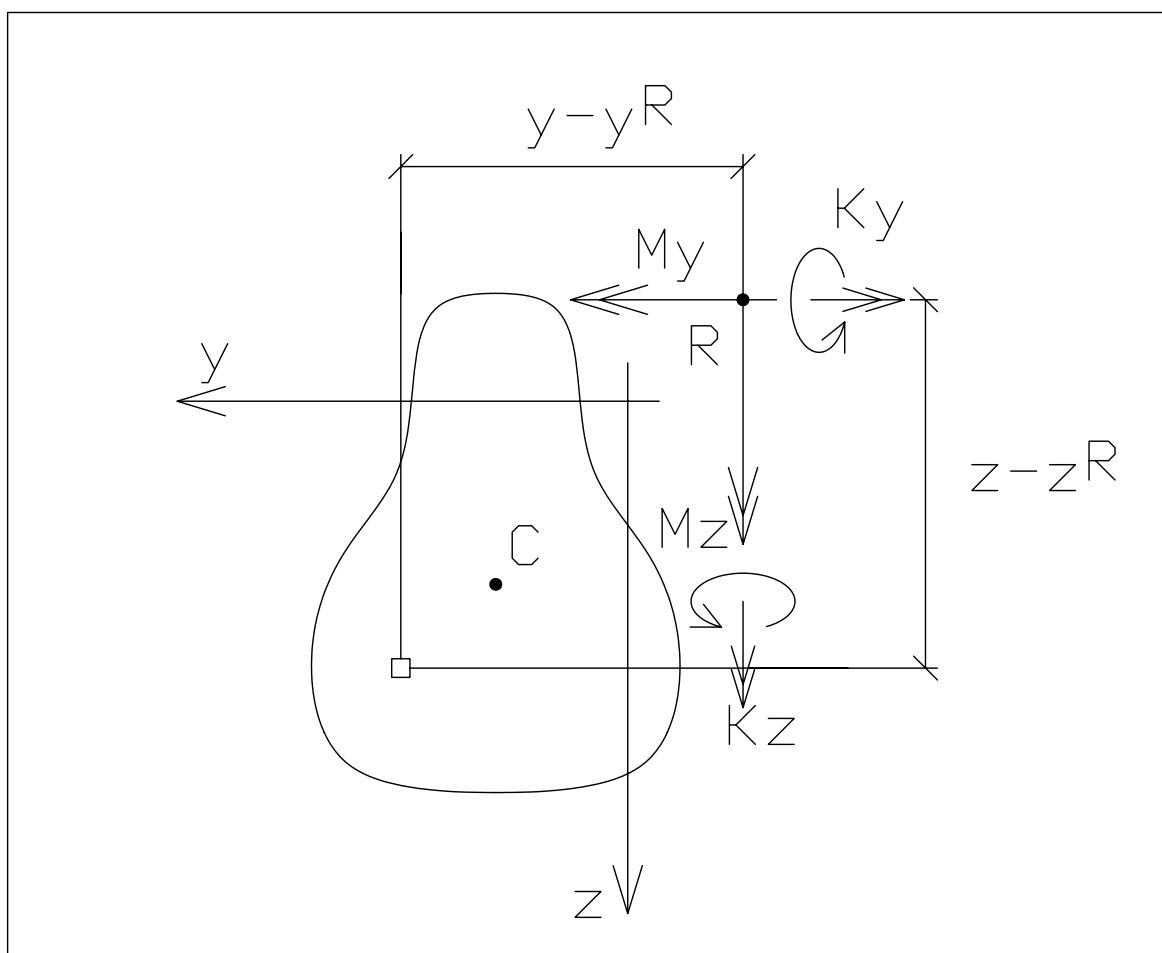
Pod generalisanim statičkim veličinama - silama u preseku podrazumevamo sile redukovane na istu referentnu tačku. Te sile obrazuju vektor:

$$\{F^R\} = \{N, T_y, T_z, M_x^R, M_y^R, M_z^R\}^T \quad (2.3)$$

i jednoznačno su određene naponima u preseku.

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA \\ T_y &= \int_A \tau_{xy} dA \\ T_z &= \int_A \tau_{xz} dA \\ M_x^R &= \int_A \left(-\tau_{xy}(z - z^R) + \tau_{xz}(y - y^R) \right) dA \\ M_y^R &= \int_A \sigma_x(z - z^R) dA \\ M_z^R &= \int_A \sigma_x(y^R - y) dA \end{aligned} \quad (2.4)$$

Izrazi (2.4) važe u svakom slučaju, nevezano od pretpostavke o ravnim presecima (2.2). U objektnom pristupu, objekat poprečnog preseka je zadužen za uspostavljanje veza između navedenih generalisanih sila $\{F^R\}$ i deformacija $\{\varepsilon^R\}$. Taj objekat, za utvrđeno stanje deformacija u preseku $\{\varepsilon_{com}^R\}$, mora obezbediti tangentu matricu krutosti $[K^R]$ i fleksibilnosti $[C^R]$



Slika 2.4: Referentna tačka u poprečnom preseku i usvojeni pozitivni smerovi momenata savijanja i krivina

preseka, odnosno vezu izmedju prirasta generalisanih deformacija i generalisanih sila iskazanih u izrazima (2.5).

$$\{\Delta\epsilon^R\} = [C^R]_{(\epsilon_{com}^R, F_{com}^R)} \cdot \{\Delta F^R\} \quad (2.5a)$$

$$\{\Delta F^R\} = [K^R]_{(\epsilon_{com}^R, F_{com}^R)} \cdot \{\Delta\epsilon^R\} \quad (2.5b)$$

U nelinearnom postupku, objekat poprečnog preseka, za utvrđeno stanje (usaglašene vrednosti) sila $\{F_{com}^R\}$ ili deformacija $\{\epsilon_{com}^R\}$ u preseku i za probnu vrednost prirasta (sila $\{\Delta F_{tr}^R\}$ ili deformacija $\{\Delta\epsilon_{tr}^R\}$) mora obezbediti komplementarne generalisane veličine (deformacije ili sile), iskazane izrazima (2.6).

$$\{\epsilon^R\} = \{\epsilon^R\}_{(\epsilon_{com}^R, F_{com}^R, \Delta F_{tr}^R)} \quad (2.6a)$$

$$\{F^R\} = \{F^R\}_{(\epsilon_{com}^R, F_{com}^R, \Delta\epsilon_{tr}^R)} \quad (2.6b)$$

U poprečnom preseku se ne obavlja samo prosta integracija karakteristika materijala, već je objekat poprečnog preseka odgovoran i za efekte sadejstva materijala u preseku. Sadejstvo zategnutog betona i armature ili efekti utezanja betona uzengijama su tipični primeri.

Ponašanje krtog materijala (betona pri zatezanju) je tipičan nestabilnog ponašanja. Pri- mena materijala koji bi opisivao samo beton u poprečnom preseku, dovodio bi do nestabilnosti preseka, štapa a time i celog sistema koji opisuje konstrukciju u trenutku dostizanja čvrstoće na zatezanje betona. Takvo ponašanje bi bilo realno u slučajevima nearmiranih betonskih greda. Dobro poznato sadejstvo zategnutog betona i armature, analizirano je u nizu radova. Pret- postavke koje se usvajaju u grednom nosaču su nametnule primenu modela zategnutog betona koji, ne prati direktno smicanje između betona i armature i propagaciju prsline u tom pravcu, već korekcijom modula elastičnosti betona u čitavoj zoni dovodi do adekvatnog ponašanja pre- seka u celini.

Beton utegnut uzengijama, u suštini je u prostornom naponskom stanju. Kako se u anal- itičkim modelima grednog nosača koriste jednodimenzioni materijalni modeli, to se materijal betona u preseku deli na *utegnuti deo* sa povećanim modulom elastičnosti i čvrstoćom i *neuteg- nuti*.

2.2.1 Generalisane deformacije nastale pri podužnim silama (N, M_y, M_z) u linearno elastičnoj oblasti

Redukcija uticaja na referentnu tačku, umesto na težište preseka, dovodi do složenijih veza i pri linearno elastičnim modelima materijala. Pri analizi velikog broja inženjerskih konstrukcija (spregnutih i prethodnonapregnutih) koriste se modeli materija u linearnoj oblasti ponašanja. Sa druge strane, viskozne karakteristike ovih materijala su osnovni uzrok nelinearnosti. Zato će se u ovom delu izvesti izrazi u zatvorenom obliku za veze koje će se koristiti pri integraciji matrice fleksibilnosti štapa.

Homogeni poprečni presek

Homogeno stanje materijala omogućava da se za sve tačke u poprečnom preseku usvoje iste mehaničke karakteristike. Pri uspostavljanju veza se koriste veze između uzdužnih sila redukovanih na težište

$$\{F^C\} = \{N, M_y^C, M_z^C\}^T \quad (2.7)$$

i odgovarajućih generalisanih deformacija (u odnosu na težište poprečnog preseka):

$$\{\varepsilon_L^C\} = \{\varepsilon_x^C, \kappa_y^C, \kappa_z^C\}^T \quad (2.8)$$

u obliku :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^C \\ \kappa_y^C \\ \kappa_z^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-I_z^C}{EJ_2^C} & \frac{-I_{yz}^C}{EJ_2^C} \\ 0 & \frac{I_{yz}^C}{EJ_2^C} & \frac{I_y^C}{EJ_2^C} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N \\ M_y^C \\ M_z^C \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

pri čemu je J_2^c druga invarijanta geometrijskih karakteristika preseka $J_2^c = I_y^c I_z^c - I_{yz}^c{}^2$ sračunatih u odnosu na paralelne težišne ose. U izrazima (2.9) je pretpostavljeno da su momenti pozitivni

kad deluju u smeru osa, a krivine su pozitivne kad su drugi izvodi upravnih koordinata pozitivni kao što je prikazano na slici 2.4. Gornji izraz se može prikazati kao:

$$\{\varepsilon_L^C\} = [C_L^C] \cdot \{F_L^C\} \quad (2.10)$$

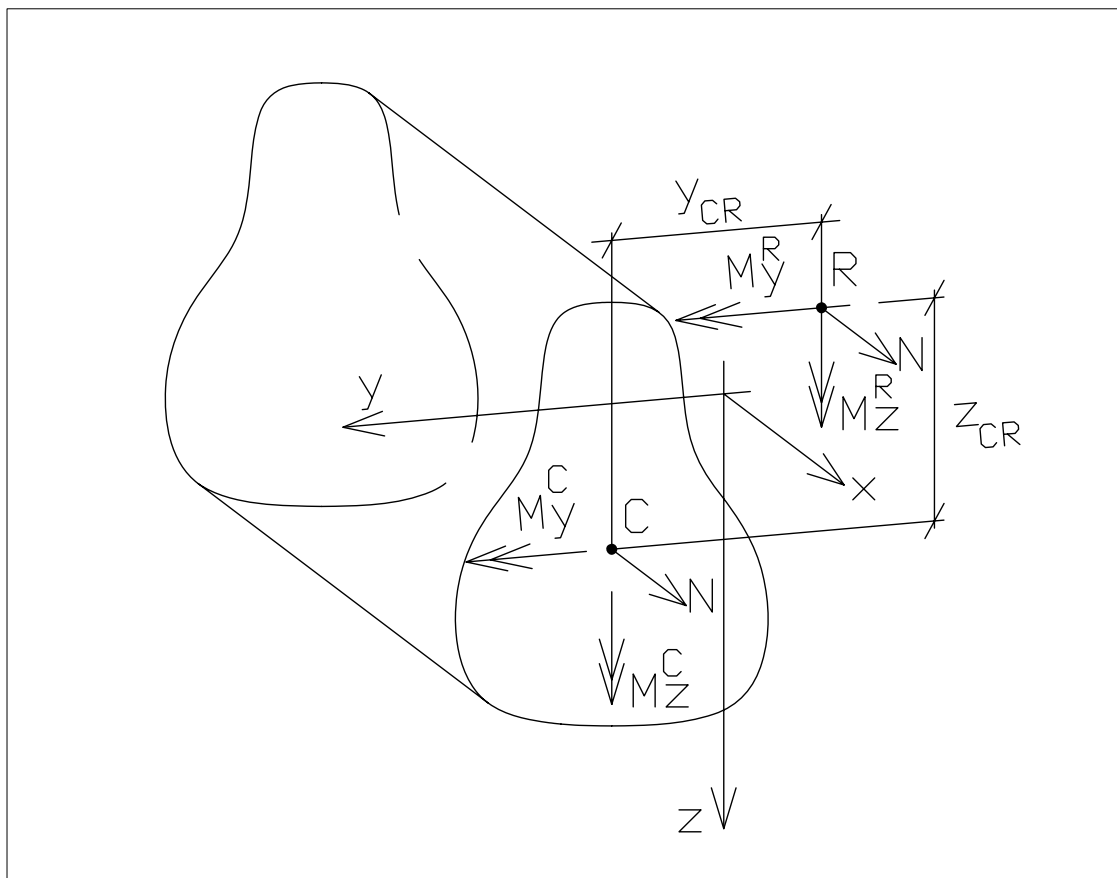
gde $[C_L^C]$ predstavlja matricu fleksibilnosti preseka pri podužnim silama redukovanim na težište. Redukcija podužnih deformacija sa težišta na referentnu tačku se sprovodi izrazima:

$$\varepsilon_x^R = \varepsilon_x^C + \kappa_y(-z_R + z_C) + \kappa_z(y_C - y_R) \quad (2.11)$$

odnosno:

$$\{\varepsilon_L^R\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_C - z_R & y_C - y_R \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^C \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} = [T_L^{CR}] \cdot \{\varepsilon_L^C\} \quad (2.12)$$

Gde je $[T_L^{CR}]$ matrica transformacije generalisanih deformacija preseka pri podužnim silama, sa težišta C na referentnu tačku R. Na sličan način se sile sa referentne tačke prikazane na slici 2.5, mogu redukovati na težište izrazima:



Slika 2.5: Redukcija sila sa težišta na referentnu tačku i obratno

$$M_y^C = N \cdot (z_R - z_C) + M_y^R \quad (2.13a)$$

$$M_z^C = N \cdot (y_C - y_R) + M_z^R \quad (2.13b)$$

Odnosno u matricnom obliku:

$$\left\{ F_L^C \right\} = \begin{Bmatrix} N \\ M_y^C \\ M_z^C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(z_C - z_R) & 1 & 0 \\ y_C - y_R & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_y^R \\ M_z^R \end{Bmatrix} = [T_{LF}^{CR}] \cdot \left\{ F_L^R \right\} \quad (2.14)$$

Gde je $[T_{LF}^{CR}]$ matrica transformacije (redukcije) podužnih sila sa referentne tačke R na težište C. Tako se matrica koja određuje deformacije poprečnog preseka u referentnoj tački u odnosu na podužne sile u istoj tački nalazi u obliku:

$$\begin{aligned} \left\{ \varepsilon_L^R \right\} &= [T_L^{CR}] \cdot [C_L^C] \cdot \left\{ F_L^C \right\} = \\ &= [T_L^{CR}] \cdot [C_L^C] \cdot [T_{LF}^{CR}] \cdot \left\{ F_L^R \right\} = \\ &= [C_L^R] \cdot \left\{ F_L^R \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Gde je $[C_L^R] = [T_L^{CR}] \cdot [C_L^C] \cdot [T_{LF}^{CR}]$ odnosno u razvijenom obliku:

$$[C_L^R] = \frac{1}{E J_2^C} \begin{bmatrix} \frac{J_2^C}{A} + I_y^C (y_{CR})^2 - 2I_{yz}^C y_{CR} z_{CR} + I_z^C (z_{CR})^2 & I_{yz}^C y_{CR} - I_z^C z_{CR} & I_y^C y_{CR} - I_{yz}^C z_{CR} \\ I_z^C z_{CR} - I_{yz}^C y_{CR} & -I_z^C & -I_{yz}^C \\ I_y^C y_{CR} - I_{yz}^C z_{CR} & I_y^C & I_z^C \end{bmatrix}$$

u prethodnom izrazu je korišćeno: $y_{CR} = y_C - y_R$ i $z_{CR} = z_C - z_R$, dok su momenti inercije sračunati u odnosu na paralelne težišne ose. Matrica $[C_L^R]$ je matrica fleksibilnosti poprečnog preseka za podužne sile i odgovarajuće deformacije u odnosu na referentnu tačku R.

Matrica krutosti poprečnog preseka je inverzna matrici fleksibilnosti ali se direktno određuje tako što se sile nalaze integracijom napona koji su određeni dilatacijama i modulom elastičnosti. U ovom slučaju dilatacija proizvoljne tačke u preseku se može naći u obliku:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(y, z) &= \varepsilon_x^R + \kappa_y(-z + z_R) - \kappa_z(y - y_R) \\ \sigma_x(y, z) &= E(y, z) \cdot \varepsilon_x(y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x(y, z) dA = \int_A E(y, z) \cdot (\varepsilon_x^R + \kappa_y(-z + z_R) - \kappa_z(y - y_R)) dA \\ M_y &= \int_A \sigma_x(y, z) \cdot z dA = \int_A [E(y, z) \cdot (\varepsilon_x^R + \kappa_y(-z + z_R) - \kappa_z(y - y_R)) \cdot z] dA \\ M_z &= \int_A \sigma_x(y, z) \cdot (-y) dA = \int_A [E(y, z) \cdot (\varepsilon_x^R + \kappa_y(-z + z_R) - \kappa_z(y - y_R)) \cdot (-y)] dA \end{aligned} \quad (2.16)$$

U slučaju konstantnog modula elastičnosti izrazi (2.16) imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} N &= E [(\varepsilon_x^R + \kappa_y z_R + \kappa_z y_R) \cdot A - \kappa_y S_y - \kappa_z S_z] \\ M_y &= E [(\varepsilon_x^R + \kappa_y z_R + \kappa_z y_R) \cdot S_y - \kappa_y I_y - \kappa_z I_{yz}] \\ M_z &= E [(\varepsilon_x^R + \kappa_y z_R + \kappa_z y_R) \cdot (-S_z) + \kappa_y I_{yz} + \kappa_z I_z] \end{aligned} \quad (2.17)$$

U matičnom obliku:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} A & A \cdot z_R - S_y & A \cdot y_R - S_z \\ S_y & S_y \cdot z_R - I_y & S_y \cdot y_R - I_{yz} \\ -S_z & I_{y,z} - S_z \cdot z_R & I_z - S_z \cdot y_R \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix}$$

Ako se statički momenti S_y i S_z izraze preko proizvoda površine i koordinate težišta ($S_y = z_C \cdot A$ $S_z = y_C \cdot A$) navedenu vezu dobijamo u obliku:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} A & -A \cdot z_{CR} & -A \cdot y_{CR} \\ A \cdot z_C & A \cdot z_C \cdot z_R - I_y & A \cdot z_C \cdot y_R - I_{yz} \\ -A \cdot y_C & I_{y,z} - A \cdot y_C \cdot z_R & I_z - A \cdot y_C \cdot y_R \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix}$$

Ako se koriste centralni momenati inercije dobijamo:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} A & -A \cdot z_{CR} & -A \cdot y_{CR} \\ A \cdot z_C & A \cdot z_C \cdot z_R - I_y^C - A \cdot z_C^2 & A \cdot z_C \cdot y_R - I_{yz}^C - A \cdot z_C \cdot y_C \\ -A \cdot y_C & I_{yz}^C + A \cdot y_C \cdot z_C - A \cdot y_C \cdot z_R & I_z^C + A \cdot y_C^2 - A \cdot y_C \cdot y_R \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} A & -A \cdot z_{CR} & -A \cdot y_{CR} \\ A \cdot z_C & A \cdot z_C z_{RC} - I_y^C & -I_{yz}^C - A \cdot z_C \cdot y_{CR} \\ -A \cdot y_C & I_{yz}^C + A \cdot y_C \cdot z_{CR} & I_z^C - A \cdot y_{RC} \cdot y_C \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix}$$

Vrednosti momenata savijanja su redukovane na koordinatni početak, ako se redukuju u odnosu na referentnu osu, izvršiće se sledeća transformacija:

$$\begin{aligned} M_y^R &= -N \cdot z_R + M_y \\ M_z^R &= N \cdot y_R + M_z \end{aligned}$$

odnosno u matičnom obliku:

$$\{F_L^R\} = \begin{Bmatrix} N \\ M_y^R \\ M_z^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z_R & 1 & 0 \\ y_R & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = [T_{LF}^R] \cdot \{F_L\} \quad (2.18)$$

Na taj način je dobijena matrica krutosti preseka $[K_L^R]$ redukovana na referentnu tačku, tj.:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ M_y^R \\ M_z^R \end{Bmatrix} &= E \cdot \begin{bmatrix} A & A \cdot z_{RC} & A \cdot y_{RC} \\ -A \cdot z_{RC} & -A \cdot z_{RC}^2 - I_y^C & -I_{yz}^C - A \cdot z_{RC} \cdot y_{RC} \\ A \cdot y_{RC} & I_{yz}^C + A \cdot y_{RC} \cdot z_{RC} & I_z^C + A \cdot y_{RC}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} \\ \{F_L^R\} &= [K_L^R] \cdot \{\varepsilon_L^R\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dobijena matrica krutosti preseka $[K_L^R]$ važi za presek sa konstantnim modulom elastičnosti. Može se uočiti da, kad bi u matrici druga vrsta imala promenjen znak, matrica bi bila simetrična. Nesimetrija matrice je posledica usvojenog smera za krivinu κ_y , koji je suprotan od usvojenog pozitivnog smera za moment M_y .

Nehomogen poprečni presek

U slučaju da mehaničke karakteristike materijala nisu konstantne u celom poprečnom preseku ($E \neq const$) postoje dve mogućnosti za uspostavljanje veza sličnih izrazima (2.15) i (2.19) :

1- presek se sastoji od malog broja materijala koji imaju konstantne karakteristike (spregnuti nosači mogu imati samo dva materijala beton i čelik, i sl.)

2- Nelinearno ponašanje materijala, dovodi do promena mehaničkih karakteristika. Ove promene su takve da se u poprečnom preseku ne mogu uočiti delovi površina sa istim mehaničkim karakteristikama. U tom slučaju, integracija izraza matrice krutosti preseka se mora sprovesti diskretizacijom preseka na veći broj manjih površina.

U prvom slučaju se može za svaki deo preseka formirati navedena matrica krutosti dela preseka $[K_{L_i}^R]$, njenom inverzijom naći matrica fleksibilnosti dela preseka $[C_{L_i}^R] = [K_{L_i}^R]^{-1}$ koja vezuje generalisane deformacije preseka na mestu referentne tačke sa presečnim silama redukovanim u istu tačku.

$$(F_{L_i}^R) = [K_{L_i}^R] \cdot (\varepsilon_{L_i}^R)$$

Kao posledica pretpostavke o ravnim presecima, generalisane deformacije svih delova preseka su iste u odnosu na referentnu tačku.

$$(\varepsilon_L^R) = (\varepsilon_{L_1}^R) = \dots = (\varepsilon_{L_i}^R) \quad (2.20)$$

Treba napomenuti da se pri uspostavljanju veza (2.20), posmatraju deformacije izazvane silama (naponima), i pri njihovim prirastima je osnovno držati se pretpostavke o ravnim presecima, dok se eventualne razlike u deformacijama delova usled viskoznih efekata u linearnoj oblasti mogu obraditi kao vrsta opterećenja što će biti kasnije prikazano.

Sile u preseku su jednake zbiru sila svih delova redukovanih na referentnu tačku čime dobijamo:

$$(F_L^R) = \sum (F_{L_i}^R) = \sum \{ [K_{L_i}^R] (\varepsilon_{L_i}^R) \} = [K_L^R] \cdot (\varepsilon_L^R) \quad (2.21)$$

Odnosno matricu krutosti preseka pri podužnim silama u odnosu na referentnu tačku nalazimo kao zbir matrica krutosti delova preseka pri podužnim silama u odnosu na istu referentnu tačku.

$$\sum [K_{L_i}^R] = [K_L^R] \quad (2.22)$$

Matricu fleksibilnosti složenog preseka nalazimo inverzijom navedene matrice krutosti.

2.2.2 Deformacije preseka uzrokovane poprečnim silama

Pod poprečnim deformacijama podrazumevamo deformacije koje dovode do pomeranja tačaka beskonačno bliskog preseka u ravni poprečnog preseka u pravcu upravnom na osu štapa. Takva pomeranja se mogu opisati vektorom $\{\varepsilon_T^R\}$, čiji su članovi: $\gamma_{xy}^R, \gamma_{xz}^R$ i θ_x i predstavljaju komponente deformacije na mestu referentne tačke R. Poznate su veze između poprečnih sila

redukovanih na centar smicanja S i deformacije ose smicanja :

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}^S &= \frac{T_y}{G \cdot A_y} \\ \gamma_{xz}^S &= \frac{T_z}{G \cdot A_z} \\ \theta_x &= \frac{M_x^S}{G \cdot I_t}\end{aligned}\tag{2.23}$$

odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \gamma_{xy}^S \\ \gamma_{xz}^S \\ \theta_x \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{G \cdot A_y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G \cdot A_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G \cdot I_t} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \\ M_x^S \end{Bmatrix} \\ \{\varepsilon_T^S\} &= [C_T^S] \cdot \{F_T^S\}\end{aligned}$$

Veze izmedju deformacije referentne ose štapa i ose smicanja se mogu napisati u obliku:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \gamma_{xy}^R \\ \gamma_{xz}^R \\ \theta_x \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_S - z_R \\ 0 & 1 & y_R - y_S \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{xy}^S \\ \gamma_{xz}^S \\ \theta_x \end{Bmatrix} \\ \{\varepsilon_T^R\} &= [T_T^{SR}] \cdot \{\varepsilon_T^S\}\end{aligned}$$

odnosno veze izmedju poprečnih sila redukovanih na referentnu osu i osu smicanja se mogu dobiti:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \\ M_x^S \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z_S - z_R & y_R - y_S & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \\ M_x^R \end{Bmatrix} \\ \{F_T^S\} &= [T_T^{SR}]^T \cdot \{F_T^R\}\end{aligned}$$

Poprečne deformacije referentne ose se mogu izraziti preko poprečnih sila na referentnoj osi:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon_T^R\} &= [T_T^{SR}] \cdot \{\varepsilon_T^S\} \\ &= [T_T^{SR}] \cdot [C_T^S] \cdot \{F_T^S\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [T_T^{SR}] \cdot [C_T^S] \cdot [T_T^{SR}]^T \cdot \{F_T^R\} \\ &= [C_T^R] \cdot \{F_T^R\} \\ [C_T^R] &= [T_T^{SR}] \cdot [C_T^S] \cdot [T_T^{SR}]^T \end{aligned}$$

pri čemu je $[C_T^R]$ matrica fleksibilnosti poprečnog preseaka u odnosu na na poprečne sile redukovane na referentnu tačku, i koja se može dobiti u obliku:

$$[C_T^R] = \frac{1}{G} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{A_y} + \frac{z_{SR}^2}{I_t} & -\frac{y_{SR} \cdot z_{SR}}{I_t} & \frac{z_{SR}}{I_t} \\ -\frac{y_{SR} \cdot z_{SR}}{I_t} & \frac{1}{A_z} + \frac{y_{SR}^2}{I_t} & -\frac{y_{SR}}{I_t} \\ \frac{z_{SR}}{I_t} & -\frac{y_{SR}}{I_t} & \frac{1}{I_t} \end{bmatrix}$$

Polazeći od izraza (2.23), može se takodje izvesti matrica krutosti preseka u odnosu na poprečne sile.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T_y \\ T_z \\ M_x^S \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} G \cdot A_y & 0 & 0 \\ 0 & G \cdot A_z & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot I_t \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{xy}^S \\ \gamma_{xz}^S \\ \theta_x \end{Bmatrix} \\ \{F_T^S\} &= [K_T^S] \cdot \{\varepsilon_T^S\} \end{aligned}$$

Izražavajući sada generalisane deformacije tačke ose S preko generalisanih poprečnih deformacija referentne tačke R, dobijamo opet izraze:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \gamma_{xy}^C \\ \gamma_{xz}^C \\ \theta_x \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & z_R - z_S \\ 0 & 1 & y_S - y_R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{xy}^R \\ \gamma_{xz}^R \\ \theta_x \end{Bmatrix} \\ \{\varepsilon_T^S\} &= [T_T^{RS}] \cdot \{\varepsilon_T^R\} \end{aligned}$$

U odnosu na redukciju sa centra smicanja S na referentnu tačku R, koja je izvršena matricom $[T_T^{SR}]$ ovde je redukcija vršena matricom $[T_T^{RS}]$ u kojoj vandijagonalni članovi imaju iste vrednosti ali promenjenih su znakova. Slično je i sa redukcijom poprečnih sila, sa centra smicanja na referentnu tačku:

$$\{F_T^R\} = [T_T^{RS}]^T \cdot \{F_T^S\}$$

Odnosno, transformacija matrice krutosti preseka u odnosu na poprečne sile, sa centra smicanja na referentnu tačku se sprovodi transformacijama:

$$\{F_T^R\} = [T_T^{RS}]^T \cdot \{F_T^S\}$$

$$\begin{aligned}
 &= [T_T^{RS}]^T \cdot [K_T^S] \cdot \{\varepsilon_T^S\} \\
 &= [T_T^{RS}]^T \cdot [K_T^S] \cdot [T_T^{RS}] \cdot \{\varepsilon_T^R\} \\
 &= [K_T^R] \cdot \{\varepsilon_T^R\} \\
 [K_T^R] &= [T_T^{RS}]^T \cdot [K_T^S] \cdot [T_T^{RS}]
 \end{aligned}$$

čime se dobija matrica krutosti preseka u odnosu na poprečne sile redukovane na referentnu tačku.

$$[K_T^R] = G \cdot \begin{bmatrix} A_y & 0 & A_y z_{RS} \\ 0 & A_z & A_z y_{SR} \\ A_y z_{RS} & A_z y_{SR} & I_t + A_z y_{SR}^2 + A_y z_{SR}^2 \end{bmatrix}$$

Zbirna matrica fleksibilnosti

Ako generalisane sile poredjamo u niz : $N, T_y, T_z, M_x^R, M_y^R, M_z^R$ redukovano na referencnu osu štapa dobijamo matricu fleksibilnosti preseka čiji su elementi odgovarajući članovi matrica $[C_L^R]$ i $[C_T^R]$. Vrednosti koeficijenata su:

$$\begin{aligned}
 C_{1,1}^R &= \frac{1}{E \cdot A} + \frac{I_y^C y_{CR}^2 - 2I_{yz}^C y_{CR} z_{CR} + I_z^C z_{CR}^2}{E \cdot J_2^C} \\
 C_{1,5}^R &= -C_{5,1}^R = \frac{I_{yz}^C y_{CR} - I_z^C z_{CR}}{E \cdot J_2^C} \\
 C_{1,6}^R &= C_{6,1}^R = \frac{I_y^C y_{CR} - I_{yz}^C z_{CR}}{E \cdot J_2^C} \\
 C_{2,2}^R &= \frac{1}{G \cdot A_y} + \frac{z_{SR}^2}{G \cdot I_t} \\
 C_{2,3}^R &= C_{3,2}^R = -\frac{y_{SR} \cdot z_{SR}}{G \cdot I_t} \\
 C_{2,4}^R &= C_{4,2}^R = \frac{z_{SR}}{G \cdot I_t} \\
 C_{3,3}^R &= \frac{1}{G \cdot A_z} + \frac{y_{SR}^2}{G \cdot I_t} \\
 C_{3,4}^R &= C_{4,3}^R = -\frac{y_{SR}}{G \cdot I_t} \\
 C_{4,4}^R &= \frac{1}{G \cdot I_t} \\
 C_{5,5}^R &= \frac{-I_z^C}{E \cdot J_2^C} \\
 C_{5,6}^R &= -C_{6,5}^R = \frac{-I_{yz}^C}{E \cdot J_2^C} \\
 C_{6,6}^R &= \frac{I_y^C}{E \cdot J_2^C}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

dok su članovi ispod dijagonale delom simetrični, odnosno kada bi peta vrsta imala promenjene znake, matrica bi bila simetrična.

Korišćenjem izraza (2.24) za određivanje članova matrice fleksibilnosti, izraz (2.5.a) se svodi na izraz (2.25) u kome, matrica fleksibilnosti ne zavisi od stanja napona, deformacija ili probnih vrednosti.

$$\{\epsilon^R\} = [C^R] \cdot \{F^R\} \Leftrightarrow \epsilon_i^R = C_{ij}^R F_j^R \quad (2.25)$$

Na sličan način se matrica krutosti poprečnog preseka u odnosu na poprečne i podužne sile, dobija preuzimanjem odgovarajućih članova matrica $[K_L^R]$ i $[K_T^R]$. Na taj način dobijamo članove:

$$\begin{aligned} K_{1,1}^R &= E \cdot A \\ K_{1,5}^R &= -K_{5,1}^R = -E \cdot A \cdot z_{CR} \\ K_{1,6}^R &= K_{6,1}^R = -E \cdot A \cdot y_{CR} \\ K_{2,2}^R &= G \cdot A_y \\ K_{2,4}^R &= G \cdot A_y \cdot z_{RS} \\ K_{3,3}^R &= G \cdot A_z \\ K_{3,4}^R &= K_{4,3}^R = G \cdot A_z \cdot y_{SR} \\ K_{4,4}^R &= G \cdot (I_t + A_z \cdot y_{SR}^2 + A_y \cdot z_{RS}^2) \\ K_{5,5}^R &= -E \cdot (A \cdot z_{RC}^2 + I_y^C) \\ K_{6,5}^R &= -K_{5,6}^R = E \cdot (I_{yz}^C + A \cdot z_{CR} \cdot y_{CR}) \\ K_{6,6}^R &= E \cdot (I_z^C + A \cdot y_{RC}^2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Pri izvodjenju matrice krutosti štapa metodom deformacija, koriste se operacije prikazane izrazima (2.27) u kojima je potencijal izražen preko rada unutrašnjih sila. Različiti znaci za moment savijanja M_y i krivinu κ_y , uslovili bi da se u navedenom izrazu, pri sumiranju, taj član unese sa suprotnim znakom. Umesto toga, pri tom izvodjenju će se koristiti matrica K^{R-} čiji se članovi razlikuju od matrice K^R samo po znaku članova pete vrste i za razliku od matrice K^R je simetrična.

Matrica fleksibilnosti preseka konstantnih karakteristika materijala se može upotrebiti i za dobijanje matrice fleksibilnosti preseka koji se sastoje od više delova, od kojih je materijal u svakom od njih u homogen(iste su vrednosti modula elastičnosti i modula smicanja u svakom delu). Slično postupku sa generisanjem dela matrice fleksibilnosti za vezu deformacija i naprezanja izazvanih podužnim silama iskazanim izrazom (2.21), u ovom slučaju važe sledeće pretpostavke:

1. Složeni presek se ponaša kao celina (ostaje ravan pri deformaciji) . Oblik poprečnog preseka se ne menja već se kao celina translira ili rotira u svojoj ravni.

2. Raspored napona po delovima poprečnog preseka (pri savijanju i torziji) je isti kao da je deo nezavisno od ostalih delova bio izložen tim poprečnim silama.

U postupku formiranja matrice krutosti složenog preseka na izloženi način, posredno su uvedene navedene pretpostavke koje su problematične, naročito druga od njih. Sa druge strane, pri usvajanju veza između poprečnih sila i generalisanih deformacija preseka, izraženih izrazom (2.23), korišćene su veličine A_y , A_z i I_t koje nisu geometrijske karakteristike u smislu u kome su to momenti inercije i površina, već veličine koje su određene na osnovu rasporeda napona i usled njih uprosečene deformacije usled zadate sile. Određivanje ovih veličina za proizvoljni oblik poprečnog preseka i za homogeni materijal je problem koji se rešava nekom od približnih metoda uz usvajanje dodatnih pretpostavki.

Uticaji i efekti krutosti na poprečne sile (T_y , T_z i M_t) u realnim konstrukcijama je relativno mali u odnosu na uticaje i efekte koje daje krutost na podužne sile (N , M_y i M_z), te se u velikom broju metoda teorije konstrukcija i zanemario. Prikazani postupak se može primeniti relativno uspešno, uz napomenu da se određivanje krutosti poverava objektu poprečnog preseka i izoluje od ostalog dela programa. To omogućava da u budućnosti razvijeni postupci budu jednostavno implementirani.

Može se tekodje konstatovati da će izložen postupak nalaženja matrice fleksibilnosti dobro opisati krutost na podužne sile i nehomogenih preseka, dok će krutost na poprečne sile biti problematična pre svega zbog toga što je polje napona u preseku u mnogome različito od polja napona nezavisnih preseka.

2.2.3 Generalisane inercijalne sile u preseku - matrica masa preseka

Tema ove doktorske teze je pre svega orijentisana ka modeliranju efekata materijalne nelinearnosti i viskoznih efekata kod linijskih nosača. Primenjen postupak je doveo do mogućnosti usvajanja proizvoljne ose kao ose štapa a time i do efekata o kojima se mora voditi računa pri određivanju matrice masa elementa. Izdvajanje referentne tačke umesto težišta dovodi i do specifičnosti pri određivanju inercijalnih karakteristika poprečnog preseka. Usled generalisanih ubrzanja referentne tačke u preseku, može se odrediti ubrzanje proizvoljne tačke u preseku a time i inercijalne sile (kao zapreminske sile u delu štapa dužine dx). Inercijalne sile se mogu redukovati na osu štapa i pravce lokalnih osa čime se dobijaju inercijalne sile preseka koje su sa navedenim ubrzanjima vezane matricom masa preseka. Kao referentna pomeranja preseka posmatramo pomeranja i rotacije referentne tačke u preseku (ose štapa): $u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ odnosno vektor pomeranja:

$$\{u^R\} = \begin{Bmatrix} u_x^R \\ u_y^R \\ u_z^R \\ \varphi_x^R \\ \varphi_y^R \\ \varphi_z^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{u^R\} \\ \{\varphi^R\} \end{Bmatrix}$$

vektor pomeranja proizvoljne tačke u preseku se može naći preko ovog vektora i vektora položaja tačke u preseku \vec{r} :

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}^R + \vec{\varphi}^R \times \vec{r}$$

kako se ista relacija može napisati i za ubrzanja to se inercijalna sila na delu zapremine dV može naći u obliku :

$$d\vec{F}^I(\vec{r}) = -\rho \vec{\ddot{u}}(\vec{r}) dV = -\rho \cdot (\vec{\ddot{u}}^R + \vec{\ddot{\varphi}}^R \times \vec{r}) dV$$

redukcija ove sile na referentnu tačku u preseku će dati prirast vektora sila i vektora momenata:

$$\begin{aligned} \vec{dF}^{IR}(\vec{r}) &= -\rho \vec{\ddot{u}}(\vec{r}) dV = -\rho \cdot (\vec{\ddot{u}}^R + \vec{\ddot{\varphi}}^R \times \vec{r}) dV \\ \vec{dM}^{IR}(\vec{r}) &= \vec{r} \times \vec{dF}^{IR}(\vec{r}) = -\rho \vec{r} \times \vec{\ddot{u}}(\vec{r}) dV \\ &= -\rho \cdot \vec{r} \times (\vec{\ddot{u}}^R + \vec{\ddot{\varphi}}^R \times \vec{r}) dV \end{aligned}$$

Integracijom ovih veličina po celom poprečnom preseku dobijamo inercijalne sile i momente:

$$\vec{F}^{IR} = \frac{\partial \int_V \vec{F}^{IR}(\vec{r}) dV}{\partial x} = -\rho \cdot \int_A \left((\vec{\ddot{u}}^R + \vec{\ddot{\varphi}}^R \times \vec{r}) \right) dA$$

kako je vektor položaja vektor u ravni yz to se može prikazati u obliku $\vec{r} = y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ pa se navedeni vektor sila može prikazati preko svojih komponenti u obliku :

$$\begin{aligned} F_x^{IR} &= -\rho \left(\ddot{u}_x^R A + \ddot{\varphi}_y^R \int_A z dA - \ddot{\varphi}_z^R \int_A y dA \right) = -\rho \left(\ddot{u}_x^R A + \ddot{\varphi}_y^R S_y^R - \ddot{\varphi}_z^R S_z^R \right) \\ F_y^{IR} &= -\rho \left(\ddot{u}_y^R A + \ddot{\varphi}_x^R \int_A z dA \right) = -\rho \left(\ddot{u}_y^R A + \ddot{\varphi}_x^R S_y^R \right) \\ F_z^{IR} &= -\rho \left(\ddot{u}_z^R A + \ddot{\varphi}_x^R \int_A y dA \right) = -\rho \left(\ddot{u}_z^R A + \ddot{\varphi}_x^R S_z^R \right) \end{aligned}$$

odnosno vektor momenata:

$$\vec{M}^{IR} = -\rho \cdot \int_A \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & y & z \\ \ddot{u}_x^R + \ddot{\varphi}_y^R z - \ddot{\varphi}_z^R y & \ddot{u}_y^R + \ddot{\varphi}_x^R z & \ddot{u}_z^R + \ddot{\varphi}_x^R y \end{vmatrix} dA$$

ili prestavljen preko komponenti vektora:

$$\begin{aligned} M_x^{IR} &= -\rho \cdot \int_A (\ddot{u}_z^R y - \ddot{u}_y^R z + \ddot{\varphi}_x^R (y^2 + z^2)) dA = -\rho \cdot (\ddot{u}_z^R S_z^R - \ddot{u}_y^R S_y^R + \ddot{\varphi}_x^R I_o^R) \\ M_y^{IR} &= -\rho \cdot \int_A (\ddot{u}_x^R z + \ddot{\varphi}_y^R z^2 - \ddot{\varphi}_z^R yz) dA = -\rho \cdot (\ddot{u}_x^R S_y^R + \ddot{\varphi}_y^R I_y - \ddot{\varphi}_z^R I_{yz}) \\ M_z^{IR} &= -\rho \cdot \int_A (-\ddot{u}_x^R y - \ddot{\varphi}_y^R yz + \ddot{\varphi}_z^R y^2) dA = -\rho \cdot (-\ddot{u}_x^R S_z^R - \ddot{\varphi}_y^R I_{yz} + \ddot{\varphi}_z^R I_y) \end{aligned}$$

odnosno, ako se napiše relacija u matricnom obliku dobija se:

$$\begin{aligned} \{F^{IR}\} &= -[m^R] \{\ddot{u}\} \\ [m^R] &= \rho \cdot \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & S_y^R & -S_z^R \\ 0 & A & 0 & -S_y^R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & S_z^R & 0 & 0 \\ 0 & -S_y^R & S_z^R & I_o^R & 0 & 0 \\ S_y^R & 0 & 0 & 0 & I_y^R & -I_{yz}^R \\ -S_z^R & 0 & 0 & 0 & -I_{yz}^R & I_z^R \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3 Integracija deformacije štapa

Pri rešavanju problema analize konstrukcije, koji je u najopštijem slučaju prikazan izrazom (1.1), usvajaju se nepoznate veličine koje se uobičajeno nazivaju stepeni slobode. Usvajanje pomeranja čvorova kao osnovnih nepoznatih u sistemu je najčešći slučaj. Potreba buduće univerzalnosti uslovljava izbor pri kome ta pomeranja ne zavise od konkretnog konačnog elementa. Bez obzira da li je to linijski - 1D, površinski 2D ili zapremiski 3D element, pomeranja moraju biti ista. To dovodi do usvajanja tri translatorna i tri rotaciona stepena slobode po čvoru kao osnovnih pomeranja čvora.

U nekim slučajevima se javljaju i dodatni stepeni slobode u čvoru koji su specifični za određeni element (deplanacija kod tankozidnih) ali njihova primena je veoma problematična sa stanovišta povezivanja sa drugim elementima.

Takodje, često se uvode i različite vrste unutrašnjih stepeni slobode, ali se na nivou elementa oni eliminišu pre uvođenja u sistem (1.1) (vriši se njihova statička kondenzacija). Otuda se pod spoljašnjim stepenima slobode elementa smatraju one vrednosti koje ulaze kao nepoznate u celom sistemu.

Formiranje izraza kojim se određuju doprinosi linijskih elemenata sistemu (1.1) je predmet ovog poglavlja.

Doprinos linijskog elementa vezama izmedju osnovnih nepoznatih se u slučaju linearnog problema svodi na određivanje matrice krutosti i određivanje doprinosa opterećenja po elementu sistemu jednačina.

U slučaju nelinearnog problema, u zavisnosti od formulacije, postupak postaje znatno složeniji i zavisi od algoritma koji se primenjuje. Najčešće se primenjuju iterativni postupci i u okviru njih inkrementalno iterativni. Ali u svakom slučaju, u svakoj iteraciji se očekuje linearna veza izmedju veličina na krajevima za pretpostavljene probne (*trial*) vrednosti. U slučaju elastičnog ponašanja (linearnog ili nelinearnog), za trenutna stanja moguće je sačiniti tangentnu matricu krutosti (u [9] se za takav tip nelinearnosti koriste termin (*smooth*) *glatka* nelinearnost). U slučaju oštećenja bilo kakve vrste ili plastičnog ponašanja dolazi do složenijih pojava. Već na nivou preseka nije moguće imati tangentnu matricu veza generalisanih sila i deformacija, već se ona obezbeđuje za usvojenu vrednost (usvojen pravac vektora prirasta) generalisanih sila ili deformacija. Da bi se ovo ilustrovalo, možemo posmatrati najjednostavniji primer, štap od idealno elastoplastičnog materijala opterećen samo aksijalnom silom zatezanja. U slučaju da je došlo do plastifikacije, u zavisnosti od pravca prirasta opterećenja, aksijalna krutost će se menjati. U slučaju prirasta deformacije štapa, ona će biti jednaka nuli, dok u suprotnom pravcu će biti jednaka početnoj. Treba takodje naglasiti da mada ove veze zavise od prirasta, u literaturi se često koristi termin *tangentna* matrica kako bi se ilustrovala tangentnost na putanju toka rešavanja problema.

Pri uspostavljanju veza izmedju statičkih i deformacijskih veličina štapa usvajaju se funkcije koje će opisivati polje sila ili deformacija duž štapa u funkciji vrednosti na krajevima štapa. U zavisnosti od veličina koje se usvajaju kao nepoznate razlikujemo sledeće metode:

- *Metoda sila* - U ovoj metodi, osnovne nepoznate su sile, dok se pomeranja (deformacije) izražavaju u funkciji sila. Polje statičkih veličina se prikazuje u funkciji usvojenog vektora osnovnih nepoznatih veličina a to su sile na kraju štapa. Svaka statička veličina se nalazi kao linearna kombinacija osnovnih nepoznatih i vrednosti interpolacionih funkcija. Koriste se veze izmedju statičkih i deformacijskih veličina u preseku i dobijaju se deformacije preseka. Integracijom deformacija preseka određujemo vrednosti pomeranja

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

krajeva štapa. Tako dobijamo deformacije na krajevima štapa kao linearne kombinacije osnovnih statičkih veličina. Ta veza se u matičnom obliku prikazuje kao proizvod matrice fleksibilnosti štapa i vektora osnovnih nepoznatih.

- *Metoda deformacija* - U ovoj metodi, osnovne nepoznate su deformacije. Polje deformacijskih veličina se izražava u funkciji usvojenog vektora osnovnih nepoznatih veličina a to su po pravilu vrednosti deformacija na krajevima štapa. Sve deformacijske veličine se izražavaju kao linearne kombinacije osnovnih nepoznatih i vrednosti interpolacionih funkcija. Korišćenjem veza između sila i deformacija u preseku, članove matrice krutosti možemo odrediti direktno na osnovu poznatih vrednosti deformacija preseka u funkciji pomeranja na krajevima.
- *Mešovita metoda* - Ova metoda je, na posredni način, kombinacija navedenih metoda. Naime, polja statičkih i deformacijskih veličina se usvajaju u funkcijama osnovnih nepoznatih. Minimiziranjem se dobijaju veze a njima i sama matrica krutosti.

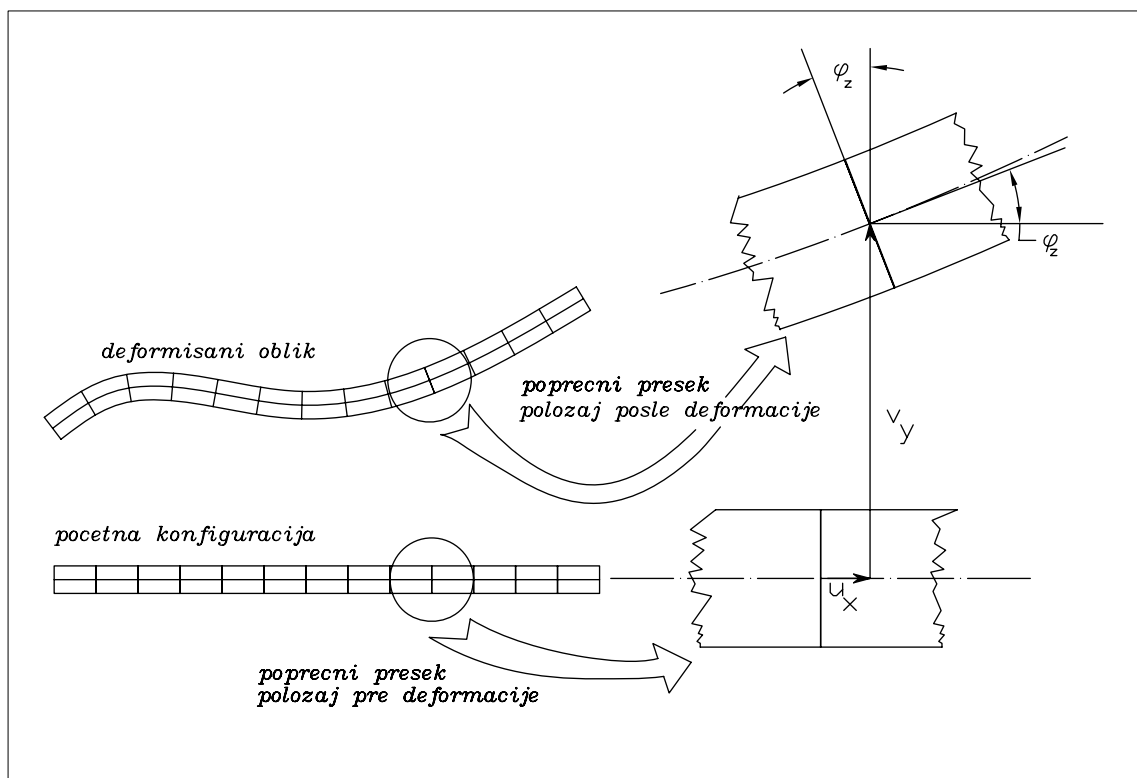
Svaka od ovih metoda ima svojih prednosti i mana. Metoda deformacija je veoma efikasna pri analizi efekata geometrijske nelinearnosti. Mane su joj u mogućim oblicima deformacije koji moraju biti usvojeni pri usvajanju interpolacionih funkcija. U nekim slučajevima to dovodi do generisanja suviše krutih elemenata (čuveni *shear lock*). Metoda sila ima svoje prednosti koje dolaze do izražaja ukoliko se analizira problem materijalne nelinearnosti uz ignorisanje efekata geometrijske nelinearnosti.

U svakoj metodi, se mogu očekivati rezultati koji će opisivati uticaje kao linearne kombinacije usvojenih interpolacionih funkcija. U metodi sila se usvajaju funkcije sila na statički određenom osnovnom nosaču, koje ne zavise od promene mehaničkih karakteristika (krutosti) duž štapa. Sa druge strane, u metodi deformacija, u slučaju primene samo dva čvora na štapu, nužno se uvajaju glatke funkcije deformacije, odnosno usvaja se pretpostavka da će deformisana osa biti glatka kriva. Ako zamislimo deformaciju proste grede, opterećene koncentrisanom silom na polovini, pri nelinearnom ponašanju, oblik i deformacija grede u celini neće moći da bude kvalitetno opisana glatkim krivama.

Drugu grupu problema nameću pretpostavke kojima određujemo deformaciju duž grede. U osnovi kod grednog nosača se sve redukuje na osu štapa. Pretpostavka ravnog preseka je široko zastupljena, dok se razlike javljaju pri opisivanju položaja preseka pri deformaciji u odnosu na deformisanu osu štapa. Pri tome se usvaja jedna od dve pretpostavke:

- Presek ostaje upravan na osu štapa u toku deformacije (upravan je na deformisanu osu štapa) kao što je prikazano na slici 2.6. Ova pretpostavka, dovodi na posredan način do zanemarivanja uticaja transverzalnih sila na deformaciju štapa. U najvećem broju realnih problema sa kojima se susreću građevinski inženjeri ta pretpostavka je potpuno opravdana a u literaturi se može naći pod nazivom: Klasična teorija grede, inženjerska teorija grede ili Euler-Bernoulli (EB model) u [9].
- U toku deformacije štapa, presek ne mora biti upravan na deformisanu osu štapa, kao što je prikazano na slici 2.7. Ova pretpostavka dozvoljava modeliranje uticaja transverzalnih sila na deformaciju štapa. Greda na kojoj se usvaja mogućnost ovakve deformacije naziva i *Timošenkova greda* [9].

Problem nastaje sa elementom koji ima samo dva čvora (bez unutrašnjih čvorova). Takav slučaj deformacije grede u ravni je prikazan na slici 2.8. Kako za poprečna pomeranja

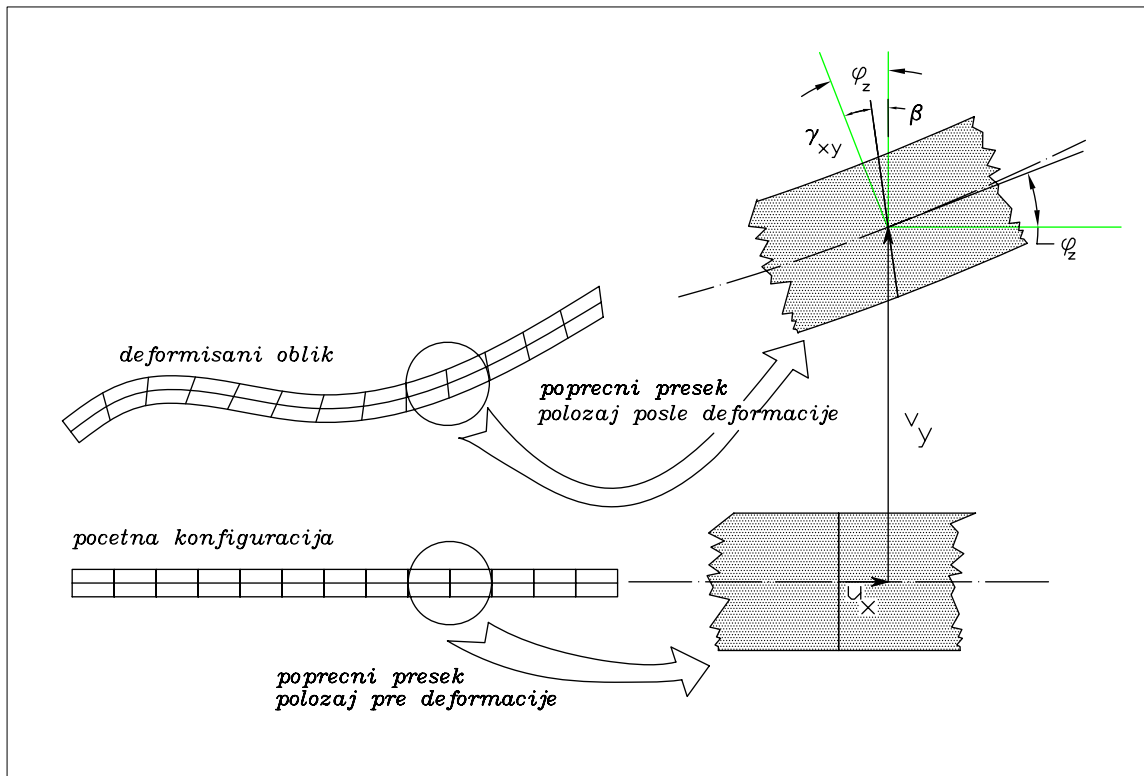


Slika 2.6: Deformacija grede u klasičnoj teoriji grede

i rotacije imamo samo četiri stepena slobode, usled nezavisnog polja rotacije preseka od poprečnog pomeranja, dobijamo linearnu funkciju rotacije (u funkciji rotacije krajnjih čvorova) i linearnu funkciju poprečnih pomeranja. To znači da štap u toku deformacije ostaje prav, dok se rotacija javlja kao posledica obrtanja čvorova. Na slici 2.8 su za istu deformaciju čvorova, prikazani deformisani oblici klasične i Timošenkove grede. Kako je pretpostavljena deformacija takva, da je rotacija oba čvora ista, linearna interpolacija će dovesti do konstantnog obrtanja preseka duž grede. Uočavamo da je usvojena pretpostavka o odvajanju rotacije preseka od obrtanja ose štapa, dovela do deformacije u kojoj se, kod Timošenkove grede, pri istoj rotaciji krajnjih čvorova, sva deformacija predala deformaciji smicanja preseka (bez savijanja).

U realnim inženjerskim konstrukcijama, deformacija usled smicanja preseka su reda veličine 10^{-4} radiana, dok su rotacije čvorova a time i ose štapa reda veličine do 10^{-1} radiana. Otuda su uticaji zanemarivanja smičućih deformacija (primena klasične teorije štapa) dovodili do relativno malih greški. Sa druge strane, deformacija prikazana na slici 2.8 b), je nerealna jer je prema usvojenim pretpostavkama, značajan deo deformacije poveren smičujoj deformaciji preseka dok je realna krutost na smicanje velika u odnosu na krutost na savijanje.

Problem *shear locking*-a se u literaturi prevazilazi na razne načine. Od elemenata sa unutrašnjim čvorovima (kad postoji više stepeni slobode, te promena ugla nije linearna funkcija), selektivne integracije ili pretpostavka kojima se umanjuje uticaj smičuće defor-



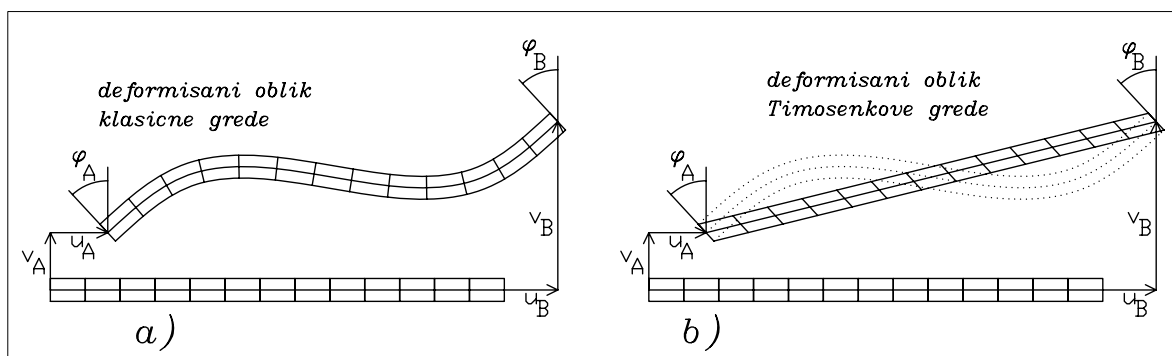
Slika 2.7: Deformacija grede u 'Timošenkovoj teoriji' grede

macije duž stapa do usvajanja odnosa površine smicanja i momenta inercije koje treba koristiti da bi se dobili zadovoljavajući rezultati.

Navedeni postupci i pretpostavke koje se moraju usvojiti primenom metode deformacije u mnogome umanjuju efekte koje smo obezbedjivali finom integracijom veza generalisanih sila i deformacija u preseku koji je prikazan u prethodnom poglavlju. U slučaju da se mogu obezbediti relativno pouzdane funkcije pomeranja i njihovih izvoda, koje će obezbediti polja deformacija adekvatna onim u realnim konstrukcijama, primena metode deformacija u određivanju članova matrice krutosti bi bila potpuno primerena. Sa druge strane, postupak generisanja matrice krutosti složenog preseka jednostavnim sumiranjem matrica krutosti delova preseka stimulišu upotrebu elemenata izvedenih na osnovu metode deformacije. Ukoliko je podela štap podeljen na veći broj manjih štapova, problemi vezani za *shear lock*-ing se smanju.

2.3.1 Integracija matrice krutosti metodom deformacija

U ovom delu je izvedena matrica krutosti uz korišćenje složenih veza izmedju sila i deformacija u preseku. Usvojeni oblici interpolacionih funkcija deformacije su takvi da omogućavaju uticaje transverzalnih sila. To naravno dovodi do prethodno pomentuih problema sa prevelikom krutosti, ali izostavljanje tih efekata bi matricu krutosti preseka sveo na krutost na podužne sile (N , M_x , M_y i M_z).



Slika 2.8: Deformacija grede: a) klasična greda i b) Timošenkove grede pri istom pomeranju čvorova i identičnim rotacijama krajeva

Moguća pomeranja

Ograničen broj stepeni slobode (po šest na svakom kraju), je ograničio i izbor funkcija pomeranja. Usvajanje rotacije preseka kao veličine nezavisne od poprečnog pomeranja ose štapa, dovodi do toga, da šest nezavisnih veličina treba opisati funkcijama na osnovu 12 veličina na krajevima štapa. Linearne interpolacione funkcije su jedini preostali izbor.

Na slici 2.9 je prikazana deformacija ose štapa i pomeranje preseka u xy i xz ravnini.

Rotacije preseka φ_y i φ_z se na krajevima štapa izjednačavaju sa spoljašnjim stepenima slobode. Tri veličine su međusobno vezane: rotacija preseka (φ_y i φ_z), rotacija ose štapa (nagib elastične linije : $\partial v/\partial x$ ili $\partial w/\partial x$) i klizanja (γ_{xz} i γ_{xy}). Pomeranja u poprečnom pravcu (v i w), kao i rotacije preseka se predstavljaju interpolacionim funkcijama, dok se klizanja izražavaju na sledeći način:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} - \varphi_z \\ \gamma_{xz} &= \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}$$

Linearna interpolacija pomeranja duž štapa daje vrednosti samih pomeranja:

$$\begin{aligned}u(x) &= u_1(1 - \frac{x}{L}) + u_2 \frac{x}{L} & \varphi_x(x) &= \varphi_{x1}(1 - \frac{x}{L}) + \varphi_{x2} \frac{x}{L} \\ v(x) &= v_1(1 - \frac{x}{L}) + v_2 \frac{x}{L} & \varphi_y(x) &= \varphi_{y1}(1 - \frac{x}{L}) + \varphi_{y2} \frac{x}{L} \\ w(x) &= w_1(1 - \frac{x}{L}) + w_2 \frac{x}{L} & \varphi_z(x) &= \varphi_{z1}(1 - \frac{x}{L}) + \varphi_{z2} \frac{x}{L}\end{aligned}$$

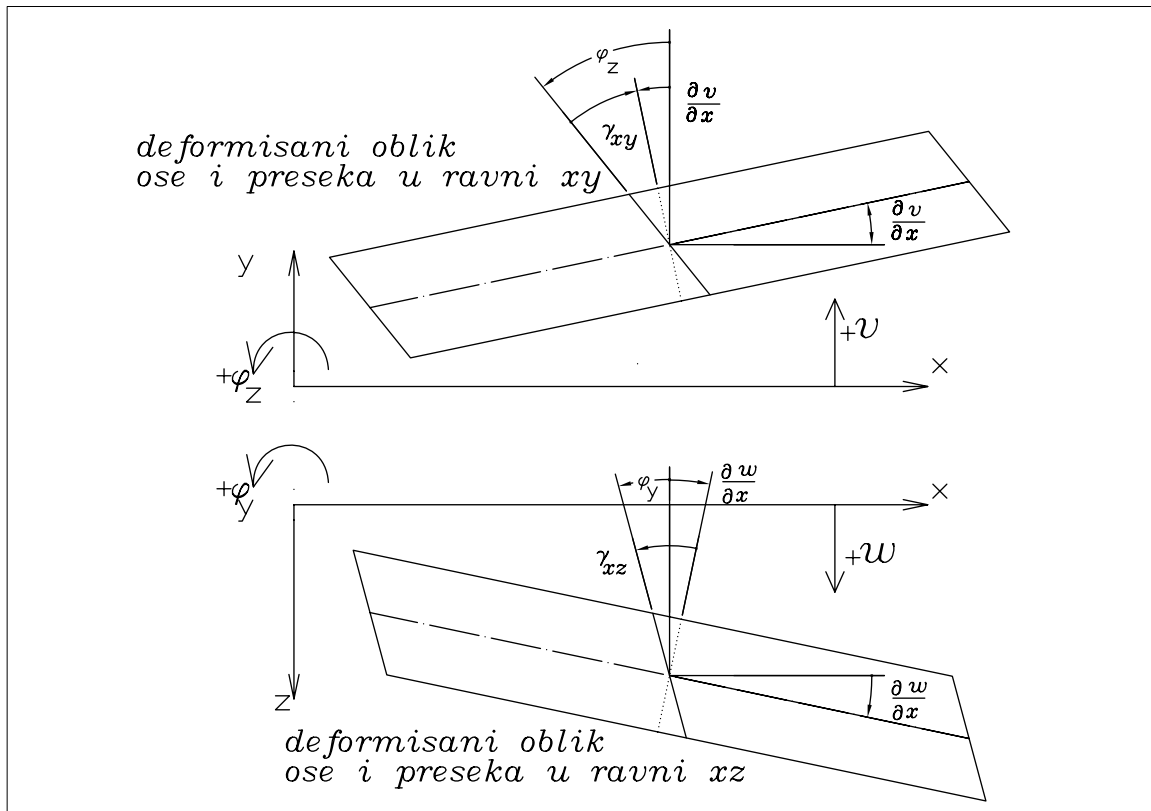
odnosno klizanja:

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}(x) &= \frac{v_2 - v_1}{L} - (\varphi_{z1}(1 - \frac{x}{L}) + \varphi_{z2} \frac{x}{L}) \\ \gamma_{xz}(x) &= \varphi_{y1}(1 - \frac{x}{L}) + \varphi_{y2} \frac{x}{L} + \frac{w_2 - w_1}{L}\end{aligned}$$

Potencijalna energija elastičnog sistema se može izraziti u funkciji pomeranja krajeva štapa u obliku:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L \{\epsilon^R\}^T \cdot \{F^R\} dx \quad (2.27a)$$

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA



Slika 2.9: Deformacija ose grede i pomeranje preseka u ravnima xy i xz

$$= \frac{1}{2} \int_L \{\epsilon^R\}^T \cdot [K^{R-}] \cdot \{\epsilon^R\} dx \quad (2.27b)$$

$$= \frac{1}{2} \int_L \epsilon_i^R K_{ij}^{R-} \epsilon_j^R dx \quad (2.27c)$$

Članovi vektora $\{\epsilon^R\}$ su generalisane deformacije i mogu se naći na osnovu usvojenih interpolacionih funkcija i vrednosti pomeranja čvorova:

$$\epsilon^R = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \theta_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{U\} \quad (2.28)$$

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

$$= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{x}{L} & 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 \\ 0 & -1 + \frac{x}{L} & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Potencijalna energija se na taj način može izraziti kao kvadratna funkcija pomeranja na krajevima:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L B_{ip} U_p K_{ij}^{R-} B_{jq} U_q dA \quad (2.30a)$$

$$= \frac{1}{2} U_p \int_0^L B_{ip} K_{ij}^{R-} B_{jq} dA U_q \quad (2.30b)$$

Diferenciranjem potencijalne energije po nepoznatim pomeranjima, dobijamo članove matrice krutosti štapa:

$$\begin{aligned} K_{s_{lm}} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_l \partial U_m} \\ &= \int_0^L B_{im} K_{ij}^{R-} B_{jl} dA \end{aligned} \quad (2.31)$$

Na osnovu izraza (2.31), se za slučaj konstantnih karakteristika preseka duž štapa, mogu odrediti funkcije članova matrice krutosti u zatvorenom obliku. Ova matrica je, zbog svoje veličine, predstavljena preko četiri submatrice:

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K11] & [K12] & [K13] & [K14] \\ [K12]^T & [K22] & [K23] & [K24] \\ [K13]^T & [K13]^T & [K33] & [K34] \\ [K14]^T & [K24]^T & [K34]^T & [K44] \end{bmatrix}$$

$$[K11] = \begin{bmatrix} \frac{k(1,1)}{L} & \frac{k(1,2)}{L} & \frac{k(1,3)}{L} \\ \frac{k(2,1)}{L} & \frac{k(2,2)}{L} & \frac{k(2,3)}{L} \\ \frac{k(3,1)}{L} & \frac{k(3,2)}{L} & \frac{k(3,3)}{L} \end{bmatrix} \quad (2.32a)$$

$$[K12] = \begin{bmatrix} \frac{k(4,1)}{L} & \frac{k(4,2)}{L} & \frac{k(4,3)}{L} \\ -\frac{k(3,1)}{2} + \frac{k(5,1)}{L} & -\frac{k(3,2)}{2} + \frac{k(5,2)}{L} & -\frac{k(3,3)}{2} + \frac{k(5,3)}{L} \\ \frac{k(2,1)}{2} + \frac{k(6,1)}{L} & \frac{k(2,2)}{2} + \frac{k(6,2)}{L} & \frac{k(2,3)}{2} + \frac{k(6,3)}{L} \end{bmatrix}^T \quad (2.32b)$$

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

$$[K13] = \begin{bmatrix} -\left(\frac{k(1,1)}{L}\right) & -\left(\frac{k(1,2)}{L}\right) & -\left(\frac{k(1,3)}{L}\right) \\ -\left(\frac{k(2,1)}{L}\right) & -\left(\frac{k(2,2)}{L}\right) & -\left(\frac{k(2,3)}{L}\right) \\ -\left(\frac{k(3,1)}{L}\right) & -\left(\frac{k(3,2)}{L}\right) & -\left(\frac{k(3,3)}{L}\right) \end{bmatrix} \quad (2.32c)$$

$$[K14] = \begin{bmatrix} -\left(\frac{k(4,1)}{L}\right) & -\left(\frac{k(4,2)}{L}\right) & -\left(\frac{k(4,3)}{L}\right) \\ \frac{-k(3,1)}{2} - \frac{k(5,1)}{L} & \frac{-k(3,2)}{2} - \frac{k(5,2)}{L} & \frac{-k(3,3)}{2} - \frac{k(5,3)}{L} \\ \frac{k(2,1)}{2} - \frac{k(6,1)}{L} & \frac{k(2,2)}{2} - \frac{k(6,2)}{L} & \frac{k(2,3)}{2} - \frac{k(6,3)}{L} \end{bmatrix}^T \quad (2.32d)$$

$$[K22] = \begin{bmatrix} \frac{k(4,4)}{L} & \frac{-k(4,3)}{2} + \frac{k(4,5)}{L} & \frac{k(4,2)}{2} + \frac{k(4,6)}{L} \\ \frac{-k(3,4)}{2} + \frac{k(5,4)}{L} & \frac{Lk(3,3)}{3} - k(3,5) + \frac{k(5,5)}{L} & \frac{-Lk(3,2)}{3} - \frac{k(3,6)}{2} + \frac{k(5,2)}{2} + \frac{k(5,6)}{L} \\ \frac{k(2,4)}{2} + \frac{k(6,4)}{L} & \frac{-Lk(2,3)}{3} + \frac{k(2,5)}{2} - \frac{k(6,3)}{2} + \frac{k(6,5)}{L} & \frac{Lk(2,2)}{3} + k(2,6) + \frac{k(6,6)}{L} \end{bmatrix} \quad (2.32e)$$

$$[K23] = \begin{bmatrix} -\left(\frac{k(1,4)}{L}\right) & \frac{k(1,3)}{2} - \frac{k(1,5)}{L} & \frac{-k(1,2)}{2} - \frac{k(1,6)}{L} \\ -\left(\frac{k(2,4)}{L}\right) & \frac{k(2,3)}{2} - \frac{k(2,5)}{L} & \frac{-k(2,2)}{2} - \frac{k(2,6)}{L} \\ \frac{-k(3,4)}{L} & \frac{k(3,3)}{2} - \frac{k(3,5)}{L} & \frac{-k(3,2)}{2} - \frac{k(3,6)}{L} \end{bmatrix}^T \quad (2.32f)$$

$$[K24] = \begin{bmatrix} -\left(\frac{k(4,4)}{L}\right) & \frac{k(4,3)}{2} - \frac{k(4,5)}{L} & \frac{-k(4,2)}{2} - \frac{k(4,6)}{L} \\ \frac{-k(3,4)}{2} - \frac{k(5,4)}{L} & \frac{Lk(3,3)}{6} - \frac{k(5,5)}{L} & \frac{-Lk(3,2)}{6} - \frac{k(3,6)+k(5,2)}{2} - \frac{k(5,6)}{L} \\ \frac{k(2,4)}{2} - \frac{k(6,4)}{L} & \frac{-Lk(2,3)}{6} - \frac{k(2,5)-k(6,3)}{2} - \frac{k(6,5)}{L} & \frac{Lk(2,2)}{6} - \frac{k(6,6)}{L} \end{bmatrix}^T \quad (2.32g)$$

$$[K33] = \begin{bmatrix} \frac{k(1,1)}{L} & \frac{k(1,2)}{L} & \frac{k(1,3)}{L} \\ \frac{k(2,1)}{L} & \frac{k(2,2)}{L} & \frac{k(2,3)}{L} \\ \frac{k(3,1)}{L} & \frac{k(3,2)}{L} & \frac{k(3,3)}{L} \end{bmatrix} \quad (2.32h)$$

$$[K34] = \begin{bmatrix} \frac{k(4,1)}{L} & \frac{k(4,2)}{L} & \frac{k(4,3)}{L} \\ \frac{k(3,1)}{2} + \frac{k(5,1)}{L} & \frac{k(3,2)}{2} + \frac{k(5,2)}{L} & \frac{k(3,3)}{2} + \frac{k(5,3)}{L} \\ \frac{-k(2,1)}{2} + \frac{k(6,1)}{L} & \frac{-k(2,2)}{2} + \frac{k(6,2)}{L} & \frac{-k(2,3)}{2} + \frac{k(6,3)}{L} \end{bmatrix}^T \quad (2.32i)$$

$$[K44] = \begin{bmatrix} \frac{k(4,4)}{L} & \frac{k(4,3)}{2} + \frac{k(4,5)}{L} & \frac{-k(4,2)}{2} + \frac{k(4,6)}{L} \\ \frac{k(3,4)}{2} + \frac{k(5,4)}{L} & \frac{Lk(3,3)}{3} - k(3,5) + \frac{k(5,5)}{L} & \frac{-Lk(3,2)}{3} + \frac{k(3,6)-k(5,2)}{2} + \frac{k(5,6)}{L} \\ \frac{-k(2,4)}{2} + \frac{k(6,4)}{L} & \frac{-Lk(2,3)}{3} - \frac{k(2,5)-k(6,3)}{2} + \frac{k(6,5)}{L} & \frac{Lk(2,2)}{3} - k(2,6) + \frac{k(6,6)}{L} \end{bmatrix} \quad (2.32j)$$

U izrazima (2.32) je sa $k(i, j)$ označen odgovarajući član matrice krutosti preseka K^{R-} . U slučaju poklapanja referentne ose sa težišnom osom i osom centra smicanja pri čemu je poprečni presek homogen dok se glavne centralne ose inercije preseka se poklapaju sa poprečnim osama štapa (y i z), matrica kruosti je znatno jednostavnija, i ima sledeći oblik:

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K11] & [K12] \\ [K12]^T & [K22] \end{bmatrix}$$

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

$$[K11] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GAy}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{GAy}{2} \\ 0 & 0 & \frac{GAz}{L} & 0 & -\left(\frac{GAz}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GIt}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{GAz}{2}\right) & 0 & \frac{EIy}{L} + \frac{GAzL}{3} & 0 \\ 0 & \frac{GAy}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EIz}{L} + \frac{GAyL}{3} \end{bmatrix} \quad (2.33a)$$

$$[K12] = \begin{bmatrix} -\left(\frac{AE}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{GAy}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{GAy}{2} \\ 0 & 0 & -\left(\frac{GAz}{L}\right) & 0 & \frac{-GAz}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{GIt}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GAz}{2} & 0 & -\left(\frac{EIy}{L}\right) + \frac{GAzL}{6} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{GAy}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{EIz}{L}\right) + \frac{GAyL}{6} \end{bmatrix} \quad (2.33b)$$

$$[K22] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GAy}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-GAy}{2} \\ 0 & 0 & \frac{GAz}{L} & 0 & \frac{GAz}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GIt}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GAz}{2} & 0 & \frac{EIy}{L} + \frac{GAzL}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-GAy}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EIz}{L} + \frac{GAyL}{3} \end{bmatrix} \quad (2.33c)$$

Matrica krutosti (2.33), predstavlja samo specijalni slučaj matrice (2.32).

Problem prevelike krutosti moguće je prevazići povećavanjem broja delova (štapova) u okviru jednog štapa, odnosno podelom grede na više manjih štapova. Umesto korekcija, kojima se u suštini poništavaju efekti deformacije smicanja, efikasnije je štap podeliti.

Posmatrajmo deformaciju kraja konzole opterećenje koncentrisanom silom (koja se i u literaturi referiše kao demonstracioni primer prevelike krutosti). Konzola je pravougaonog poprečnog preseka, visine 60cm i širine 20cm, dužine 4m, mogula elastičnosti $E = 30GPa$ i modula smičanja $G = 30/2, 5GPa$. Primenom teorije grednog nošača, ugib i nagib slobodnog kraja konzole je:

$$w(l) = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{GA} = 0.2008P \quad (2.34)$$

$$\varphi(l) = \frac{Pl^2}{2EI} = 0.074P$$

Ako se primeni jedan štap duž cele konzole, dobija se znatno manja deformacija i potvrđuje se prevelika krutost poznata u literaturi. U tabeli 2.1 su prikazane vrednosti ugiba kao i odnos ugiba prema tačnoj vrednosti dati u procentime, za modeliranje konzole sa jednim, pet, deset, petnest i dvadeset štapova.

| Br.štapova | $w_n(l)$ | $w/w_n(l)$ % |
|------------|----------|--------------|
| 1 | 0,012 P | 6.3 |
| 5 | 0,1261 P | 63 |
| 10 | 0,1749 P | 87 |
| 15 | 0,1884 P | 93.8 |
| 20 | 0,194 P | 96.3 |

Tabela 2.1: Tabela vrednosti ugiba u funkciji broja štapova pri ekzaktnoj integraciji

Može se uočiti da postupak konvergira, ali je konvergencija izuzetno spora. Pri upotrebi jednog štapa, ugib kraja konzole je samo 6.3 % od očekivane vrednosti, sa 10 elemenata, (što odvovara dužini štapa od 40cm), ugib je 87%, dok je tek sa 20 štapova, postignuta vrednost ugiba od 96 %.

Sama podela grede na veći broj manjih štapove, što se primene tiče, ne predstavlja problem, budući da se na modelima konstrukcija na grede oslanjaju ploče, podela grede je uzrokovana podelom ploča. Relativno kratke grede, opravdavaju pretpostavku korišćenja konstantnih karakteristika preseka u celoj gredi. Osnovano je na tako kratkoj dužini grede usvojiti konstantne karakteristike preseka i efekata u njemu (oštećenja, ili trajne deformacije), ali problem sa velikom krutošću ostaje. Ne može se smatrati zadovoljavajućim rešenjem, podela konzole na 20 štapova (duzine po 20cm), da bi dobili tačnost od 96%.

U literaturi je navedeni problem dobro poznat i obradjen. Metode kojima se ovaj problem može prevazići su uvodjenje unutrašnjih čvorora kojima se omogućava korišćenje interpolacionih funkcija višeg reda, selektivna ili redukovana integracija i korekcija krutosti na smicanje.

U navedenoj literaturi [9] se sugerise rešenje ovog problema korekcijom krutosti na smicanje (umesto GA unošenje vrednosti od $12EI/L^2$) što dovodi do poznate matrice krutosti kod koje umesto deformacije smicanja presek ostaje upravan na deformisanu osu.

Jedna od mogućnosti da se izvedu izrazi metodom deformacija koji će obuhvatiti efekte deformacije smicanja, data je u navedenoj literaturi [12], gde su za interpolaciju poprečnih pomeranja korišćene funkcije četvrtog stepena (slično Hermite-ovim polinomima) uz dodatak funkcija kojima su se unosili efekti deformacija smicanja množeni faktorom:

$$\phi_i = \frac{12}{L^2} \left(\frac{\int_A E y^2 dA}{\int_A G dA} \right) \phi_i^* = \frac{12}{L^2} \left(\frac{\int_A E z^2 dA}{\int_A G dA} \right)$$

Na taj način je korigovana "klasična greda" ali se korekcija ograničila na efekte u početnom trenutku jer se integrišu vrednosti modula elastičnosti i modula smicanja koje se tokom nelinearnog ponašanja menjaju, dok je usvajanje funkcija obavljeno u početnom trenutku.

Navedene metode kojima se koriguje karakteristika preseka pri integraciji matrice krutosti štapa, kako bi se dobili očekivani rezultati, nisu u ovom radu prihvatljive jer se u pristupu upravo odvajaju funkcija poprečnog preseka i njegova krutost od štapa.

Zato se pri određivanju krutosti primenila selektivna integracija. Ako se izvrši numerička integracija izraza (2.27), korišćenjem samo jedne interpolacione tačke na polovini štapa, vrednosti u matrici B postaju konstantne, odnosno izraz (2.31), postaje:

$$K_{slm} = \int_0^L B_{im} K_{ij}^{R-} B_{jl} dA \quad (2.35)$$

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

$$= L(B_{im})|_{x=L/2} K_{ij}^{R-} B_{jl}|_{x=L/2}$$

ili u matricnom obliku:

$$[K_s] = L [B]^T [K^{R-}] [B] \quad (2.36)$$

Vrednosti matrice B su:

$$[B]|_{x=L/2} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{L}\right) \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}^T \quad (2.37)$$

U odnosu na prethodnu matricu B , izmenjeni su članovi: $B_{2,6}, B_{2,12}, B_{3,5}$ i $B_{3,11}$, dok su ostali članovi bili konstante (nisu zavisili od x) pa je do promene u matrici krutosti numeričkom integracijom samo došlo kod članova koji sadrže indekse 5,6,11 i 12. Pored toga, u integraciji, u slučajevima kad je ordinata x bila na prvom stepenu, funkcija je bila linearna te je njena integracija duž stapa identična numeričkoj integraciji sa jednom tačkom. Do razlike dolazi samo u članovima koji u sebi sadrže x^2 a to su članovi matrice kojima su oba indeksa iz skupa 5,6,11 i 12. Razlike u tim članovima su prikazane u tabeli (2.38).

| <i>Numerickom integracijom</i> | <i>potpunom integracijom</i> |
|---|---|
| $K_{S_{5,5}} = \frac{Lk(3,3)}{4} - k(3,5) + \frac{k(5,5)}{L}$ | $\frac{Lk(3,3)}{3} - k(3,5) + \frac{k(5,5)}{L}$ |
| $K_{S_{5,6}} = \frac{-(Lk(3,2))}{4} - \frac{k(3,6)}{2} + \frac{k(5,2)}{2} + \frac{k(5,6)}{L}$ | $\frac{-(Lk(3,2))}{3} - \frac{k(3,6)}{2} + \frac{k(5,2)}{2} + \frac{k(5,6)}{L}$ |
| $K_{S_{5,11}} = \frac{Lk(3,3)}{4} - \frac{k(5,5)}{L}$ | $\frac{Lk(3,3)}{6} - \frac{k(5,5)}{L}$ |
| $K_{S_{5,12}} = \frac{-(Lk(3,2))}{4} + \frac{k(3,6)}{2} + \frac{k(5,2)}{2} - \frac{k(5,6)}{L}$ | $\frac{-(Lk(3,2))}{6} + \frac{k(3,6)}{2} + \frac{k(5,2)}{2} - \frac{k(5,6)}{L}$ |
| $K_{S_{6,6}} = \frac{Lk(2,2)}{4} + k(2,6) + \frac{k(6,6)}{L}$ | $\frac{Lk(2,2)}{3} + k(2,6) + \frac{k(6,6)}{L}$ |
| $K_{S_{6,11}} = \frac{-(Lk(2,3))}{4} - \frac{k(2,5)}{2} - \frac{k(6,3)}{2} - \frac{k(6,5)}{L}$ | $\frac{-(Lk(2,3))}{6} - \frac{k(2,5)}{2} - \frac{k(6,3)}{2} - \frac{k(6,5)}{L}$ |
| $K_{S_{6,12}} = \frac{Lk(2,2)}{4} - \frac{k(6,6)}{L}$ | $\frac{Lk(2,2)}{6} - \frac{k(6,6)}{L}$ |
| $K_{S_{11,11}} = \frac{Lk(3,3)}{4} + k(3,5) + \frac{k(5,5)}{L}$ | $\frac{Lk(3,3)}{3} + k(3,5) + \frac{k(5,5)}{L}$ |
| $K_{S_{11,12}} = \frac{-(Lk(3,2))}{4} + \frac{k(3,6)}{2} - \frac{k(5,2)}{2} + \frac{k(5,6)}{L}$ | $\frac{-(Lk(3,2))}{3} + \frac{k(3,6)}{2} - \frac{k(5,2)}{2} + \frac{k(5,6)}{L}$ |
| $K_{S_{12,12}} = \frac{Lk(2,2)}{4} - k(2,6) + \frac{k(6,6)}{L}$ | $\frac{Lk(2,2)}{3} - k(2,6) + \frac{k(6,6)}{L}$ |

(2.38)

U prethodnim izrazima, iskorišćena je osobina simetrije matrice K^{R-} .

U slučaju poklapanja referentne ose sa težišnom osom i osom centra smicanja, kao i poklapanja lokalnih osa y i z sa glavnim centralnim osama inercije poprečnog preseka, matrica krutosti (2.33) i (2.38), dobija oblik (2.39).

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

$$[K11] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GAy}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{GAy}{2} \\ 0 & 0 & \frac{GAz}{L} & 0 & \frac{-GAz}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-GAz}{2} & 0 & \frac{EIy}{L} + \frac{GAz L}{4} & 0 \\ 0 & \frac{GAy}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EIz}{L} + \frac{GAy L}{4} \end{bmatrix} \quad (2.39a)$$

$$[K12] = \begin{bmatrix} -\left(\frac{AE}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{GAy}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{GAy}{2} \\ 0 & 0 & -\left(\frac{GAz}{L}\right) & 0 & \frac{-GAz}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{GI t}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GAz}{2} & 0 & -\left(\frac{EIy}{L}\right) + \frac{GAz L}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-GAy}{2} & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{EIz}{L}\right) + \frac{GAy L}{4} \end{bmatrix} \quad (2.39b)$$

$$[K22] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GAy}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-GAy}{2} \\ 0 & 0 & \frac{GAz}{L} & 0 & \frac{GAz}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GAz}{2} & 0 & \frac{EIy}{L} + \frac{GAz L}{4} & 0 \\ 0 & \frac{-GAy}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{EIz}{L} + \frac{GAy L}{4} \end{bmatrix} \quad (2.39c)$$

U prethodnim izrazima, vrednosti koje se razlikuju su uokvirene.

Ovakva matrica krutosti ima daleko bolja svojstva. U šustini, numeričkom integracijom sa jednom interpolacionom tačkom, umanjen je doprinos deformacije smicanja pri modovima deformacije koji odgovaraju rotacijama jednog od krajnjih čvorova (sa 1/3 na 1/4). Konvergencija rešenja ovog elementa je posmatrana na navedenom primeru konzole (dužine 4m, pravougaonog poprečnog preseka, 60/40 cm) . U tabeli 2.2 je data vrednost ugiba kraja konzole kao i odnos ugiba prema tačnoj vrednosti dati u procentima.

| Br.štapova | $w_n(l)$ | $w/w_n(l)$ % |
|------------|-------------|--------------|
| 1 | 0,151481 P | 75,4 |
| 2 | 0,188519 P | 93,8 |
| 4 | 0,197778 P | 98,5 |
| 8 | 0,2200093 P | 99,6 |

Tabela 2.2: Tabela vrednosti ugiba u funkciji broja štapova

Ukoliko uporedimo vrednosti, zapazićemo znatno bržu konvergenciju rešenja. Već sa dva štapa, vrednost ugiba je bliža očekivanoj nego sa 10 štapova koji su egzaktno integrirani.

U primeni opšteg programa za strukturnu analizu, po pravilu se koriste linijski i površinski elementi. Broj novih čvorova koji je posledica podele štapova je zanemarljiv u odnosu na broj koji je posledica podele pločastih elemenata. Pored toga, pri povezivanju pločastih elemenata sa linijskim, ukoliko su u istoj ravni, nužno dolazi do podele štapa na elemente čija je dimenzija određena dimenzijom pločastog elementa. Otuda se može konstatovati da podela štapa na više delova neće dovesti do značajnijeg povećanja matrice krutosti sistema.

Sa druge strane, ukoliko je opravdana pretpostavka da se štap nalazi u homogenom stanju (odnosno ukoliko se oštećenje i trajne deformacije poprečnog preseka identične duž štapa) primenom izraza (2.32) i (2.38) će se direktno dobiti članovi matrice krutosti štapa u funkciji krutosti preseka i time znatno umanjiti ukupan broj operacija i vreme potrebno za integraciju matrice krutosti.

Uprkos činjenici da je pri određivanju matrice krutosti, pri modeliranju postupka rešavanja, moguće napisati izraz (2.36) kojim se množenjem matrica određuje matrica krutosti štapa, to bi oduzimalo nepotrebno vreme, jer je veliki broj članova matrice B jednak nuli. U programu bi množenjem matrica, nepotrebno pristupali članovima koji su jednaki nuli.

2.3.2 Integracija matrice fleksibilnosti štapa

U cilju korišćenja prednosti složenih veza između generalisanih statičkih i deformacijskih veličina u preseku, primenom metode sila je moguće sa manje elemenata bolje opisati ponašanje štapa, nego upotrebom istog broja štapova čije su matrice krutosti izvedene metodom deformacija.

To je pre svega posledica činjenice da se usled oštećenja, lokalizuju efekti na jednom delu štapa. Uticaji u elementu se prikazuju kao linearne kombinacije usvojenih interpolacionih funkcija. Pri interpolaciji uticaja duž štapa na osnovu uticaja na krajevima, koriste se glatke, kontinualne krive. Lokalizacija deformacije (krivine u zoni plastičnog zgloba) bi nametala potrebu korišćenja krivih koje imaju skok u prvom izvodu za poprečna pomeranja ili skok ako se njima iskazuje rotacija. To međjutim nije slučaj sa statičkim uticajima. Oni u statički određenom sistemu (osnovnom sistemu štapa) ne zavise od rasporeda krutosti za razliku od deformacija koje zavise od rasporeda krutosti.

U ovom delu će biti prikazana integracija matrice fleksibilnosti uz korišćenje složenih veza između sila i deformacija u preseku. Za slučaj konstantnih karakteristika preseka duž štapa, članovi matrice fleksibilnosti će biti izvedeni u zatvorenom obliku. Postupak se u suštini svodi na određivanje pomeranja na krajevima, u funkciji usvojenih statičkih veličina.

Usvojeni osnovni sistem je prostorna prosta greda prikazana na slici 2.12. Zglob u prvom čvoru (čvoru I), dozvoljava rotaciju oko poprečnih osa (y i z), dok sprečava pomeranja u proizvoljnom pravcu i rotaciju u pravcu uzdužne ose štapa. Oslonac na drugom kraju grede, dozvoljava pomeranje u pravcu ose štapa (izduženje), kao i rotaciju u proizvoljnom pravcu.

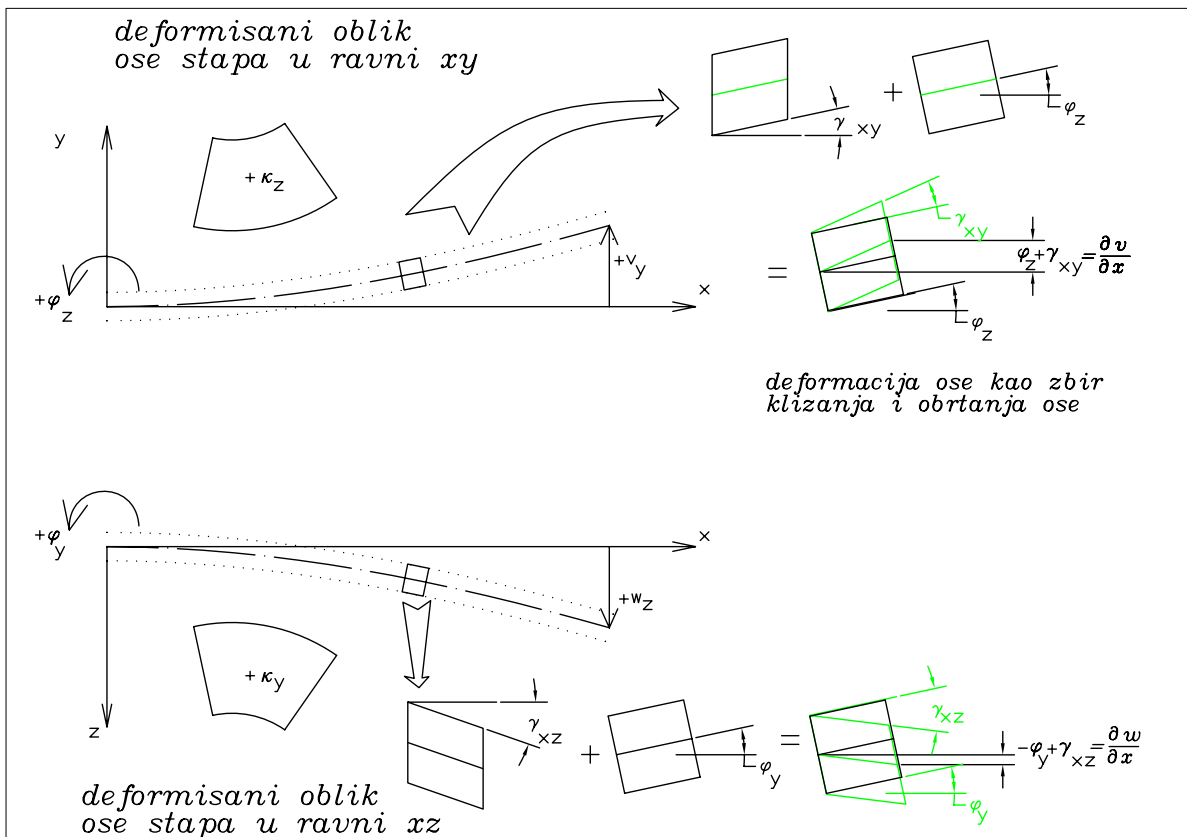
Korišćena je konvencija da je rotacija φ_y pozitivna kada je vektor rotacije u smeru ose, dok je krivina pozitivna kad je $\kappa_y = \partial^2 w / \partial x^2$ odnosno kad je $\varphi_z = \partial^2 v / \partial x^2$ pozitivno, tako je došlo do toga da je $\kappa_y = -d\varphi_y/dx$, $\kappa_z = +d\varphi_z/dx$, kao što je prikazano na slici 2.10.

Određivanje deformacije štapa je pogodnije sprovesti na konzoli kao osnovnom sistemu. Otuda će se najpre sprovesti integracija i odrediti deformacije slobodnog kraja konzole, tj. : izduženje štapa, poprečna pomeranja i obrtanja kraja J;

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

Rotacije se nalaze na osnovu deformacija konzole (kad bi čvor I bio uklešten) kao što je prikazano na slici 2.11. Pomeranja u poprečnom pravcu z ose $w_z(x)$ se nalaze integracijom deformacije klizanja γ_{xz} i rotacije φ_y .

$$\begin{aligned} w_z(x) &= \int_0^x (\gamma_{xz}(x_1) - \varphi_y(x_1)) dx_1 \\ w_z(x) &= \int_0^x \left(\gamma_{xz}(x_1) - \int_0^{x_1} \kappa_y(x_2) dx_2 \right) dx_1 \end{aligned} \quad (2.40)$$



Slika 2.10: Deformacija štapa

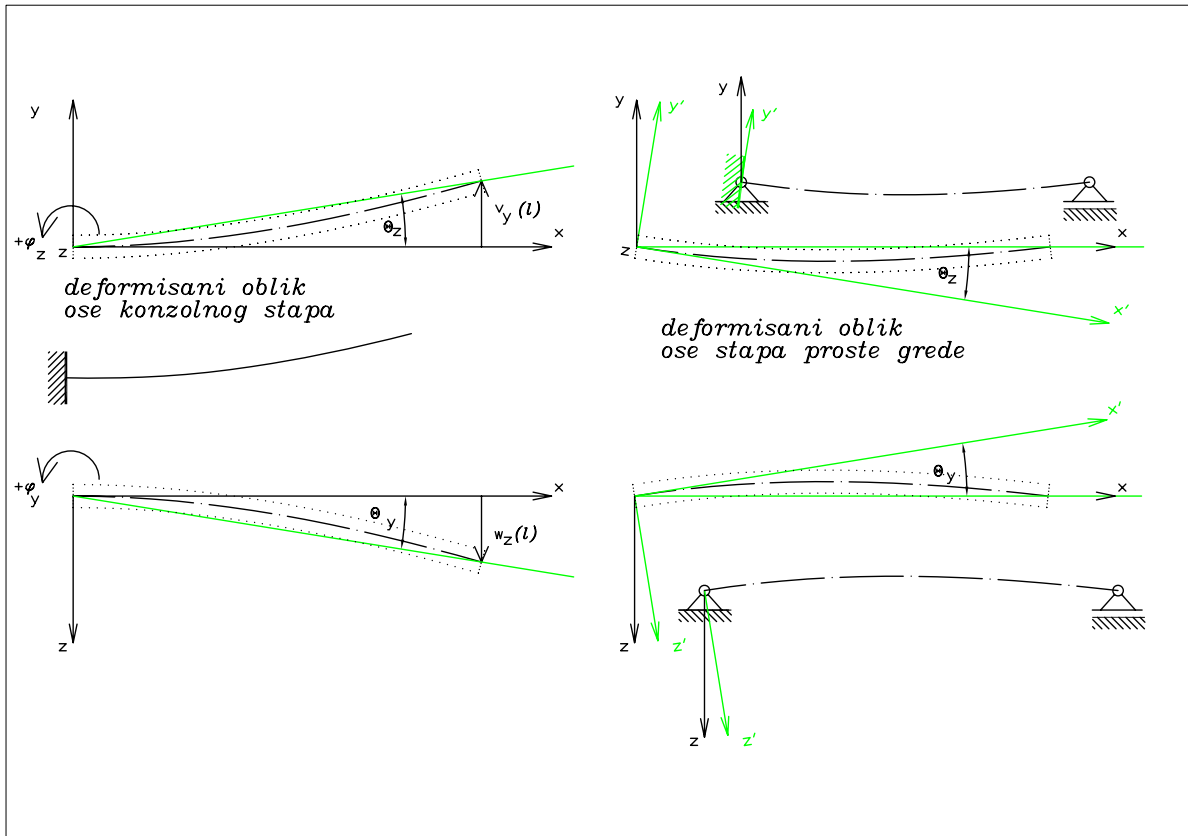
Da bi se dobila rotacija u osnovnom sistemu proste grede, poništava se rotacija grede kao celine, kao što je prikazano na slici 2.11, tako da je rotacija štapa:

$$\theta_y = \frac{w_z(l)}{l} \quad (2.41)$$

, a rotacija preseka je jednaka zbiru rotacije štapa i rotacije preseka :

$$\begin{aligned} \varphi_y(x) &= - \int_0^x \kappa_y(x_1) dx_1 + \theta_y \\ &= - \int_0^x \kappa_y(x_1) dx_1 + \frac{1}{l} \int_0^l \left(\gamma_{xz}(x_1) - \int_0^{x_1} \kappa_y(x_2) dx_2 \right) dx_1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA



Slika 2.11: Deformacija štapa - rotacijom konzole se dobija deformacija proste grede

Na sličan način je pomeranje u pravu ose y jednako:

$$v_y(x) = \int_0^x (\gamma_{xy}(x_1) + \varphi_z(x_1)) dx_1$$

$$v_y(x) = \int_0^x \left(\gamma_{xy}(x_1) + \int_0^{x_1} \kappa_z(x_2) dx_2 \right) dx_1$$

, kako je sa slike 2.11 rotacija štapa kao celine:

$$\theta_z = -\frac{v_y(l)}{l} \quad (2.43)$$

to je obrtanje preseka na proizvoljnom mestu dato izrazom:

$$\varphi_z(x) = \int_0^x \kappa_z(x_1) dx_1 + \theta_z$$

$$= \int_0^x \kappa_z(x_1) dx_1 - \frac{1}{l} \int_0^l \left(\gamma_{xy}(x_1) + \int_0^{x_1} \kappa_z(x_2) dx_2 \right) dx_1 \quad (2.44)$$

Integracijom navedenih veličina možemo dobiti deformacije krajeva štapa za poznate vrednosti funkcija generalisanih deformacija preseka. Sa druge strane deformacije preseka su preko krutosti preseka određene generalisanim silama (izraz 2.25), uz mogućnost da se doda efekat deformacije preseka bez prisustva sila (u slučaju promene temperature, plastičnih ili viskoznih

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

deformacija). Tako za poznato polje sila u štapu (izazvano silama na krajevima ili opterećenjem duž štapa) mogu se odrediti funkcije generalisanih deformacija štapa.

Funkcije kojima se interpretira polje sila, određene su izborom generalisanih nepoznatih sila odnosno osnovnim sistemom i definišu matricu fleksibilnosti. Izabrani osnovni sistem štapa je prikazan na slici 2.12. Kao sile se usvajaju sile na krajevima trodimenzione proste grede (u čvoru I je sprečena rotacija oko X ose i pomeranja u sva tri pravca, dok je u čvoru J sprečeno pomeranje u pravcima Y i Z osa štapa) Tako dobijamo generalisane sile koje odgovajaju generalisanim deformacijama:

$$\{u_{end}\} = \{\Delta l, \varphi_{xJ}, \varphi_{yI}, \varphi_{zI}, \varphi_{yJ}, \varphi_{zJ}\}^T \quad (2.45)$$

Ukoliko bi se nanele sile u navedenim generalisanim pravcima, (na slobodnim krajevima gde nisu sprečena pomeranja) dobili bi vektor sila na krajevima:

$$\{Q_{end}\} = \{N, M_{xJ}, M_{yI}, M_{zI}, M_{yJ}, M_{zJ}\}^T \quad (2.46)$$

Statičke veličine duž štapa, usled svake od komponenti vektora $\{Q_{end}\}$ su određene uslovima ravnoteže i ne zavise od rasporeda krutosti duž štapa. Svaki od članova vektora sila na krajevima, dovodi do odgovarajuće raspodele statičkih veličina. Vrednosti sila duž štapa usled komponenti vektora $\{Q_{end}\}$ su:

- 1 N sve ostale sile su 0
- 2 M_{xJ} sve ostale sile su 0
- 3 M_{yI} $M_y(\xi) = \xi - 1$, $T_z = \frac{1}{l}$
- 4 M_{zI} $M_z(\xi) = \xi - 1$, $T_y = \frac{-1}{l}$
- 5 M_{yJ} $M_y(\xi) = \xi$, $T_z = \frac{1}{l}$
- 6 M_{zJ} $M_z(\xi) = \xi$, $T_y = \frac{-1}{l}$

Kako su generalisane deformacije (odnosno njihovi prirasti u iterativnom postupku) u preseku određene izrazom (2.25), to se taj izraz može napisati:

$$\{\varepsilon_x^R, \gamma_{xy}^R, \gamma_{xz}^R, \theta_x, \kappa_y, \kappa_z\}^T = [C^R] \{N, T_y, T_z, M_x^R, M_y^R, M_z^R\}^T$$

Sile u preseku se mogu naći na osnovu položaja preseka ξ i sila na krajevima (članovima vektora $\{Q_{end}\}$) u obliku proizvoda matrica:

$$\{F^R(\xi)\} = \begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{l} & 0 & \frac{-1}{l} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi - 1 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi - 1 & 0 & \xi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_J \\ M_{xJ} \\ M_{yI} \\ M_{zI} \\ M_{yJ} \\ M_{zJ} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Deformacije krajeva se mogu odrediti integracijom deformacija preseka, na osnovu poznatih sila na krajevima i krutosti preseka:

$$\{u_{end}\} = \begin{Bmatrix} \Delta l \\ \varphi_x(l) \\ \varphi_y(0) \\ \varphi_z(0) \\ \varphi_y(l) \\ \varphi_z(l) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^l \varepsilon_x^R dx \\ \int_0^l \theta_x^R dx \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \theta_y - \int_0^l \kappa_y dx \\ \theta_z - \int_0^l \kappa_z dx \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

Kada se zamene izrazi iz jednačina (2.42) i (2.44) i uvede da je položaj preseka $x = 0$ dobija se:

$$\begin{aligned}\theta_y &= \frac{1}{l} \int_0^l \left(\gamma_{xz}(x_1) - \int_0^{x_1} \kappa_y(x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ \theta_z &= -\frac{1}{l} \int_0^l \left(\gamma_{xy}(x_1) + \int_0^{x_1} \kappa_z(x_2) dx_2 \right) dx_1\end{aligned}\tag{2.49}$$

Koristeći veze izmedju generalisanih sila i deformacija preseka redukovanih na referentnu tačku (jednačina 2.25), kao i sila u preseku izraženih preko sila na krajevima izrazom (2.47) možemo sporeviti integraciju jednačine (2.48) i pri tome koristimo izraze:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^R &= \varepsilon_1^R = C_{1i}^R F_i^R \\ \gamma_{xy} &= \varepsilon_2^R = C_{2i}^R F_i^R \\ \gamma_{xz} &= \varepsilon_3^R = C_{3i}^R F_i^R \\ \theta_x^R &= \varepsilon_4^R = C_{4i}^R F_i^R \\ \kappa_y &= \varepsilon_5^R = C_{5i}^R F_i^R \\ \kappa_z &= \varepsilon_6^R = C_{6i}^R F_i^R\end{aligned}$$

Na taj način izrazi (2.49) postaje:

$$\begin{aligned}\theta_y &= \frac{1}{l} \int_0^l \left[C_{3i}^R(x_1) F_i^R(x_1) - \int_0^{x_1} C_{5i}^R(x_2) F_i^R(x_2) dx_2 \right] dx_1 \\ \theta_z &= -\frac{1}{l} \int_0^l \left[C_{2i}^R(x_1) F_i^R(x_1) + \int_0^{x_1} C_{6i}^R(x_2) F_i^R(x_2) dx_2 \right] dx_1\end{aligned}\tag{2.50}$$

U slučaju štapa sa konstantnim karakteristikama poprečnog preseka, u jednacini (2.50) mogu se karakteristike preseka C^R izvuci ispred integrala (jer ne zavise od položaja preseka na štapu), čime dobijamo:

$$\begin{aligned}\theta_y &= \frac{1}{l} \int_0^l \left[C_{3i}^R F_i^R(x_1) - \int_0^{x_1} C_{5i}^R F_i^R(x_2) dx_2 \right] dx_1 = \frac{1}{l} \left[C_{3i}^R \widetilde{F}_i^R - C_{5i}^R \widetilde{\widetilde{F}}_i^R \right] \\ \theta_z &= -\frac{1}{l} \int_0^l \left[C_{2i}^R F_i^R(x_1) + \int_0^{x_1} C_{6i}^R F_i^R(x_2) dx_2 \right] dx_1 = -\frac{1}{l} \left[C_{2i}^R \widetilde{F}_i^R + C_{6i}^R \widetilde{\widetilde{F}}_i^R \right]\end{aligned}\tag{2.51}$$

uvodeći oznake za integrale funkcija sila duž štapa u obliku:

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_i^R &= \int_0^l F_i^R(\xi) d\xi \\ \widetilde{\widetilde{F}}_i^R &= \int_0^l \left(\int_0^\zeta F_i^R(\xi) d\xi \right) d\zeta\end{aligned}\tag{2.52}$$

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

Sile u proizvoljnom preseku su određene izrazima (2.47) pa se navedena integracija može sporvesti u obliku:

$$\begin{aligned}
 \{\widetilde{F}^R\} &= \int_0^l \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{l} & 0 & \frac{-1}{l} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x}{l} - 1 & 0 & \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x}{l} - 1 & 0 & \frac{x}{l} \end{bmatrix} dx \cdot \begin{Bmatrix} N_J \\ M_{xJ} \\ M_{yI} \\ M_{zI} \\ M_{yJ} \\ M_{zJ} \end{Bmatrix} \\
 &= [\widetilde{IF}] \cdot \{Q_{end}\} \\
 [\widetilde{IF}] &= \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l}{2} & 0 & \frac{l}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2} & 0 & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \\
 \{\widetilde{\widetilde{F}}^R\} &= \int_0^l \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-x}{l} & 0 & \frac{-x}{l} \\ 0 & 0 & \frac{x}{l} & 0 & \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x^2}{2l} - x & 0 & \frac{x^2}{2l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2l} - x & 0 & \frac{x^2}{2l} \end{bmatrix} dx \cdot \begin{Bmatrix} N_J \\ M_{xJ} \\ M_{yI} \\ M_{zI} \\ M_{yJ} \\ M_{zJ} \end{Bmatrix} \\
 &= [\widetilde{\widetilde{IF}}] \cdot \{Q_{end}\} \\
 [\widetilde{\widetilde{IF}}] &= \begin{bmatrix} \frac{l^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{2} & 0 & -\frac{l}{2} \\ 0 & 0 & \frac{l}{2} & 0 & \frac{l}{2} & 0 \\ 0 & \frac{l^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l^2}{3} & 0 & \frac{l^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{3} & 0 & \frac{l^2}{6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Na taj način se izraz (2.48) koji određuje deformacije krajeva štapa, u slučaju deformacija izazvanih samo silama na krajevima, može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}
 \{u_{end}^0\} &= [Cs] \cdot \{Q_{end}\} \tag{2.53} \\
 \left. \begin{Bmatrix} \Delta l \\ \varphi_x(l) \\ \varphi_y(0) \\ \varphi_z(0) \\ \varphi_y(l) \\ \varphi_z(l) \end{Bmatrix} \right|_{F(Q_{end})} &= \begin{Bmatrix} C_{1i}^R \widetilde{\widetilde{F}}_i^R \\ C_{4i}^R \widetilde{\widetilde{F}}_i^R \\ \frac{1}{l} \left(C_{3i}^R \widetilde{\widetilde{F}}_i^R + C_{5j}^R \widetilde{\widetilde{F}}_j^R \right) \\ -\frac{1}{l} \left(C_{2i}^R \widetilde{\widetilde{F}}_i^R + C_{6j}^R \widetilde{\widetilde{F}}_j^R \right) \\ \frac{1}{l} \left(C_{3i}^R \widetilde{\widetilde{F}}_i^R + C_{5j}^R \widetilde{\widetilde{F}}_j^R \right) - C_{5k}^R \widetilde{\widetilde{F}}_k^R \\ -\frac{1}{l} \left(C_{2i}^R \widetilde{\widetilde{F}}_i^R + C_{6j}^R \widetilde{\widetilde{F}}_j^R \right) + C_{6k}^R \widetilde{\widetilde{F}}_k^R \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\{u_{end}^0\} = \begin{Bmatrix} C_{1i}^R \widetilde{IF}_{ij} Q_j \\ C_{4i}^R \widetilde{IF}_{ij} Q_j \\ \frac{1}{l} \left(C_{3i}^R \widetilde{IF}_{ij} + C_{5i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right) Q_j \\ -\frac{1}{l} \left(C_{2i}^R \widetilde{IF}_{ij} + C_{6i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right) Q_j \\ \left[\frac{1}{l} \left(C_{3i}^R \widetilde{IF}_{ij} + C_{5i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right) - C_{5i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right] Q_j \\ \left[-\frac{1}{l} \left(C_{2i}^R \widetilde{IF}_{ij} + C_{6i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right) + C_{6i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right] Q_j \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

pri čemu su članovi matrice C_s određeni izrazom (2.54) i mogu se ispisati po vrstama:

$$\begin{aligned} C_{s1j} &= C_{1i}^R \widetilde{IF}_{ij} \\ C_{s2j} &= C_{4i}^R \widetilde{IF}_{ij} \\ C_{s3j} &= \frac{1}{l} \left(C_{3i}^R \widetilde{IF}_{ij} + C_{5i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right) \\ C_{s4j} &= -\frac{1}{l} \left(C_{2i}^R \widetilde{IF}_{ij} + C_{6i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right) \\ C_{s5j} &= \frac{1}{l} \left(C_{3i}^R \widetilde{IF}_{ij} + C_{5i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right) - C_{5i}^R \widetilde{IF}_{ij} \\ C_{s6j} &= -\frac{1}{l} \left(C_{2i}^R \widetilde{IF}_{ij} + C_{6i}^R \widetilde{IF}_{ij} \right) + C_{6i}^R \widetilde{IF}_{ij} \end{aligned} \quad (2.55)$$

U razvijenom obliku, matrica fleksibilnosti je napisana izrazima (2.56).

$$[C_s] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$[C_{11}] = \begin{bmatrix} LC_{1,1}^R & LC_{1,4}^R & C_{1,3}^R - \frac{LC_{1,5}^R}{2} \\ LC_{4,1}^R & LC_{4,4}^R & C_{4,3}^R - \frac{LC_{4,5}^R}{2} \\ C_{3,1}^R + \frac{LC_{5,1}^R}{2} & C_{3,4}^R + \frac{LC_{5,4}^R}{2} & \frac{C_{3,3}^R}{L} - \frac{3C_{3,5}^R - 3C_{5,3}^R + 2LC_{5,5}^R}{6} \end{bmatrix} \quad (2.56a)$$

$$[C_{12}] = \begin{bmatrix} \frac{-2C_{1,2}^R - LC_{1,6}^R}{2} & C_{1,3}^R + \frac{LC_{1,5}^R}{2} & -C_{1,2}^R + \frac{LC_{1,6}^R}{2} \\ \frac{-2C_{4,2}^R - LC_{4,6}^R}{2} & C_{4,3}^R + \frac{LC_{4,5}^R}{2} & -C_{4,2}^R + \frac{LC_{4,6}^R}{2} \\ -\frac{6C_{3,2}^R + L(3C_{3,6}^R + 3C_{5,2}^R + 2LC_{5,6}^R)}{6L} & \frac{C_{3,3}^R}{L} + \frac{3C_{3,5}^R + 3C_{5,3}^R + LC_{5,5}^R}{6} & \frac{3C_{3,6}^R - 3C_{5,2}^R + LC_{5,6}^R}{6} - \frac{C_{3,2}^R}{L} \end{bmatrix} \quad (2.56b)$$

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

$$[C21] = \begin{bmatrix} \frac{-2C_{2,1}^R - LC_{6,1}^R}{2} & \frac{-2C_{2,4}^R - LC_{6,4}^R}{2} & \frac{-6C_{2,3}^R + 3C_{2,5}^R - 3C_{6,3}^R + 2LC_{6,5}^R}{6} \\ C_{3,1}^R - \frac{LC_{5,1}^R}{2} & C_{3,4}^R - \frac{LC_{5,4}^R}{2} & \frac{\frac{6C_{3,3}^R}{L} - 3C_{3,5}^R - 3C_{5,3}^R + LC_{5,5}^R}{6} \\ -C_{2,1}^R + \frac{LC_{6,1}^R}{2} & -C_{2,4}^R + \frac{LC_{6,4}^R}{2} & \frac{-6C_{2,3}^R + 3C_{2,5}^R + 3C_{6,3}^R - LC_{6,5}^R}{6} \end{bmatrix} \quad (2.56c)$$

$$[C22] = \begin{bmatrix} \frac{\frac{6C_{2,2}^R}{L} + 3C_{2,6}^R + 3C_{6,2}^R + 2LC_{6,6}^R}{6} & \frac{-(6C_{2,3}^R + L(3C_{2,5}^R + 3C_{6,3}^R + LC_{6,5}^R))}{6L} & \frac{\frac{6C_{2,2}^R}{L} - 3C_{2,6}^R + 3C_{6,2}^R - LC_{6,6}^R}{6} \\ \frac{-6C_{3,2}^R + L(-3C_{3,6}^R + 3C_{5,2}^R + LC_{5,6}^R)}{6L} & \frac{\frac{6C_{3,3}^R}{L} + 3C_{3,5}^R - 3C_{5,3}^R - 2LC_{5,5}^R}{6} & \frac{-6C_{3,2}^R + 3C_{3,6}^R + 3C_{5,2}^R - 2LC_{5,6}^R}{6} \\ \frac{\frac{6C_{2,2}^R}{L} + 3C_{2,6}^R - 3C_{6,2}^R - LC_{6,6}^R}{6} & \frac{-6C_{2,3}^R - 3C_{2,5}^R + 3C_{6,3}^R + 2LC_{6,5}^R}{6} & \frac{\frac{6C_{2,2}^R}{L} - 3C_{2,6}^R - 3C_{6,2}^R + 2LC_{6,6}^R}{6} \end{bmatrix} \quad (2.56d)$$

Izvodjene ove matrice je izvršeno programom *Mathematica* (file *KrutostPreseka5Final.nb*) Na taj način dobivena matrica fleksibilnosti se može prikazati preko 4 podmatrice. U slučaju da su se karakteristike poprečnog preseka menjale duž štapa, integracija izraza (2.48) se mora vršiti numerički ili se mogu primeniti izrazi za štapove sa offsetima.

Pri numeričkoj integraciji ekvivalentnog čvornog opterećenja u statičkoj analizi se može primeniti postupak prikazan u poglavljima 4.4.1, 4.4.2 ili 4.4.3. Preciznost će zavistiti od broja integracionih tačaka u numeričkoj integraciji deformacije. Pri nelinearnoj analizi, objektni pristup (korišćenje objekata poprečnog preseka), pri integraciji deformacije i rezidualnog opterećenja , nameće upotrebu i korišćenje diskretnog broja objekata preseka duž štapa. Štap će biti podeljen na konačni broj segmenata, a na svakom segmentu, karakteristike (krutost, deformacija i sile) će biti određene, karakteristikama preseka na polovini segmenta. Informaciju o krutosti, deformaciji i silama u preseku će obezbeđivati objekat poprečnog preseka. U tom slučaju je usvojena pretpostavka da su te karakteristike konstantne duž celog segmenta. Ukoliko želimo da krutost štapa bude istog stepena tačnosti, kao i rezidualno opterećenje , matricu fleksibilnosti ćemo odrediti uz istu pretpostavku da su sve karakteristike duž štapa jednake karakteristikama na polovini segmenta. U tom slučaju, integraciju deformacije možemo sprovesti numerički, koristeći samo jednu integracionu tačku (na polovini preseka) ili ponoviti postupak uz usvajanje funkcija konstantnog rasporeda sila duž štapa izraženih jednačinom (2.57), umesto izraza (2.47).

$$\{F^R(\xi)\} = \begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{l} & 0 & \frac{-1}{l} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_J \\ M_{xJ} \\ M_{yI} \\ M_{zI} \\ M_{yJ} \\ M_{zJ} \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Razlike koje se dobijaju u čalnovima matrice fleksibilnosti su date u tabeli 2.58.

| <i>Numerickom integracijom</i> | <i>Analitickom integracijom</i> |
|--|--|
| $C_{S_{3,3}} = \frac{C_{3,3}^R}{L} - \frac{3C_{3,5}^R - 3C_{5,3}^R + \boxed{2}LC_{5,5}^R}{6}$ | $\frac{C_{3,3}^R}{L} - \frac{3C_{3,5}^R - 3C_{5,3}^R + \boxed{1.5}LC_{5,5}^R}{6}$ |
| $C_{S_{3,4}} = -\frac{6C_{3,2}^R + L(3C_{3,6}^R + 3C_{5,2}^R + \boxed{2}LC_{5,6}^R)}{6L}$ | $-\frac{6C_{3,2}^R + L(3C_{3,6}^R + 3C_{5,2}^R + \boxed{1.5}LC_{5,6}^R)}{6L}$ |
| $C_{S_{3,5}} = \frac{C_{3,3}^R}{L} + \frac{3C_{3,5}^R + 3C_{5,3}^R + \boxed{1}LC_{5,5}^R}{6}$ | $\frac{C_{3,3}^R}{L} + \frac{3C_{3,5}^R + 3C_{5,3}^R + \boxed{1.5}LC_{5,5}^R}{6}$ |
| $C_{S_{3,6}} = \frac{3C_{3,6}^R - 3C_{5,2}^R + \boxed{1}LC_{5,6}^R}{6} - \frac{C_{3,2}^R}{L}$ | $\frac{3C_{3,6}^R - 3C_{5,2}^R + \boxed{1.5}LC_{5,6}^R}{6} - \frac{C_{3,2}^R}{L}$ |
| $C_{S_{4,3}} = \frac{-6C_{2,3}^R}{L} + \frac{3C_{2,5}^R - 3C_{6,3}^R + \boxed{2}LC_{6,5}^R}{6}$ | $\frac{-6C_{2,3}^R}{L} + \frac{3C_{2,5}^R - 3C_{6,3}^R + \boxed{1.5}LC_{6,5}^R}{6}$ |
| $C_{S_{4,4}} = \frac{6C_{2,2}^R}{L} + \frac{3C_{2,6}^R + 3C_{6,2}^R + \boxed{2}LC_{6,6}^R}{6}$ | $\frac{6C_{2,2}^R}{L} + \frac{3C_{2,6}^R + 3C_{6,2}^R + \boxed{1.5}LC_{6,6}^R}{6}$ |
| $C_{S_{4,5}} = -\frac{C_{2,3}^R}{L} - \frac{C_{2,5}^R + 3C_{6,3}^R}{2} - L\frac{C_{6,5}^R}{\boxed{6}}$ | $-\frac{C_{2,3}^R}{L} - \frac{C_{2,5}^R + 3C_{6,3}^R}{2} - L\frac{C_{6,5}^R}{\boxed{4}}$ |
| $C_{S_{4,6}} = \frac{6C_{2,2}^R}{L} - \frac{3C_{2,6}^R + 3C_{6,2}^R - \boxed{1}LC_{6,6}^R}{6}$ | $\frac{6C_{2,2}^R}{L} - \frac{3C_{2,6}^R + 3C_{6,2}^R - \boxed{1.5}LC_{6,6}^R}{6}$ |
| $C_{S_{5,4}} = \frac{-6C_{3,2}^R + L(-3C_{3,6}^R + 3C_{5,2}^R + \boxed{1}LC_{5,6}^R)}{6L}$ | $\frac{-6C_{3,2}^R + L(-3C_{3,6}^R + 3C_{5,2}^R + \boxed{1.5}LC_{5,6}^R)}{6L}$ |
| $C_{S_{5,5}} = \frac{6C_{3,3}^R}{L} + \frac{3C_{3,5}^R - 3C_{5,3}^R - \boxed{2}LC_{5,5}^R}{6}$ | $\frac{6C_{3,3}^R}{L} + \frac{3C_{3,5}^R - 3C_{5,3}^R - \boxed{1.5}LC_{5,5}^R}{6}$ |
| $C_{S_{5,6}} = \frac{-6C_{3,2}^R}{L} + \frac{3C_{3,6}^R + 3C_{5,2}^R - \boxed{2}LC_{5,6}^R}{6}$ | $\frac{-6C_{3,2}^R}{L} + \frac{3C_{3,6}^R + 3C_{5,2}^R - \boxed{1.5}LC_{5,6}^R}{6}$ |
| $C_{S_{6,4}} = \frac{6C_{2,2}^R}{L} + \frac{3C_{2,6}^R - 3C_{6,2}^R - \boxed{1}LC_{6,6}^R}{6}$ | $\frac{6C_{2,2}^R}{L} + \frac{3C_{2,6}^R - 3C_{6,2}^R - \boxed{1.5}LC_{6,6}^R}{6}$ |
| $C_{S_{6,5}} = \frac{-C_{2,3}^R}{L} + \frac{C_{6,3}^R - C_{2,5}^R}{2} + \frac{LC_{6,5}^R}{\boxed{3}}$ | $\frac{-C_{2,3}^R}{L} + \frac{C_{6,3}^R - C_{2,5}^R}{2} + \frac{LC_{6,5}^R}{\boxed{4}}$ |
| $C_{S_{6,6}} = \frac{C_{2,2}^R}{L} - \frac{C_{2,6}^R + C_{6,2}^R}{2} + \frac{LC_{6,6}^R}{\boxed{3}}$ | $\frac{C_{2,2}^R}{L} - \frac{C_{2,6}^R + C_{6,2}^R}{2} + \frac{LC_{6,6}^R}{\boxed{4}}$ |

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

Kao specijalan slučaj, kada je ceo presek homogen (istog modula elastičnosti i modula klizanja), odnosno, kada se umesto vrednosti C_{ij}^R koje su određene na nivou poprečnog preseka (koji ne mora biti homogen), upotrebe izrazi (2.24), izrazi za članove matrice fleksibilnosti se transformišu i matrica fleksibilnosti se izrazima (2.59) prikazuje preko četiri submatrice.

$$[C11] = \begin{bmatrix} \frac{L(J2+F I_y y t^2 - 2 F I_{yz} y t z t + F I_z z t^2)}{E_o F J2} & 0 & \frac{L(I_z z t - I_{yz} y t)}{2 E_o J2} \\ 0 & \frac{L}{G I t} & -\left(\frac{y s}{G I t}\right) \\ \frac{L(I_z z t - I_{yz} y t)}{2 E_o J2} & -\left(\frac{y s}{G I t}\right) & \frac{I_z L}{3 E_o J2} + \frac{1}{L G A_z} + \frac{y s^2}{L G I t} \end{bmatrix} \quad (2.59a)$$

$$[C12] = \begin{bmatrix} \frac{L(I_{yz} z t - I_y y t)}{2 E_o J2} & \frac{L(I_{yz} y t - I_z z t)}{2 E_o J2} & \frac{L(I_y y t - I_{yz} z t)}{2 E_o J2} \\ -\left(\frac{z s}{G I t}\right) & -\left(\frac{y s}{G I t}\right) & -\left(\frac{z s}{G I t}\right) \\ \frac{I_{yz} L}{3 E_o J2} + \frac{y s z s}{G I t L} & \frac{1}{L G A_z} + \frac{y s^2}{L G I t} - \frac{I_z L}{6 E_o J2} & \frac{y s z s}{G I t L} - \frac{I_{yz} L}{6 E_o J2} \end{bmatrix} \quad (2.59b)$$

$$[C21] = \begin{bmatrix} \frac{L(I_{yz} z t - I_y y t)}{2 E_o J2} & -\left(\frac{z s}{G I t}\right) & \frac{I_{yz} L}{3 E_o J2} + \frac{y s z s}{G I t L} \\ \frac{L(I_z z t - I_{yz} y t)}{2 E_o J2} & -\left(\frac{y s}{G I t}\right) & \frac{1}{L G A_z} + \frac{y s^2}{L G I t} - \frac{I_z L}{6 E_o J2} \\ \frac{L(I_y y t - I_{yz} z t)}{2 E_o J2} & -\left(\frac{z s}{G I t}\right) & \frac{y s z s}{G I t L} - \frac{I_{yz} L}{6 E_o J2} \end{bmatrix} \quad (2.59c)$$

$$[C22] = \begin{bmatrix} \frac{I_y L}{3 E_o J2} + \frac{1}{L G A_y} + \frac{z s^2}{L G I t} & \frac{y s z s}{L G I t} - \frac{I_{yz} L}{6 E_o J2} & \frac{1}{L G A_y} + \frac{z s^2}{L G I t} - \frac{I_y L}{6 E_o J2} \\ \frac{y s z s}{L G I t} - \frac{I_{yz} L}{6 E_o J2} & \frac{I_z L}{3 E_o J2} + \frac{1}{L G A_z} + \frac{y s^2}{L G I t} & \frac{I_{yz} L}{3 E_o J2} + \frac{y s z s}{G I t L} \\ \frac{1}{L G A_y} + \frac{z s^2}{L G I t} - \frac{I_y L}{6 E_o J2} & \frac{I_{yz} L}{3 E_o J2} + \frac{y s z s}{G I t L} & \frac{I_y L}{3 E_o J2} + \frac{1}{L G A_y} + \frac{z s^2}{L G I t} \end{bmatrix} \quad (2.59d)$$

U slučaju poklapanja referentne ose sa težisnom osom i osom centra smicanja, kao i poklapanja lokalnih osa y i z sa glavnim centralnim osama inercije poprečnog preseka ($J2 = I_y I_z$, $I_{yz} = 0$) izrazi (2.59) postaju jednostavniji, dok se matrica fleksibilnosti svodi na izraz (2.60):

$$[C_s] = \begin{bmatrix} \frac{L}{E_o F} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{G I t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G A_z L} + \frac{L}{3 E_o I_y} & 0 & \frac{1}{G A_z L} - \frac{L}{6 E_o I_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G A_y L} + \frac{L}{3 E_o I_z} & 0 & \frac{1}{G A_y L} - \frac{L}{6 E_o I_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G A_z L} - \frac{L}{6 E_o I_y} & 0 & \frac{1}{G A_z L} + \frac{L}{3 E_o I_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G A_y L} - \frac{L}{6 E_o I_z} & 0 & \frac{1}{G A_y L} + \frac{L}{3 E_o I_z} & 0 \end{bmatrix}$$

(2.60)

Pri numeričkoj integraciji sa jednom tačkom na polovini štapa, izraz (2.60), postaje:

$$[C_S^{CPN}] = \begin{bmatrix} \frac{L}{EoF} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{GIt} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{GAzL} + \frac{L}{4EoIy} & 0 & \frac{1}{GAzL} - \frac{L}{4EoIy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GAyL} + \frac{L}{4EoIz} & 0 & \frac{1}{GAyL} - \frac{L}{4EoIz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{GAzL} - \frac{L}{4EoIy} & 0 & \frac{1}{GAzL} + \frac{L}{4EoIy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GAyL} - \frac{L}{4EoIz} & 0 & \frac{1}{GAyL} + \frac{L}{4EoIz} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Inverzijom matrice (2.61), dobija se bazna matrica (2.62):

$$K_o^{CPN} = \begin{bmatrix} \frac{EoF}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GIt}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EoIy}{L} + \frac{GAzL}{4} & 0 & \frac{GAzL}{4} - \frac{EoIy}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EoIz}{L} + \frac{GAyL}{4} & 0 & \frac{GAyL}{4} - \frac{EoIz}{L} \\ 0 & 0 & \frac{GAzL}{4} - \frac{EoIy}{L} & 0 & \frac{EoIy}{L} + \frac{GAzL}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{EoIz}{L}\right) + \frac{GAyL}{4} & 0 & \frac{EoIz}{L} + \frac{GAyL}{4} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Primenom transformacija (2.68) na baznu matricu krutosti (2.62), koja je određena inverzijom numerički integrisane matrice fleksibilnosti (2.61), dobija se matrica krutosti koja identična numerički integrisanoj matrici krutosti, određenoj primenom metode deformacije (2.39).

Deformacije krajeva štapa usled opterećenja

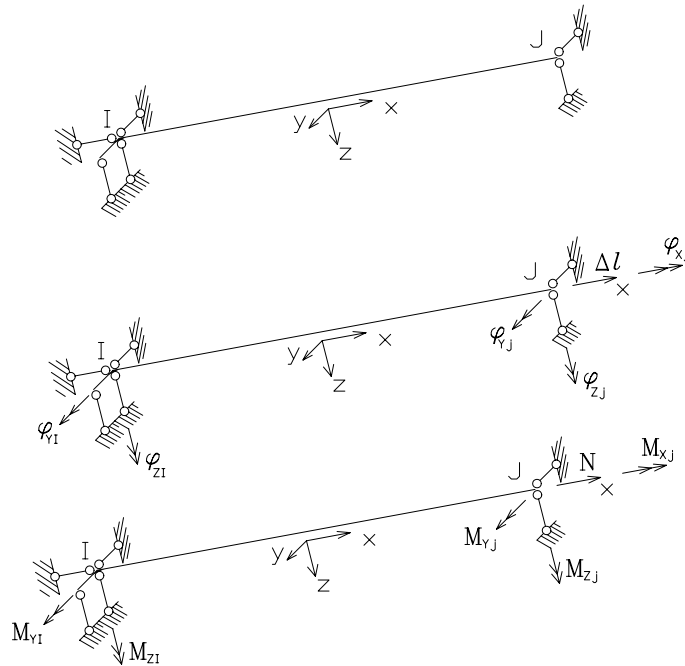
Deformacije krajeva štapa posmatramo na statički određenom - baznom štapu. Od interesa su pomeranja krajeva štapa koja nisu sprečena u statički određenom sistemu prikazanom na slici 2.12.

$$\{u_{end}\} = \{\Delta l, \varphi_x(l), \varphi_y(0), \varphi_z(0), \varphi_y(l), \varphi_z(l)\}^T$$

Usled dejstva sila u navedenim generalisanim pravcima, (u pravcima na slobodnim krajevima gde nisu sprečena pomeranja)

$$\{Q_{end}\} = \{N, M_{xJ}, M_{yI}, M_{zI}, M_{yJ}, M_{zJ}\}^T$$

dolazi do deformacija krajeva izazvanih ovim silama koje su obeležene sa $\{u_{end}^F\}$, koje se mogu odrediti na osnovu krutosti štapa i prema jednačini (2.53). Usled opterećenja štapa takodje dolazi do deformacija u pravcima u kojima nije sprečeno pomeranje i ta deformacija će biti obeležena sa $\{u_{end}^q\}$. Ove veličine se mogu odrediti na osnovu izraza (2.48) i za poznate vrednosti krutosti poprečnog preseka $[C^R(x)]$ i poznate vrednosti vektora presečnih sila u funkciji položaja preseka $\{F^R(x)\}$ (reč je o statički određenom sistemu).



Slika 2.12: Osnovni Sistem - sile i deformacije

U linearnoj analizi, koristeći izraz (2.25), može se odrediti vektor deformacije preseka na proizvoljnom mestu, a zatim integracijom tih veličina, jednačinom (2.48) dobijamo deformacije krajeva usled uticaja q . Ova integracija u opštem slučaju se mora vršiti numerički i obradjena je u okviru poglavlja 4.4.1, 4.4.2 i 4.4.3.

Ukupna deformacija u pravcima u kojima nije sprečeno pomeranje jednako je zbiru ova dva vektora: $\{u_{end}^0\} = \{u_{end}^F\} + \{u_{end}^q\}$

2.3.3 Matrica krutosti štapa - primenom metode fleksibilnosti

Za poznate vrednosti pomeranja i opterećenja, mogu se odrediti sile na krajevima štapova na osnovu izraza:

$$\{u_{end}^F\} = [Cs] \cdot \{Q_{end}\} \quad (2.63)$$

$$\{Q_{end}\} = [Cs]^{-1} \cdot \{\{u_{end}^0\} - \{u_{end}^q\}\} \quad (2.64)$$

$$[K^0s] = [Cs]^{-1} \quad (2.65)$$

$$\{Q_{end}\} = [K^0s] \cdot \{\{u_{end}^0\} - \{u_{end}^q\}\} \quad (2.66)$$

Osnovne sile i pomeranja mogu naći u funkciji sila i pomeranja na krajevima štapa:

$$\{u_{end}\} = \begin{Bmatrix} \Delta l \\ \varphi_x(l) \\ \varphi_y(0) \\ \varphi_z(0) \\ \varphi_y(l) \\ \varphi_z(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{xI} \\ U_{yI} \\ U_{zI} \\ \varphi_{xI} \\ \varphi_{yI} \\ \varphi_{zI} \\ U_{xJ} \\ U_{yJ} \\ U_{zJ} \\ \varphi_{xJ} \\ \varphi_{yJ} \\ \varphi_{zJ} \end{Bmatrix}$$

$$\{u_{end}\} = [G]^T \cdot \{U\}$$

Sa druge strane sile na krajevima štapa $\{F\}$, se mogu izraziti preko sila izazvanim deformacijama štapa ($\{Q_{end}\}$) i sila koje se dobijaju kao reakcije kad se posmatra osnovni sistem štapa $\{F^q\}$:

$$\begin{Bmatrix} F_{xI} \\ F_{yI} \\ F_{zI} \\ \varphi_{xI} \\ \varphi_{yI} \\ \varphi_{zI} \\ F_{xJ} \\ F_{yJ} \\ F_{zJ} \\ \varphi_{xJ} \\ \varphi_{yJ} \\ \varphi_{zJ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} \\ 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N \\ M_{xJ} \\ M_{yI} \\ M_{zI} \\ M_{yJ} \\ M_{zJ} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_I^q \\ -T_{yI}^q \\ -T_{zI}^q \\ -M_{lI}^q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{yJ}^q \\ T_{zJ}^q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = [G] \cdot \{Q_{end}\} + \{F^q\}$$

Sile koje su posledica deformacije štapa, se mogu naći korišćenjem izraza (2.66), tako da dobijamo:

$$\begin{aligned} \{F\} &= [G] \cdot [K^0s] \cdot \{\{u_{end}^0\} - \{u_{end}^q\}\} + \{F^q\} \\ &= [G] \cdot [K^0s] \cdot [G]^T \cdot \{U\} - [G] \cdot [K^0s] \cdot \{u_{end}^q\} + \{F^q\} \end{aligned}$$

Deformacije krajeva statički određenog štapa usled oprerećenja $\{u_{end}^q\}$ možemo predstaviti u obliku vektora sa 12 članova (od kojih su uvek vrednosti koje odgovaraju pomeranjima

2.3. INTEGRACIJA DEFORMACIJE ŠTAPA

u pravcima oslonaca osnovnog sistema jednake 0). U tom slučaju, umesto $\{u_{end}^q\}$ imamo vektor $\{U^q\}$.

Komponente vektora su: $\{U^q\} = \{0, 0, 0, 0, \varphi_{yI}, \varphi_{zI}, U_{xJ}, 0, 0, \varphi_{xJ}, \varphi_{yJ}, \varphi_{zJ}\}^T$. Svako od pomeranja koja su članovi prethodnog vektora se nalazi integracijom članova (vidi izraze 2.48).

Na taj način sile koje deluju na kraju štapa mogu se izraziti u obliku:

$$\{F\} = [G] \cdot [K^0_s] \cdot [G]^T \cdot \{U\} - [G] \cdot [K^0_s] \cdot [G]^T \cdot \{U^q\} + \{F^q\} \quad (2.67a)$$

$$= [K^0] \cdot \{U\} - [K^0] \cdot \{U^q\} + \{F^q\} \quad (2.67b)$$

$$= [K^0] \cdot \{U\} - \{F_{Def}^q\} + \{F^q\} \quad (2.67c)$$

Matrica krutosti štapa sa 12 stepeni slobode $[K^0]$, i vektor $\{F_{Def}^q\}$ su određeni izrazima (2.68) i zavise od rasporeda krutosti duž štapa.

$$[K^0] = [G] \cdot [K^0_s] \cdot [G]^T \quad (2.68a)$$

$$\{F_{Def}^q\} = [G] \cdot [K^0_s] \cdot [G]^T \cdot \{U^q\} \quad (2.68b)$$

$$\{F^Q\} = \{F^q\} - \{F_{Def}^q\} \quad (2.68c)$$

U prethodnom izrazu sa $\{F_{Def}^q\}$ su označene sile koje se javljaju na krajevima štapa izloženog opterećenju q usled sprečenih pomeranja krajeva u navedenim pravcima. Tako će taj vektor sadržati samo članove koji su posledica SPREČENIH POMERANJA odnosno STATIČKIH NEPOZNATIH NA SAMOM ŠTAPU. Zbir $\{F^q\} - \{F_{Def}^q\}$ predstavlja reakcije koje deluju na opterećenom štapu u slučaju da se ne deformišu njegovi krajevi (i da nema vremenskih deformacija). U daljem tekstu će se obeležavati sa $\{F^Q\} = \{F^q\} - \{F_{Def}^q\}$. U slučaju štapova konstantih krutosti ove vektore je moguće računati u funkciji opterećenja, ali u opštem slučaju potrebno je znati krutost štapa, da bi bilo moguće odrediti deo koji je posledica sprečenih deformacija samog kraja.

2.3.4 Primer : Štap opterećen koncentrisanom silom P u pravcu ose štapa koja deluje na 2/3 raspona

U ovom slučaju možemo odrediti veličine:

$$\begin{aligned} \{F^q\} &= \{-P, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \\ \{U^q\} &= \left\{0, 0, 0, 0, 0, 0, P \frac{2l}{3EF}, 0, 0, 0, 0, 0\right\}^T \\ [K^0] &= \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \dots & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tj. :

$$\begin{aligned} \{F_{Def}^q\} &= \left\{-\frac{2}{3}P, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{2}{3}P, 0, 0, 0, 0, 0\right\}^T \\ \{F^Q\} &= \{F^q\} - \{F_{Def}^q\} = \left\{-\frac{1}{3}P, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{2}{3}P, 0, 0, 0, 0, 0\right\}^T \end{aligned}$$

, što odgovara i po znacima i po vrednostima rešenjima navedenog problema.

2.3.5 Primer : Štap opterećen konstantnim kontinualnim opterećenjem q_x u pravcu ose x

U ovom slučaju su prethodni vektori:

$$\begin{aligned} \{F^q\} &= \{-q_x l, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \\ \{U^q\} &= \left\{0, 0, 0, 0, 0, 0, q_x \frac{l}{2EF}, 0, 0, 0, 0, 0\right\}^T \\ [K^0] &= \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \dots & & & & & \\ & & & & & & \dots & & & & & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tj.:

$$\begin{aligned} \{F_{Def}^q\} &= \left\{-\frac{q_x l}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{q_x l}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right\}^T \\ \{F^Q\} &= \{F^q\} - \{F_{Def}^q\} = \left\{-\frac{q_x l}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{q_x l}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right\}^T \end{aligned}$$

, što odgovara rešenju.

2.4 Štapovi sa oslobodjenim vezama na krajevima

Na krajevima štapa se mogu primeniti veze koje omogućavaju nezavisno pomeranje kraja štapa u odnosu na čvor za koji su vezani. Na taj način se u nekom od generalisanih pravaca, deformacija štapa razlikuje od deformacije čvora uz uslov da je generalisana sila u pravcu koji je oslobodjen jednaka 0. U tom slučaju nije od interesa generalisano pomeranje u_L (jer se javlja na kraju štapa i ne zavisi od pomeranja čvora) dok postoji uslov da je generalisana sila na kraju štapa u pravcu "L" $F_L = 0$. Iz ove jednačine se može sračunata vrednost pomeranja u_L

$$u_L = -\frac{1}{K_{LL}} (K_{Lj} u_j + F_L^Q) \quad L \neq j$$

uz poznatu vrednost pomeranja u pravcu u_L jednačina za proizvoljni pravac pomeranja onda dobija oblik:

$$\begin{aligned} F_i &= K_{ij} u_j + F_i^Q = K_{ij} u_j + F_i^Q - K_{iL} \frac{1}{K_{LL}} [K_{Lj} u_j + F_L^Q] \quad L \neq j \\ F_i &= \left[K_{ij} - K_{iL} \frac{1}{K_{LL}} K_{Lj} \right] u_j + F_i^Q - K_{iL} \frac{1}{K_{LL}} F_L^Q \quad L \neq j \end{aligned}$$

odnosno, ako sa $[K^L]$ označimo matricu kojoj je na prethodni način eliminisana kolona i vrsta L i odgovarajući vektor $\{F^{QL}\}$ njihove članove možemo odrediti na sledeći način:

$$K_{ij}^L = K_{ij} - K_{iL} \frac{1}{K_{LL}} K_{Lj} \quad (2.69a)$$

$$F_i^{QL} = F_i^Q - K_{iL} \frac{1}{K_{LL}} F_L^Q \quad (2.69b)$$

Ove operacije se mogu i po više puta nezavisno ponavljati (može se nezavisno uklanjati više veza na krajevima štapa.) Ova operacija se mora obavljati po definisanju opterećenja i po generisanju matrice krutosti štapa. Nije moguće prvo eliminisati te stepene slobode iz matrice krutosti pa tek onda korigovati vektore opterećenja, već se to mora raditi tako što se prvo koriguju vektori opterećenja, pa tek onda elementi matrice krutosti.

U slučaju da je potrebna matrica masa ovakvog ξ ; ona se takodje mora modifikovati. U pravcu oslobodjene veze pomeranje čvora nije vezano sa pomeranjem kraja štapa, tako da se ta masa mora dodeliti ostalim generalisanim pravcima pomeranja (koja postoje u sistemu). To bi se u slučaju da je masa bila dodeljena elementu kome je jedan stepen slobode redukovan (oslobodjena veza koja ne može imati reakcije i u pravcu koje generalisana sila mora biti jednaka 0) svelo na već pomenuti slučaj da se to pomeranje izrazi preko ostalih čvornih pomeranja: $u_L = -\frac{1}{K_{LL}}K_{Lj}u_j$ u tom slučaju pri izvodjenju matrice masa integrali interpolacionih funkcija se modifikuju tako što se najpre modifikuje funkcija pomeranja:

$$u_i(\xi) = N_{ij}(\xi)U_j = N_{ij}(\xi)U_j|_{j \neq L} - N_{iL} \frac{N_{Lj}}{K_{LL}}U_j = N_{ij}^L U_j$$

pri čemu su za N_{ij}^L korišćeni irazi kao za interpolacione funkcije kad je stepen slobode L redukovan na osnovu uslova da nema reakcije u njegovom pravcu i pomeranje izraženo preko preostalih pomeranja. Tada imamo :

$$N_{ij}^L = N_{ij} - N_{iL} \frac{K_{Lj}}{K_{LL}}$$

(pri čemu nije vršeno sumiranje po indeksu L)

U tom slučaju u matrici masa se javljaju samo te funkcije:

$$\begin{aligned} M_{pk}^L &= l \int_{\xi=0}^1 \left(N_{ip}^L(\xi) m_{ij} N_{jk}^L(\xi) \right) d\xi \\ &= l \int_{\xi=0}^1 \left[\left(N_{ip} - N_{iL} \frac{K_{Lp}}{K_{LL}} \right) (\xi) m_{ij} \left(N_{jk} - N_{jL} \frac{K_{Lk}}{K_{LL}} \right) (\xi) \right] d\xi \\ &= l \left\{ \int_{\xi=0}^1 N_{ip}(\xi) m_{ij} N_{jk}(\xi) d\xi - \frac{K_{Lp}}{K_{LL}} \int_{\xi=0}^1 N_{iL}(\xi) m_{ij} N_{jk}(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. - \frac{K_{Lk}}{K_{LL}} \int_{\xi=0}^1 N_{ip} m_{ij} N_{jL} d\xi + \frac{K_{Lp}}{K_{LL}} \frac{K_{Lk}}{K_{LL}} \int_{\xi=0}^1 N_{iL}(\xi) m_{ij} N_{jL}(\xi) d\xi \right\} \\ &= M_{pk} - \frac{K_{Lp}}{K_{LL}} M_{Lk} - \frac{K_{Lk}}{K_{LL}} M_{pL} + \frac{K_{Lp}}{K_{LL}} \frac{K_{Lk}}{K_{LL}} M_{LL} \end{aligned}$$

odnosno, za svaki element matrice masa po kondenzaciji stepena slobode L imamo:

$$M_{ij}^L = M_{ik} - \frac{K_{Li}}{K_{LL}} M_{Lj} - \frac{K_{Lj}}{K_{LL}} M_{iL} + \frac{K_{Li}}{K_{LL}} \frac{K_{Lj}}{K_{LL}} M_{LL}$$

(pri čemu nije vršeno sumiranje po indeksu L).

Na ovaj način dobijamo matricu masa koja će imati vrednosti jednake nuli na L-toj vrsti ili L-toj koloni. Ova matrica se mora nalaziti dok se još iz matrice krutosti ne eliminiše stepen krutosti L. Na ovaj način se moglo i pokazati da se redukcija stepena slobode iz matrice krutosti izvodi na već izloženi način jer ako se umesto M stavi K dobija se već prikazan izraz (treći i četvrti sabirak se u tom slučaju skrate).

2.5 Matrica krutosti u globalnom koordinatnom sistemu

Vektorske veličine tj. : sile, momenti i pomeranja će se transformisati iz lokalnog koordinatnog sistema $S_o(x_o, y_o, z_o)$ koji odgovara štapu u globalni koordinatni sistem $S(x, y, z)$. U lokalnom koordinatnom sistemu, vektor sila ozančavamo sa $\{F^0\}$, a odgovarajući vektor pomeranja sa $\{U^0\}$. Transformacija u globalni koordinatni sistem se vrši množenjem matricom transformacije $[A]$. Matrica transformacije $[A]$, koja vrši transformaciju iz sistema S_0 u sistem S :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [A] \cdot \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\angle X, X_0) & \cos(\angle X, Y_0) & \cos(\angle X, Z_0) \\ \cos(\angle Y, X_0) & \cos(\angle Y, Y_0) & \cos(\angle Y, Z_0) \\ \cos(\angle Z, X_0) & \cos(\angle Z, Y_0) & \cos(\angle Z, Z_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix}$$

dok je A^T matrica koja prevodi sistem S u sistem S_0 , tj.:

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix} = [A]^T \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\angle X_0, X) & \cos(\angle X_0, Y) & \cos(\angle X_0, Z) \\ \cos(\angle Y_0, X) & \cos(\angle Y_0, Y) & \cos(\angle Y_0, Z) \\ \cos(\angle Z_0, X) & \cos(\angle Z_0, Y) & \cos(\angle Z_0, Z) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}$$

Članovi matrice transformacije A , u pravouglom koordinatnom sistemu, predstavljaju kosinuse uglova koje jedinične ose međusobno grade.

Vektor se praktično sastoji od vektora sila i vektora m , pa će se uvesti matrica transformacije $A1$:

$$[A1] = \begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix}$$

Transformacija vektora sila i vektora pomeranja iz lokalnog sistema ($\{F^0\}$, $\{U^0\}$) u globalni koordinatni sistem ($\{F\}$, $\{U\}$) i obratno, množenjem matricom transformacije, je prikazana izrazima:

$$\begin{aligned} \{F\} &= [A1] \cdot \{F^0\} & \{U\} &= [A1] \cdot \{U^0\} \\ \{F^0\} &= [A1]^T \cdot \{F\} & \{U^0\} &= [A1]^T \cdot \{U\} \\ & & [A1] &= \begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [A] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Za štap, koji ima dva čvora, uvodi se matrica transformacije $[A2]$, tj.

$$[A2] = \begin{bmatrix} [A1] & 0 \\ 0 & [A1] \end{bmatrix}$$

Vektor sila na krajevima štapa u globalnom koordinatnom sistemu se određuje izrazom (2.70.a).

$$\{F\} = [A2] \{F^0\} \tag{2.70a}$$

$$\{F\} = [A2] [G] [K s^0] [G]^T \{U^0\} - [A2] [G] [K s^0] \{u_{end}^q\} + [A2] \{F^q\} \tag{2.70b}$$

$$\{F\} = [A2] [G] [K s^0] [G]^T [A2]^T \{U\} - [A2] [G] [K s^0] \{u_{end}^q\} + [A2] \{F^q\} \tag{2.70c}$$

Korišćenjem izraza (2.67), izraz (2.70.a), se transformiše u (2.70.b), odnosno (2.70.c).

Na taj način su određene sile u globalnom koordinatnom sistemu na krajevima štapa $\{F\}$ u funkciji pomeranja u globalnom koordinatnom sistemu krajeva štapa $\{U\}$, pomeranja krajeva u statički određenom štapu $\{u_{end}^q\}$ i reakcija štapa u osnovnom sistemu $\{F^q\}$.

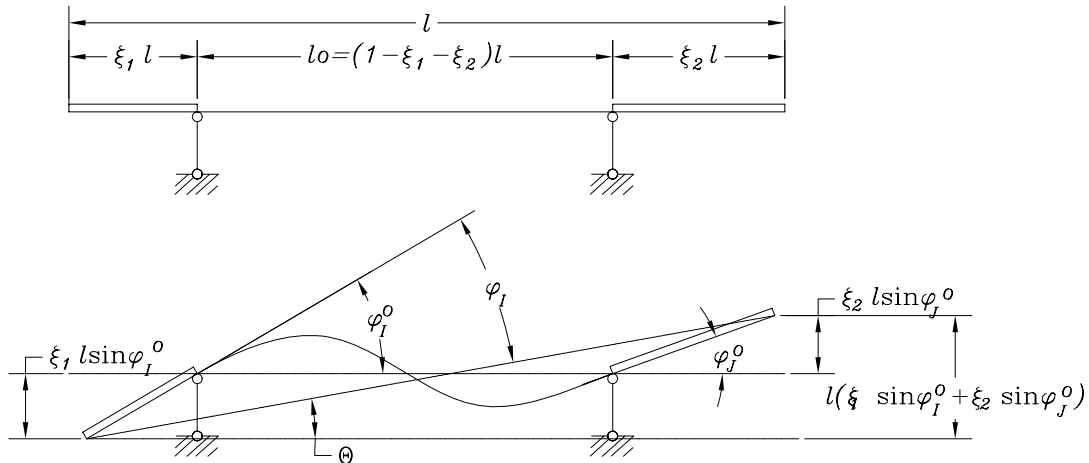
$$\{F\} = [K_{glob}] \{U\} - [K1_{glob}] \{u_{end}^q\} + [A2] \{F^q\}$$

pri čemu je :

$$\begin{aligned} [K_{glob}] &= [A2] [G] [Ks^0] [G]^T [A2]^T \\ [K1_{glob}] &= [A2] [G] [Ks^0] \end{aligned}$$

2.6 Nedeformabilni delovi štapa (offset-i štapova)

Pri analizi linijskih konstrukcija, pod *offset*-ima podrazumevamo delove štapa neposredno uz krajeve štapa koji su beskonačno kruti (time se simulira deo štapa, koji je deo čvora, i koji je nedeformabilan). U ovom radu, *offset*-i štapova, će biti uzeti u obzir pri integraciju matrice fleksibilnosti i vektora čvornog opterećenja štapova čiji se poprečni preseći skokovito menjaju. Najpre, da bi se iskoristile već postojeće rutine kojima se određuju koeficijenti matrice fleksibilnosti, potrebno je izvesti veze kojima se na nalaze uticaji i deformacije na celom štapu na osnovu deformacije deformabilnog dela štapa. Posmatrajmo zato deformaciju štapa u ravni koji sadrži *offset*-e na oba kraja (slika 2.13). Pomeranja na kraju štapa sa *offset*-ima izražavamo



Slika 2.13: Deformacija štapa sa *offset*-ima

tako što posmatramo deo koji je deformabilan (deo izmedju oslonaca na slici 2.13) i deformacije tog dela obeležavamo dodavanjem indeksa 'o' :

$$\Delta l_o, \Delta \varphi_{ox}, \Delta \varphi_{oIy}, \Delta \varphi_{oIz}, \Delta \varphi_{oJy}, \Delta \varphi_{oJz}.$$

Preko ovih deformacija izražavamo pomeranja na kraju celog štapa sa *offset*-ima dodajući rotaciju celog štapa do koje bi došlo kad bi oslonci bili na krajevima. Tada je izduženje i rotacija oko ose štapa:

$$\Delta l_o = \Delta l, \quad \Delta \varphi_{ox} = \Delta \varphi_x$$

dok se rotacijama krajeva oko osa upravnih na osu štapa dodaje (oduzima rotacija štapa kao krutog tela Θ), pa se tako dobijaju stvarne rotacije na krajevima štapa sa *offset*-ima:

$$\begin{aligned}\varphi_I &= \varphi_I^o - \Theta \\ \varphi_J &= \varphi_J^o - \Theta\end{aligned}$$

Sa slike 2.13 se može uočiti:

$$\Theta = \xi_1 \sin \varphi_I^o + \xi_2 \sin \varphi_J^o$$

Kako su uglovi mali to se sinus izjednačava sa tangensom sa jedne i vrednošću ugla u radijanima sa druge strane čime dobijamo:

$$\begin{aligned}\Theta &= \xi_1 \varphi_I^o + \xi_2 \varphi_J^o \\ \varphi_I &= \varphi_I^o - (\xi_1 \varphi_I^o + \xi_2 \varphi_J^o) = (1 - \xi_1) \varphi_I^o - \xi_2 \varphi_J^o \\ \varphi_J &= \varphi_J^o - (\xi_1 \varphi_I^o + \xi_2 \varphi_J^o) = -\xi_1 \varphi_I^o + (1 - \xi_2) \varphi_J^o\end{aligned}$$

Navedene relacije važe za obe ose y i z. Na taj način se deformacije krajeva štapa sa *offset*ima mogu izraziti preko deformacija deformabilnog dela dela i iznose:

$$\begin{Bmatrix} \Delta l \\ \varphi_{xJ} \\ \varphi_{yI} \\ \varphi_{zI} \\ \varphi_{yJ} \\ \varphi_{zJ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \xi_1 & 0 & -\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \xi_1 & 0 & -\xi_2 \\ 0 & 0 & -\xi_1 & 0 & 1 - \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_1 & 0 & 1 - \xi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta l^o \\ \varphi_{xJ}^o \\ \varphi_{yI}^o \\ \varphi_{zI}^o \\ \varphi_{yJ}^o \\ \varphi_{zJ}^o \end{Bmatrix}$$

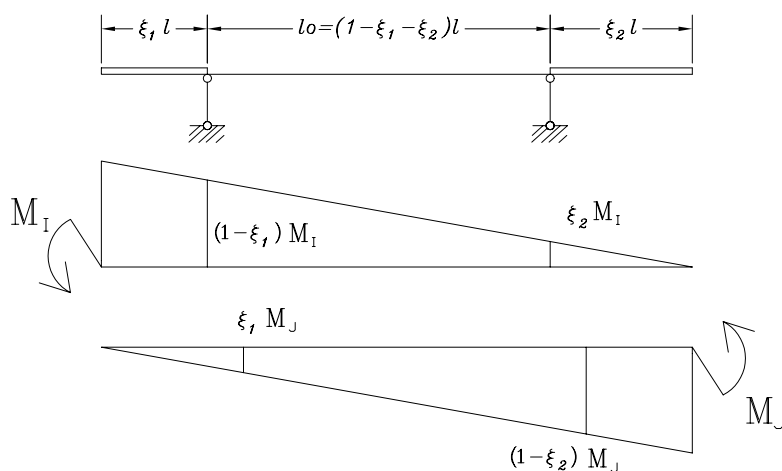
Na sličan način se mogu izraziti i sile na kraju dela koji se deformiše na osnovu sila u celom štapu. Normalne sile i moment torzije ostaju nepromenjeni dok se momenti savijanja mogu očitati sa slike 2.14 i izraziti na sledeći način:

$$\begin{aligned}M_I &= (1 - \xi_1) M_I^o - \xi_2 M_J^o \\ M_J &= -\xi_1 M_I^o + (1 - \xi_2) M_J^o\end{aligned}$$

Odnosno sile na krajevima deformabilnog dela se mogu izraziti preko sila na krajevima celokupnog štapa sa *offset*-ima matičnom relacijom:

$$\begin{Bmatrix} N^o \\ M_{xJ}^o \\ M_{yI}^o \\ M_{zI}^o \\ M_{yJ}^o \\ M_{zJ}^o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \xi_1 & 0 & -\xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \xi_1 & 0 & -\xi_1 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 - \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\xi_2 & 0 & 1 - \xi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N \\ M_{xJ} \\ M_{yI} \\ M_{zI} \\ M_{yJ} \\ M_{zJ} \end{Bmatrix}$$

$$\{Q_{end}^{OF}\} = [OF] \{Q_{end}\}$$



Slika 2.14: Promena momenta saviljanja na štapu sa ofsetima

Sa druge strane već su uočene veze izmedju sila i deformacija na deformabilnom delu:

$$\{u_{end}^0\} = [OF]^T \{u_{end}^{OF}\}$$

, pri čemu su sa gornjim indeksom OF definisani članovi generalisanih pomeranja i sila koji se nalaze na krajevima deformabilnog dela štapa. Ranije su definisane veze ovih statičkih i kinematičkih veličina preko bazne matrice fleksibilnosti deformabilnog dela:

$$\begin{aligned} \{u_{end}^{OF}\} &= [C_s^{OF}] \{Q_{end}^{OF}\} \\ \{u_{end}^0\} &= [OF]^T \{u_{end}^{OF}\} = [OF]^T [C_s^{OF}] \{Q_{end}^{OF}\} \\ &= [OF]^T [C_s^{OF}] [OF] \{Q_{end}\} \end{aligned}$$

Bazna matrica fleksibilnosti štapa sa *offset*-ima se može odrediti modifikovanjem matrice fleksibilnosti deformabilnog dela, tj.:

$$[C_s] = [OF]^T [C_s^{OF}] [OF] \quad (2.71)$$

Takodje se javlja potreba da se pri sračunavanju uticaja - deformacija slobodnih krajeva u statički odredjenom osnovnom sistemu iskoriste već postojeće rutine za štap bez *offset*-a. Najpre će se odrediti vrednosti deformacija na krajevima deformabilnog dela a zatim uz korišćenje izraza:

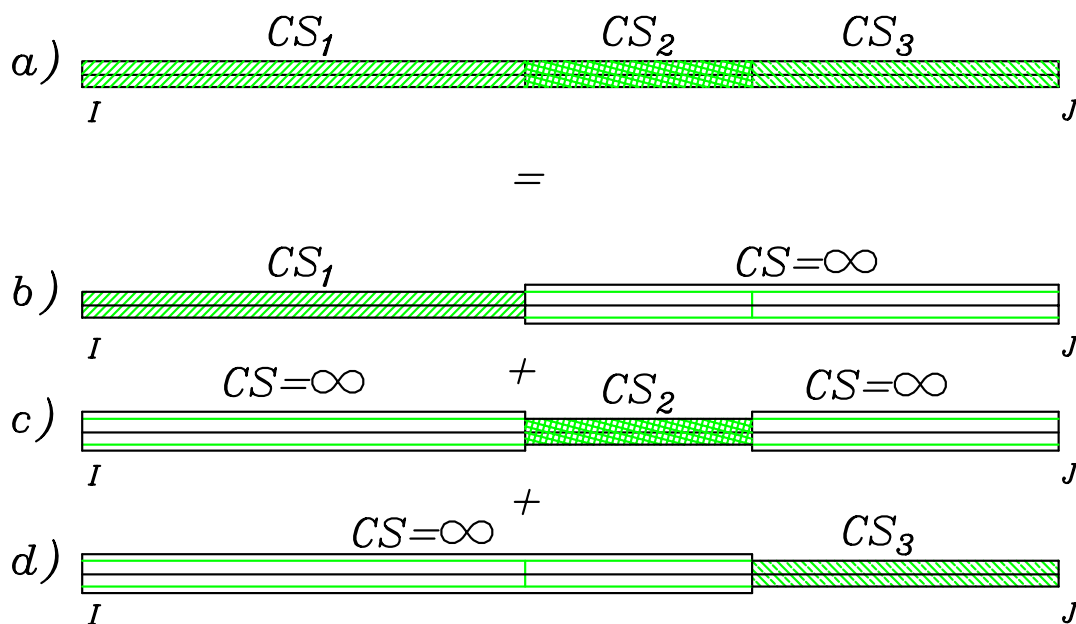
$$\{u_{end}^q\} = [OF]^T \{u_{end}^{q, OF}\} \quad (2.72)$$

odrediti deformacija na krajevima celoklupnog štapa. Dalji postupak je isti kao da *offset*-a nije bilo.

2.7 Štapovi promenjivog poprečnog preseka

Štapovi promenjivog poprečnog preseka se smatraju štapovima u kojima je porečni presek 'skokovito' menja tj. promena nije kontinualna. Skokovita promena poprečnog preseka je

usvojena pre svega jer je pri kontinualnoj promeni jedne dimenzije preseka promena površine linearna funkcija, promena jednog momenta inercije takodje linearna funkcija a promena drugog momenta inercije funkcija trećeg stepena. Pošto promena svih karakteristika preseka nije linearna, to nameće problem sa definisanjem načina promene odgovarajuće karakteristike pa se umesto komplikovanije definicije usvaje da će se presek 'skokovito' menjati uz mogućnost da broj skokova bude neograničen kako bi se mogla simulirati kontinualna promena. Pri određivanju matrice fleksibilnosti ovakvog štapa primenjuju se izrazi korišćeni u štapu sa *offset*-ima. Bazna matrica fleksibilnosti se posmatra kao zbir baznih matrica fleksibilnosti štapova sa zadatim-konstantnim poprečnim presecima uz *offset*-e kojima se smatra da deo štapa koji nije te krutoistu je nedeformabilan. Na slici 2.15 a) je prikazan štap sa tri preseka: CS_1 , CS_2 i CS_3 . Deformacija njegovih krajeva, biće jednaka zbiru deformacija krajeva štapova b), c) i d) izloženih istim statičkim uticajima. Štapa b), ima krutost preseka CS_1 , na delu na kome i štap a) ima istu krutost, dok na preostalom delu ima beskonačnu krutost, odnosno, preostali deo se modelira ofsetima. Kako su statički uticaji u osnovnom sistemu nezavisni od rasporeda krutosti, to će deformacija tog dela štapa odgovarati deformaciji odgovarajućeg dela štapa a). Preostali deo štapa je nedeformabilan. Slično je sa štapovima c) i d). Oduća je deformacija štapa kao celine, u osnovnom sistemu, jednaka zbiru deformacija štapova b), c) i d).



Slika 2.15: Štapa više preseka, modeliran ofsetima

Na taj način se praktično, sabiranjem matrice fleksibilnosti sabiraju deformacije na delovima sa konstantnim poprečnim presecima. Po dobijanju matrice fleksibilnosti celog štapa postupak je isti kao da je ona dobijena za konstantan presek. U slučaju da se za ovakav štap traže vektori pomeranja krajeva (na statički određenom sistemu, za određivanje ekvivalentnog čvornog opterećenja), postupak je isti kao i kod običnog štapa, jer se pri određivanju deformacije koriste matrice fleksibilnosti preseka (za svaki presek odgovarajuća matrica).

2.8 Matrica masa štapa

Matrica masa štapa će se sračunati u lokalnom koordinatnom sistemu na osnovu pretpostavljenih pomeranja ose štapa odredjenih generalisanim pomeranjima na krajevima i interpolacionim funkcijama u obliku Hermite-ovih polinoma. Ovim se čini izvesna greška jer se zanemaruje deformacija izazvana transverzalnim silama ali se izrazi mogu smatrati dovoljno tačnim za matricu masa. Problem je nastje kad se pri izvodjenu matrice krutosti primenjuje metoda sila. Funkcije pomeranja se ne javljaju u toku nalaženja matrice fleksibilnosti ali su neophodne za nalaženje matrice masa. Pomeranja u pravcu x ose kao i rotacija oko x ose se nalazi linearnom interpolacijom:

$$\begin{aligned}u_x(\xi) &= U_{xI}(1 - \xi) + U_{xJ}\xi \\ \varphi_x(\xi) &= \varphi_{xI}(1 - \xi) + \varphi_{xJ}\xi\end{aligned}$$

Pomeranja u pravcu lokalne y ose u_y i rotacija oko z ose φ_z se nalaze na osnovu odgovarajućih pomeranja i rotacija krajeva štapa ($U_{yI}, \varphi_{zI}, U_{yJ}, \varphi_{zJ}$).

$$\begin{aligned}u_y(\xi) &= U_{yI}(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) + \varphi_{zI}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l + U_{yJ}(3\xi^2 - 2\xi^3) + \varphi_{zJ}(-\xi^2 + \xi^3)l \\ \varphi_y(\xi) &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} = -\frac{\partial u_z}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{-1}{l} \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \\ &= U_{zI} \frac{6}{l} (\xi - \xi^2) + \varphi_{yI} (\xi - 4\xi^2 + 3\xi^3) - U_{zJ} \frac{6}{l} (\xi - \xi^2) + \varphi_{yJ} (-2\xi + 2\xi^2)\end{aligned}$$

onosno pomeranja u pravcu z ose i rotacija oko y ose:

$$\begin{aligned}u_z(\xi) &= U_{zI}(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) - \varphi_{yI}(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l + U_{zJ}(3\xi^2 - 2\xi^3) - \varphi_{yJ}(-\xi^2 + \xi^3)l \\ \varphi_z(\xi) &= \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{1}{l} \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \\ &= U_{yI} \frac{6}{l} (-\xi + \xi^2) + \varphi_{zI} (\xi - 4\xi^2 + 3\xi^3) + U_{yJ} \frac{6}{l} (\xi - \xi^2) + \varphi_{zJ} (-2\xi + 2\xi^2)\end{aligned}$$

Pomeranja se mogu odrediti i u matricnom obliku preko funkcija:

$$u_i(\xi) = N_{ij}U_j$$

pri čemu su malim slovom označena pomeranja (vektor od 6 elemenata)

$$\{u_i\} = \{u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}^T$$

Pomeranja krajeva štapa u lokalnom koordinatnom sistemu su označena velikim slovom U:

$$\{U_i\} = \{U_{xI}, U_{yI}, U_{zI}, \varphi_{xI}, \varphi_{yI}, \varphi_{zI}, U_{xJ}, U_{yJ}, U_{zJ}, \varphi_{xJ}, \varphi_{yJ}, \varphi_{zJ}\}^T$$

pa se navedena matrica može ispisati u obliku:

$$[N_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6\xi + 6\xi^2}{l} \\ 0 & 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 & \frac{6\xi - 6\xi^2}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) & 0 & 1 - 4\xi + 3\xi^2 & 0 \\ 0 & l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 0 & 0 & 0 & 1 - 4\xi + 3\xi^2 \\ \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\xi - 6\xi^2}{l} \\ 0 & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 & \frac{-6\xi + 6\xi^2}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l(\xi^2 - \xi^3) & 0 & -2\xi + 3\xi^2 & 0 \\ 0 & l(-\xi^2 + \xi^3) & 0 & 0 & 0 & -2\xi + 3\xi^2 \end{bmatrix}$$

Matrica masa se nalazi tako što se određuje rad koji vrše reaktivne inercijalne sile pri pomeranjima. Reaktivne sile na osi štapa su određene kao reaktivne čvorne sile F^{IR} i one su date sledećim izrazom:

$$F_i^{IR}(\xi) = m_{ij}u_j(\xi) = m_{ij}N_{jk}\ddot{U}_k$$

a radovi ovih sila pri varijaciji pomeranja U_p se mogu ispisati na sledeći način :

$$\begin{aligned} W &= \int_l (u_i(\xi)F_i^{IR}(\xi)) dx = \int_l (u_i(\xi)m_{ij}N_{jk}\ddot{U}_k) dx \\ &= l \left(\int_{\xi=0}^{\xi=1} N_{ip}(\xi)m_{ij}N_{jk}(\xi) d\xi \right) U_p\ddot{U}_k = M_{pk}U_p\ddot{U}_k \end{aligned}$$

Članovi matrice masa štapa su integrali oblika:

$$M_{pk} = l \left(\int_{\xi=0}^{\xi=1} N_{ip}(\xi)m_{ij}N_{jk}(\xi) d\xi \right)$$

U gornjem izrazu članovi *matrice masa poprečnog preseka* m_{ij} mogu zavisiti od poprečnog preseka odnosno, mogu se menjati duž ose štapa. U slučaju konstantnog poprečnog preseka izrazi za članove *matrice masa štapa* se mogu izvesti u zatvorenom obliku. Korišćenjem uz *matrice masa poprečnog preseka* koja je u poglavlju 2.2.3 već definisana, dobijamo *matricu masa štapa*. Radi lakšeg zapisivanja matricu masa štapa, predstavljamo preko četiti matrice:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M^{1,1}] & [M^{1,2}] \\ [M^{2,1}] & [M^{2,2}] \end{bmatrix}$$

od kojih je svaka:

$$[M^{1,1}] = \begin{array}{cccccc} \frac{Al}{3} & \frac{Sz}{2} & \frac{Sy}{2} & 0 & \frac{lSy}{12} & \frac{-(lSz)}{12} \\ \frac{Sz}{2} & \left(\frac{13A}{35} + \frac{6Iz}{5l^2} \right) l & \frac{6Iyz}{5l} & \frac{-7lSy}{20} & \frac{-Iyz}{10} & l \left(\frac{Iz}{10l} + \frac{11Al}{210} \right) \\ \frac{Sy}{2} & \frac{6Iyz}{5l} & \left(\frac{13A}{35} + \frac{6Iy}{5l^2} \right) l & \frac{7lSz}{20} & l \left(\frac{-Iy}{10l} - \frac{11Al}{210} \right) & \frac{Iyz}{10} \\ 0 & \frac{-7lSy}{20} & \frac{7lSz}{20} & \frac{Iol}{3} & \frac{-(l^2Sz)}{20} & \frac{-(l^2Sy)}{20} \\ \frac{lSy}{12} & \frac{-Iyz}{10} & l \left(\frac{-Iy}{10l} - \frac{11Al}{210} \right) & \frac{-(l^2Sz)}{20} & l \left(\frac{2Iy}{15} + \frac{Al^2}{105} \right) & \frac{-2Iyzl}{15} \\ \frac{-(lSz)}{12} & l \left(\frac{Iz}{10l} + \frac{11Al}{210} \right) & \frac{Iyz}{10} & \frac{-(l^2Sy)}{20} & \frac{-2Iyzl}{15} & l \left(\frac{2Iz}{15} + \frac{Al^2}{105} \right) \end{array}$$

$$[M^{1,2}] = \begin{array}{cccccc} \frac{Al}{6} & \frac{-Sz}{2} & \frac{-Sy}{2} & 0 & \frac{-(lSy)}{12} & \frac{lSz}{12} \\ \frac{Sz}{2} & \left(\frac{9A}{70} - \frac{6Iz}{5l^2} \right) l & \frac{-6Iyz}{5l} & \frac{-3lSy}{20} & \frac{-Iyz}{10} & l \left(\frac{Iz}{10l} - \frac{13Al}{420} \right) \\ \frac{Sy}{2} & \frac{-6Iyz}{5l} & \left(\frac{9A}{70} - \frac{6Iy}{5l^2} \right) l & \frac{3lSz}{20} & l \left(\frac{-Iy}{10l} + \frac{13Al}{420} \right) & \frac{Iyz}{10} \\ 0 & \frac{-3lSy}{20} & \frac{3lSz}{20} & \frac{Iol}{6} & \frac{l^2Sz}{30} & \frac{l^2Sy}{30} \\ \frac{-(lSy)}{12} & \frac{Iyz}{10} & l \left(\frac{Iy}{10l} - \frac{13Al}{420} \right) & \frac{-(l^2Sz)}{30} & l \left(\frac{-Iy}{30} - \frac{Al^2}{140} \right) & \frac{Iyzl}{30} \\ \frac{lSz}{12} & l \left(\frac{-Iz}{10l} + \frac{13Al}{420} \right) & \frac{-Iyz}{10} & \frac{-(l^2Sy)}{30} & \frac{Iyzl}{30} & l \left(\frac{-Iz}{30} - \frac{Al^2}{140} \right) \end{array}$$

$$[M^{2,1}] = \begin{array}{cccccc} \frac{Al}{6} & \frac{Sz}{2} & \frac{Sy}{2} & 0 & \frac{-(lSy)}{12} & \frac{lSz}{12} \\ \frac{-Sz}{2} & \left(\frac{9A}{70} - \frac{6Iz}{5l^2} \right) l & \frac{-6Iyz}{5l} & \frac{-3lSy}{20} & \frac{Iyz}{10} & l \left(\frac{-Iz}{10l} + \frac{13Al}{420} \right) \\ \frac{-Sy}{2} & \frac{-6Iyz}{5l} & \left(\frac{9A}{70} - \frac{6Iy}{5l^2} \right) l & \frac{3lSz}{20} & l \left(\frac{Iy}{10l} - \frac{13Al}{420} \right) & \frac{-Iyz}{10} \\ 0 & \frac{-3lSy}{20} & \frac{3lSz}{20} & \frac{Iol}{6} & \frac{-(l^2Sz)}{30} & \frac{-(l^2Sy)}{30} \\ \frac{-(lSy)}{12} & \frac{-Iyz}{10} & l \left(\frac{-Iy}{10l} + \frac{13Al}{420} \right) & \frac{l^2Sz}{30} & l \left(\frac{-Iy}{30} - \frac{Al^2}{140} \right) & \frac{Iyzl}{30} \\ \frac{lSz}{12} & l \left(\frac{Iz}{10l} - \frac{13Al}{420} \right) & \frac{Iyz}{10} & \frac{l^2Sy}{30} & \frac{Iyzl}{30} & l \left(\frac{-Iz}{30} - \frac{Al^2}{140} \right) \end{array}$$

$$[M^{2,2}] = \begin{array}{cccccc} \frac{Al}{3} & \frac{-Sz}{2} & \frac{-Sy}{2} & 0 & \frac{lSy}{12} & \frac{-(lSz)}{12} \\ \frac{-Sz}{2} & \left(\frac{13A}{35} + \frac{6Iz}{5l^2} \right) l & \frac{6Iyz}{5l} & \frac{-7lSy}{20} & \frac{Iyz}{10} & l \left(\frac{-Iz}{10l} - \frac{11Al}{210} \right) \\ \frac{-Sy}{2} & \frac{6Iyz}{5l} & \left(\frac{13A}{35} + \frac{6Iy}{5l^2} \right) l & \frac{7lSz}{20} & l \left(\frac{Iy}{10l} + \frac{11Al}{210} \right) & \frac{-Iyz}{10} \\ 0 & \frac{-7lSy}{20} & \frac{7lSz}{20} & \frac{Iol}{3} & \frac{l^2Sz}{20} & \frac{l^2Sy}{20} \\ \frac{lSy}{12} & \frac{Iyz}{10} & l \left(\frac{Iy}{10l} + \frac{11Al}{210} \right) & \frac{l^2Sz}{20} & l \left(\frac{2Iy}{15} + \frac{Al^2}{105} \right) & \frac{-2Iyzl}{15} \\ \frac{-(lSz)}{12} & l \left(\frac{-Iz}{10l} - \frac{11Al}{210} \right) & \frac{-Iyz}{10} & \frac{l^2Sy}{20} & \frac{-2Iyzl}{15} & l \left(\frac{2Iz}{15} + \frac{Al^2}{105} \right) \end{array}$$

Prethodni izrazi su komplikovaniji ako granice integracije nisu 0 već ξ_1 i ξ_2 (kao relativan polžaj početka i kraja integracije ali se opet mogu naći u zatvorenom obliku. Takav izraz

je korišćen u programu generisan Mathematic-om (file interpolacija-MM.nb) i to pre svega da se odrede matrice masa štapova sa skokovito promenljivim poprečnim preseccima. U tom slučaju matricu masa celokupnog štapa nalazimo kao zbir matrica masa štapova pri čemu su granice integracije za svaki poprečni presek određene delom na kome se nalazi taj poprečni presek (formalno se na svakoj od njih pretpostavlja da je na ostatku masa jednaka 0) . $M = M^1 + M^2 + M^3 + \dots + M^N$

Glava 3

Formiranje objektnog modela

U ovom poglavlju će se prikazati specifičnosti objektno-orijentisanog pristupa toku i načinu rešavanja problema. Analizira se funkcionisanje sistema pri rešavanju lineranog i nelinearnog problema.

Razmatra se rad celokupnog sistema i odredjuju osnovni objekti koje je neophodno formirati. Analiziraju se funkcije i zahtevi koji sistem upućuje objektima grednih elemenata. U toku izvršavanja proračuna, zahtevi sistema su svedeni na svega nekoliko poruka upućenih objektima grednih elemenata

Značajna razlika u odnosu na klasičan pristup modeliranju je u činjenici da se formira decentralizovani sistem u kome se objektima šalju poruke na osnovu kojih oni menjaju svoja stanja (mutiraju) i u skladu sa zahtevom obezbeđuju željenu informaciju (vrednost promenljive, matricu i sl.).

Prednosti objektno orijentisanog pristupa modeliranju dolaze do izražaja u nelinearnim sistemima, jer se u postupku proračuna sistem više puta objaća objektima koji su usled nelinearnosti menjali svoja stanja.

Primena objektno orijentisanog modeliranja na proizvoljnom problemu, obuhvata tri osnovne faze:

1. *Identifikacija* - prepoznavanje osnovnih funkcija koje se očekuju od budućih objekata. U okviru ove faze, treba naglasiti da je tema ovog rada ograničena na modeliranje grednih elemenata i efekata koji se javljaju u sistemu. Otuda, u ovom radu neće biti analiziran sistem u celini, već samo deo koji se odnosi na gredne elemente. Sistem u celini, u zavisnosti od problema može biti linearan ili nelinearan.

Pri linearnom sistemu, od grednih elemenata se očekuje da obezbede svoj doprinos matrici krutosti sistema u celini kao i doprinose opterećenja duž greda, opterećenju čvorova. Sa druge strane, za poznate vrednosti pomeranja čvorova za zadati slučaj opterećenja, od grednog elementa se očekuje nalaženje vrednosti sila u presecima.

Pri nelinearnom sistemu, u zavisnosti od algoritma koji se primenjuje, od grednih elemenata se očekuje da za svoje trenutno stanje, obezbede vrednosti tangenčnih matrica krutosti, za prirast opterećenja ili druge pobude, obezbede prirast rezidualnih sila koje prenose na čvorove kao i da postoji mogućnost da se elementu saopšti da je prirast na ravnotežnom putu.

2. *Apstrakcija budućih objekata u klase*. Ovaj postupak obuhvata prepoznavanje i ustanovljavanje novih objekata. U ovom slučaju, ti objekti su:

- **Greda u prostoru *GLB_Frame*** - objekat koji će obezbedjivati funkcionalnost grednog elementa. U sebi će sadržati informacije o čvorovima, kao i mogućnost transformacije iz lokalnih u globalne koordinate. Kako su u ovom radu prikazana dva načina određivanja matrice krutosti, to će se formirati dva nova tipa objekta (dve nove klase) izvedene iz Grede u prostoru:
 - *Frame* - greda čija je matrica krutosti izvedena metodom sila. Da bi se proverile mogućnosti, predviđeno je da ova greda ima jedan ili više poprečnih preseka duž grede.
 - *Frame_TB* - Greda čija je matrica krutosti izvedena metodom deformacija. Zbog diskusije koja je pratila problem 'shear lock' inga i jedne integracione tačke, ova greda će imati jedan poprečni presek. Kao što je u diskusiji prikazano, ovakva greda daje zadovoljavajuće rezultate ako je relativno kratka, te se koncentracija opterećenja koje deluje duž grede u čvorove može smatrati korektnom.
- *Poprečni presek* Ovaj objekat treba da obezbedi veze između statičkih i deformacijskih karakteristika, odnosno da obezbedi matrice krutosti i fleksibilnosti poprečnog preseka. Pri tome, za potrebe nelinearne analize, objekat mora da prati svoja stanja deformacija (da u svakom trenutku može da obezbedi informaciju o trenutnoj vrednosti deformacije ili sila), i da za zadatu probnu vrednost deformacija, obezbedi odgovarajuću vrednost presečnih sila. Uočava se da se objekat poprečnog preseka sastoji od jednog ili više oblika i odgovarajućeg materijala.
- *Oblik poprečnog preseka*-obezbedjuje geometrijske karakteristike dela poprečnog preseka.
- *Materijal* - objekat koji obezbedjuje informaciju o karakteristikama materijala. To su tangenčna krutost, trenutna vrednost dilatacija, trenutna vrednost napona i za probne vrednosti dilatacija odgovarajuće vrednosti napona.

- *Slučaj opterećenja* - objekat koji nije direktno vezan sa elementom grede, ali u sebi mora sadržati informacije o opterećenjima grednih elemenata.
- *Opterećenje elementa*-objekat koji sadrži informacije o tipu i intenzitetu oprerećenja.

Postojeći objekti koji moraju egzistirati nezavisno od grednih elemenata su:

- Sistem - ima funkciju da u sebi sadrži sve elemente od kojih se sastoji (ima funkciju *Domain*-a [21]), u sebi sadrži i *SkyMatrixSys* klasu. Najpre je razvijen u linearni sistem u obliku klase *StructSyst*, koji je kasnije evoluirao u nelinearni sistem izvođenjem u klasu *StagedStructSyst*.
- Nod - čvor sistema - U sebi sadrži položaj u preostoru, brojeve stepeni slobode i informaciju o sprečenim pomeranjima. Kada se reši sistem jednačina, čvor će čuvati i podatke o pomeranju za odgovarajući stepen slobode pri odgovarajućem slučaju opterećenja.
- NodeLoad - opterećenje čvora sistema.
- SkyMatrixSys - klasa koja obezbedjuje rešavanje sistema jednačina.

U ovom tekstu su navedene osnovne klase, bez kojih se ne bi mogla vršiti dalja analiza, ali treba napomenuti da je linearan sistem, od kojeg se krenulo u razvoj *StructSys*, razvijan više od 7 godina u okviru razvoja i testiranja elemenata za programski paket Tower, mada su u programu Tower, preuzeti i delom modifikovani samo konačni elementi.

3. Realizacija - utvrdjivanje funkcija (*interface-a*) kojim će se vršiti komunikacija izmedju klasa u toku proračuna. U ovom poglavlju će se prikazati poruke koje će sistem upućivati najvišim klasama - u ovom slučaju elementima štapova, kao i tok poruka koje štapovi prosledjuju presecima.

3.1 Linearan sistem

Tok poruka kojim linearan sistem komunicira sa svojim komponentama je prilično jednostavom. Celokupni program se sastoji iz instrukcija:

```
int main(int argc, char* argv[ ])
{
    StructSystem *pStructSystem0=new StructSystem;
    // Ovde se jednom inicijalizuje da moze da radi
    string FileName;
    cerr << "LINEAR SYST: << endl << "input File NAME ";
    cin >> FileName;
    pStructSystem0->ReadFromFile(FileName);
    pStructSystem0->MakeStiffMat(true);
    pStructSystem0->SolveSys();
    cout << pStructSystem0->OutFormatString();
    return 0;
}
```

Uočavamo da je formiran objekat *StructSystem*-a, i učitani ulazni fajl i na kraju u skladu sa instrukcijama ulaznog fajla, vrši se ispis na standardni output. Od interesa za izvršenje programa su dve funkcije sistema : *MakeStiffMat()* i *SolveSys()*.

3.1.1 Kreiranje sistema

Poziv funkcije *MakeStiffMat()* , vrši operacije neophodne za formiranje matrice krutosti. Deo tih instrukcija nije vezan sa temom ovog doktorata. One obuhvataju numeraciju stepena slobode po čvorovima, formiranje buduće sky-matrice. Od interesa za analizu grednih elemenata su instrukcije koje se ponavljaju po svim grednim elementima i presdavaju određivanje matrice krutosti štapa i vektora ekvivalentnog opterećenja za sve slučajeve opterećenja sistema. U sklopu ovih instrukcija u okviru ciklusa po svim štapovima, pozivaju se sledeće instrukcije:

```
matrix_m A2=pFr->GetMatrixA_Glob(); // matrica transformacije
matrix_m Ko=pFr->GetLocalMatrixE_Rel(); // nalazi lokalnu matricu štapa
matrix_m At2=A2.transpose();
matrix_m Ktmp =At2* Ko;
matrix_m K=Ktmp*A2;
```

Navedeni set instrukcija formira matricu krutosti u globalnom koordinatnom sistemu, da bi potom, odgovarajući članovi bili dodati globalnom sistemu jednačina.

Kasnije ista funkcija u okviru svakog štapa, formira ciklus po svim slučajevima opterećenja i u okviru njega, za štap poziva sledeće instrukcije:

```
matrix_m endLoadVec=pFr->CreateEndLoadVector4LC(LCNam,40);
matrix_m FqGlob=At2*endLoadVec;
```

da bi komponente vektora čvornog opterećenja sumirala u odgovarajućoj vrsti slobodnih članova sistema jednačina.

3.1.2 Rešavanje sistema

Poziv funkcije *SolveSys()* inicira rešavanje sistema. A po uspešnom rešavanju, u ciklusu, za svaki gredni element, se poziva funkcija kojom se postavljaju vrednosti sila:

```
pFr->CreateEndLoadVector4LC(LCNam,40);
```

Prema napred izloženom, u linearnom sistemu, grednom elementu su potrebne 4 funkcije. Dve od njih, na zahtev sistema, vraćaju matrice (*GetMatrixA_Glob()* i *GetLocalMatrixE_Rel()*), jedna vraća vektor: *CreateEndLoadVector4LC(LCNam,40)* a jedna postavlja sile kad su već sračunata pomeranja: *CreateEndLoadVector4LC(LCNam,40)*.

3.2 Nelinearan sistem

Za razliku od linearnog sistema, kod nelinearnog sistema, tok i postupak proračuna je je daleko složeniji. Uočava se nekoliko osnovnih zahteva sistema u odnosu na element štapa.

U nelinearnom sistemu, tokom proračuna, u celini, dolazi do promena stanja. Pri tome se pri rešavanju sistema (od jedne faze do druge) primenjuje inkremenatalan ili inkrementalno

iterativan postupak. Najšire primenjivani su Newton-Raphson-ov metod i metoda 'početnog napona', odnosno njihove modifikacija. U okviru primene ovih postupaka, sistem prolazi kroz niz probnih ('trial') i utvrđenih ('committed') stanja. Poruke koje se šalju elementima i odgovori koje elementi daju su predmet ovog poglavlja. Za razliku od ([21]), umesto klase *Integrator* odavde će se postupak sprovoditi jednom od funkcija nelinearnog sistema.

3.2.1 Tok proračuna u okviru faze

U okviru svakog inkrementa (promene faze), obavlja se isti niz funkcija:

```
for ( int incNumb=0 ; incNumb < nOfSteps ; incNumb++ ){
  LamdaStage=(incNumb+1)*DLamdaStage; //poveca parametar opterecenja faze
  setStageLamdaRES_Displ(); // Postavi pomeranje oslnaca
  setFrameEndTrialDisp(); // to pomeranje saopsti stapovima
  int nIt= 1; //Broj iteracije u okviru inkrementa
  do{
    createTangent(); // Kreira tangentnu matricu krutosti
    addFrameResidual(); // Odredjuje doprinose stapova silama u cvorovima
    setNodeLoad(); // Nanosi opterecenje cvorova
    norm2= pSkyMatrix->getFreeVect2Norm(1) ; // kontrolise normu-sumu.kvadr.slob.cl.
    if (norm2< TOL || nIt> maxIterations )
      break; // napusta iterativni postupak
    pSkyMatrix->SolveSysOfEq(); // resava sistem jednačina
    incrementNodeDispl(); // preuzima pomeranja cvorova iz sistema
    // i saopstava ga cvorovima
    setFrameEndTrialDisp(); // svim stapovima zadaje pomeranje krajeva koje imaju cvorovi
    nIt++; // povecava broj iteracije u okviru inkrementa
  }while(1); // stalno dok se ne ispuni da je norma manja od tol. ili max br. iter
  errDrift+=norm2; //
  commit(); // da utvrđuje stanje
}
```

Funkcije izloženog postupka se, obraćaju grednim elementima i dolazi do poziva funkcija:

- *getTangent()* - funkcija odredjuje i vraća tangentnu matricu krutosti u globalnom koordinatnom sistemu za trenutne (trial) vrednosti svog stanja. Ova funkcija je pozvana od strane *createTangent()*.
- *addFrameResidual()* - funkcija vraća vektor rezidualnih sila na krajevima štapa koji je u skladu sa trenutnim nivoom opterećenja štapa (koji je kontrolisan od strane sistema parametrom) i trenutnim stanjem štapa (stanjem poprečnih preseka).
- *setTrialNodeDisp(double * DN_i, double *DN_j)* - funkcija koja postavlja - koriguje tekuće probno stanje, zadavanjem probnih vrednosti pomeranja čvorova.
- *commit()* - funkcija koja utvrđuje trenutno stanje.
- *setTime(double T)* - Funkcija koja je prilagodjena postavljanju vremena i mora postojati pri analizi viskoznih deformacija. U početku su ulagani naponi i pokušaji da se ona izmesti i izvrši u okviru funkcije *getFrameResidual()*, koji odredjuje rezidualno opterećenje

za spoljašne efekte, nisu mogli biti realizovani kod elemenata izvedenih metodom fleksibilnosti.

Pored navedenih osnovnih funkcija, u programu postoji još funkcija grednih elemenata koje su neophodne u procesu formiranja ili prikazivanju rezultata same grede (ulaznoizlaznog interface-a). Može se uočiti da je niz instrukcija u linearnom sistemu, praktično ekvivalentan funkciji *getTangent()* u nelinearnom sistemu. To je iz razloga što je nelinearan sistem razvijen nakonadno, dok je linearni sistem razvijen u toku razvoja numeričkog dela paketa *TOWER* i sam proces formiranja matrice krutosti sem linijskih elemenata, sadrži i površinske elemente koji u okviru ove teze nisu unapredjivani za potrebe nelinearne analize. Da bi se izbegla izmena *MakeStiffMat()* funkcije linearnog sistema, ostavljen je navedeni deo koda, koji nije od interesa za ovu temu.

Glava 4

Objekat grednog elementa

U ovom poglavju je analiziran objekat grednog elementa. U osnovi, razvijen je objekat grednog elementa u prostoru i dva njegova specifična oblika, vezana za način izvodjena matrice krutosti i određivanje rezidualnih uticaja: jedan izveden metodom sila i drugi izveden metodom deformacija.

U odnosu na sistem čiji su članovi, oba elementa su specijalni slučajevi prostornog grednog elementa i iskazuju isto ponašanje. Ali u je njihovo unutrašnje ponašanje (način na koji oni obezbeđuju svoj odgovor sistemu) značajno različito. Te razike su izražene pri nelinearnoj analizi.

U ovom poglavju su izdvojeni osnovni zahtevi sistema od grednog elementa, funkcije kojima će on odgovoriti na te zahteve i način na koji će on menjati svoja unutrašnja stanja.

Primer zadavanja protoka vremena kao pobude može ilustrovati stepen razlike u odnosu na uobičajeni proceduralni pristup. Ovaj slučaj pobude je primenjen i u elementu izvedenom metodom deformacije i metodom sila. Mada je unutar elementa značajno drugačiji tok određivanja uticaja, krajnji rezultat je isti.

Analiza na kojoj se zasniva model grednog elementa ima korene u analizi ponašanja sistema. U okviru analize sistema, identifikovane su ukupno četiri funkcije koje će biti inicirane od strane sistema. U okviru tih funkcija, elementi grede će menjati svoja stanja i vraćati informacije o svom doprinosu krutosti celog sistema odnosno prenosu rezidualnog opterećenja na osnovne nepoznate.

Pri formiranju grednog elementa, određene funkcije su nezavisne od načina koji je primenjen pri izvodjenju izraza matrice krutosti. Naime, svi gredni elementi imaju po dva čvora, svakom grednom elementu je potrebno obezbediti matrice transformacije iz lokalnog u globalni koordinatni sistem i svi gredni elementi imaju iste informacije o eventualno oslobodjenim vezama. Zbog toga će se formirati globalni gredni element *GLB_Frame*, sa zadatkom da obezbedi funkcionalnost prelaza iz lokalnog u globalni koordinatni sistem, dok će se kao njegovi specijalni slučajevi javljati različiti elementi - izvedeni u lokalnom koordinatnom sistemu. U ovom elementu će se naći i jedinični vektori u pravcu referentnih osa, u obliku matrice transformacije.

Da bi element mogao da pristupi čvorovima (da obezbedi koordinate, sazna sracunata pomeranja i sl.) mora imati adrese objekata čvorova koji se nalaze na njegovim krajevima. Da bi element grede mogao da pristupani opterećenju (pri genrisanju rezidualnih uticaja), objekat ovog štapa ima adresu sistema kome pripada.

Stanja elementa *GLB_Frame*

Stanja elementa *GLB_Frame*, jednoznačno određuju njegovo ponašanje. To su:

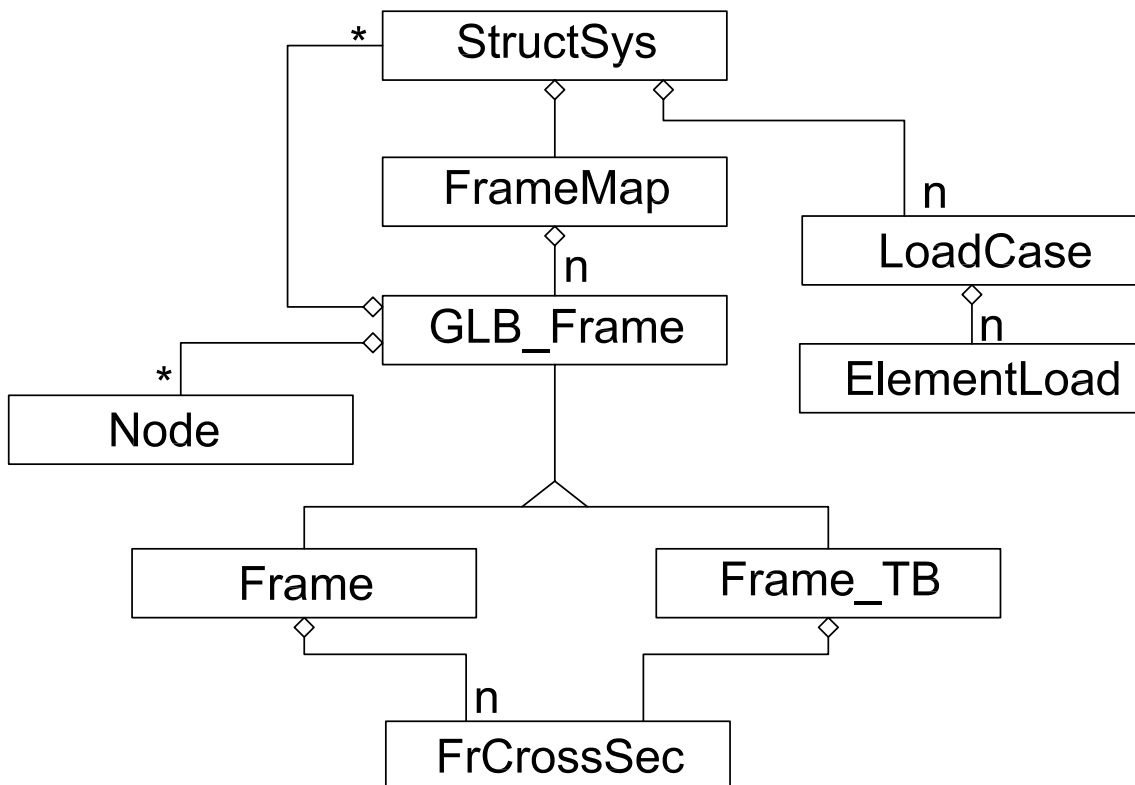
- *Čvorovi* Element štapa mora imati adrese (pointere) na čvorove koji su na njegovom kraju.
- Sistem čiji je član Element mora imati adresu sistema čiji je član i
- lokalne ose Gredni element mora posedovati matricu koordinatne transformacije (matrica tri jedinična vektora od kojih je prvi, jedinični vektor u pravcu ose štapa, dok su druga dva u pravcima lokalnih osa).

Na slici 4.1 dat je prikaz osnovnih relacija klasa, na kojima je određeno ponašanje *GLB_Frame* i model koji je razvijen na nivou linearne analize.

Isti model je evoluirao za potrebe nelinearne analize, utoliko što su samim elementima štapova dodate nove funkcije, a umesto poprečnog preseka koji je iskazivao elastično ponašanje, korišćen je njegov specijalni oblik - koji iskazuje neelastično ponašanje.

4.1 Element izveden metodom deformacije

Formiranje objekta grede, u kome su izrazi za članove matrice krutosti izvedenih primenom metode deformacije (2.32) i (2.38), dovelo je do objekta *Frame_TB*. Kao što je u diskusiji oko karakteristika ove matrice krutosti zaključeno, ovaj element će imati samo jedan poprečni presek. U geometrijskom smislu on će biti lociran na mestu tačke numeričke integracije (na polovini štapa). Funkcije ovog elementa su određene zahtevima sistema. Kao što je već uočeno, odgovarajući na poruke sistema, štapa treba da obezbedi:



Slika 4.1: Objektni model štapa - na nivou linearnog sistema

1. **Matricu krutosti štapa:** - primenom izraza (2.32) i (2.38) i njihovom modifikacijom u zavisnosti od oslobodjenih veza (2.69), za to mu je potrebna samo dužina štapa i tangenta matrica krutosti poprečnog preseka. Zbog toga, poprečni presek mora da obezbedi matricu krutosti preseka kao odgovor na poruku:

pCS->get_matrix_KM_sec(k).

2. **Vektor čvornog opterećenja:** Prema sistemu koji mu se obraća, ova funkcija će vratiti jedan vektor, ali da bi odredila taj vektor, mora da se od objekta *slučaja opterećenja* dobije informaciju o intenzitetima sila na mestu poprečnog preseka i od objekta *poprečni presek* informaciju o krutosti preseka na osnovu koje sračunava deformaciju preseka. Integracijom te deformacije nalazi deformacije krajeva, množenjem tih vrednosti sa matricom krutosti, nalazi 'reakcije sprečenih pomeranja' koje sabira sa reakcijama u osnovnom sistemu.

U nelinearnom postupku, od elementa se očekuje donekle izmenjeno ponašanje:

1. **Tangentnu matricu krutosti štapa:** - primenom izraza (2.32) i (2.38) i njihovom modifikacijom u zavisnosti od oslobodjenih veza (2.69), za to mu je potrebna samo dužina štapa i tangenta matrica krutosti poprečnog preseka. Zbog toga, poprečni presek mora da obezbedi matricu krutosti preseka kao odgovor na poruku:

pCS->get_matrix_KM_sec(k).

2. **Postavlja probno stanje:** U nelinearnom postupku, osnovne nepoznate- pomeranja čvorova se saopštavaju štapu, kako bi on postavio svoje ' probno stanje '. Na osnovu tih pomeranja, u ovoj metodi, koristeći interpolacione funkcije (izraz 2.37) šalje poprečnom preseku poruku *setTrialStrain()* i postavlja poprečnom preseku probno stanje deformacija.
3. **Vektor rezidualnog opterećenja** Ova funkcija se primenjuje u nelinearnom postupku. Pri tome se odgovor daje na osnovu vrednosti statičih uticaja u presecima (pozivom *getStress()*) i sumiranjem sa doprinosom opterećenja. (ukoliko postoji).
4. **Utvrđivanje probnog stanja:** Pri završenim iteracijama, pre novog inkrementiranja nivoa opterećenja, mora se objektu saopštiti da je trenutno stanje jedno od stanja na ravnotežnom putu. To se obavlja porukom *commit()*.

Zahtevi (poruke) koje ova klasa šalje elementima sistema su:

Poprečnom preseku:

get_matrix_KM_sec(k) -za matricom krutosti preseka
setTrialStrain() - postavlja vrednosti dilatacija
getStress() - traži trenutnu vrednosti sila u preseku
commit() - utvrđuje trenutnu vrednost (konstatuje da je na putanji rešenja)
setTime()

Sistemu čiji je član:

getStageID()
getLamdaStage()
getElementLoadPP

Opterećenju elementa:

getForceVectorAt()

Stanja elementa

Stanja ili promenljive elementa, je skup podataka ili objekata koje sadrži element, koji jednoznačno odredjuju ponašanje elementa. U ovom slučaju to je stanje poprečnog preseka. Da bi se uštedelo vreme pri sračunavanju koeficijenata matrice krutosti, objekat će u sebi sadržati i matricu krutosti (dimenzija 12×12), ali i bool - podatak da li je matrica krutosti sračunata. Pri zahtevu za matricom krutosti, proverice se da li ona postoji i ako postoji, vratiće se već postojeća matrica. Ukoliko ne postoji, sračunaće se i sačuvati za buduću upotrebu lokalna matrica krutosti. Pri nelinearnim postupcima, po utvrđivanju stanja (po pozivu komande *commit()*), štap ce poništiti podatak o postojanju matrice krutosti, kako bi se ona ponovo sračunala, sada za novo stanje (novu krutost preseka).

4.2 Element izveden metodom fleksibilnosti

Formiranje objekta grede, izvedenih metodom fleksibilnosti (2.56) i (2.58), odnosno primenom štapa sa više segmenata dovelo je do objekta *Frame*.

Za razliku od grednog elementa *Frame_TB*, ovaj element će moći da ima jedan ili više poprečnih preseka.

U slučaju linearne analize, na osnovu matrice fleksibilnosti preseka, upotrebom izraza (2.56), element je u stanju da obezbedi analitički integrisane vrednosti članova matrice fleksibilnosti za štap konstantnih karakteriska poprečnog preseka. U slučajevima kad se presek štapa skokovito menja, upotrebom (2.71), određivaće se doprinos svakog dela štapa deformacijama krajeva (članovima matrice fleksibilnosti), da bi se sumiranjem tih matrica, dobila matrica fleksibilnosti celog štapa čiji su članovi integrisani i sumirani analitičkim izrazima.

Pri nelinearnoj analizi, tangentna matrica fleksibilnosti štapa, će se određivati na osnovu tangentnih matrica fleksibilnosti preseka. Kako je stanja preseka a time i matrice fleksibilnosti preseka moguće obezbediti u diskretnim tačkama, to se mora usvojiti određena pretpostavka o načinu promene tih karakteristika duž štapa, na osnovu vrednosti na referentnim mestima. Isti problem se javlja i kod integracije vektora ekvivalentnog opterećenja ili rezidualnog opterećenja. Zbog nemogućnosti da se u ovom slučaju odrede analitički izrazi, usvojena je pretpostavka da je stanje celog dela štapa homogeno. To znači da su karakteristike (fleksibilnost i deformacija preseka) na celom delu štapa određeni karakteristikom referentnog poprečnog preseka za taj deo. Zbog toga se primenjuje modifikovani izrazi za članove matrice fleksibilnosti (2.58).

Funkcije ovog elementa su određene zahtevima sistema. Kao što je već uočeno, odgovarajući na poruke sistema, štap treba da obezbedi:

1. **Matricu krutosti:** U zavisnosti od broja preseka, primenom izraza (2.56) i (2.58), najpre interno određuje matricu fleksibilnosti. Za to mu je potrebna samo dužina štapa i tangentna matrica fleksibilnosti poprečnog preseka, odnosno dužine segmenata u slučaju štapa sa više poprečnih preseka. Od svakog od poprečnih preseka, očekuje se matrica fleksibilnosti kao odgovor na poruku `pCS->get_matrix_C_sec(C)`. Inverzijom matrice fleksibilnosti, transformacijama na 12 stepeni slobode, eliminacijom oslobodjenih veza i transformacijom u globalni koordinatni sistem se dobija matrica krutosti.
2. **Vektor čvornog opterećenja:** Prema sistemu koji mu se obraća, ova funkcija će vratiti jedan vektor, ali da bi odredila taj vektor, mora da se od objekta *slučaj opterećenja* dobije informaciju o intenzitetima sila na mestu poprečnog preseka a od objekta *poprečni presek* informaciju o krutosti preseka na osnovu koje sračunava deformaciju preseka. Sam proces integracije deformacije krajeva je obradjen u delu 4.3. Množenjem vrednosti deformacija krajeva sa matricom krutosti, nalazi 'reakcije sprečenih pomeranja' koje sabira sa reakcijama u osnovnom sistemu.

U nelinearnom postupku, ovaj element mora izkazati znatno složenije ponašanje. Informacije koje sistem očekuje od elementa su iste kao da se radilo o svakom drugom elementu (ne zavisno od načina na koji je izveden). Sa druge strane, metodom fleksibilnosti se može određivati samo doprinos u okviru linearnog ponašanja. U ovom slučaju element mora da pamti svoje 'zaostale deformacije' i 'ravnotežne sile' iz prethono utvrđenih stanja na ravnotežnom putu.

Osnovni problem je uzrokovan činjenicom da je za trenutno stanje dilatacije, za svaku vrednost prirasta dilatacije, moguće dobiti prirast napona, ali obrnuto nije. Nije moguće za svaku vrednost napona zadati prirast napona i dobiti odgovarajući prirast dilatacije. Dovoljno je posmatrati elasto-plastični materijal, kome je moguće zadati proizvolju vrednost dilatacije, ali nije moguće kao pobudu zadati vrednos napona iznad granične vrednosti. Otuda su materijali, a time i poprečni preseki ograničeni na poruke kojima se može zadati probna vrednost deformacije, dobiti tangenta vrednost krutosti i dobiti vrednost sila ali obrnuti postupak nije uvek moguć.

U nelinearnoj analizi, od elementa *Frame* se očekuje da obezbedi:

1. **Tangentnu matricu krutosti:** Za trenutno stanje, u zavisnosti od broja preseka, primenom izraza (2.56) i (2.58), najpre interno određuje matricu fleksibilnosti. Za to mu je potrebna samo dužina štapa i tangentna matrica fleksibilnosti poprečnog preseka, odnosno dužine segmenata u slučaju štapa sa više poprečnih preseka. Od svakog od poprečnih preseka, očekuje se matrica fleksibilnosti kao odgovor na poruku $pCS \rightarrow get_matrix_C_sec(C)$. Inverzijom matrice fleksibilnosti, transformacijama na 12 stepeni slobode, eliminacijom oslobodjenih veza i transformacijom u globalni koordinatni sistem se dobija matrica krutosti. Ovaj postupak je identičan postupku u linearnom sistemu.
2. **Postavlja probno stanje:** U nelinearnom postupku, osnovne nepoznate-pomeranja čvorova se saopštavaju štapu. Za razliku od metode deformacije, kad se primenom interpolacione funkcije, jednostavno moglo saopštiti stanje probne dilatacije preseka, u metodi fleksibilnosti ne postoje interpolacione funkcije za deformaciju. Otuda se umesto promene deformacija preseka, mora zadati njihov prirast. Prirast deformacija preseka je određen na osnovu prirasta sila na krajevima, prirasta opterećenja duž štapa (ako ga je bilo) i tangente vrednosti matrice fleksibilnosti preseka. Otuda u okviru jednog elementa se mora pratiti stanje deformacija na krajevima (da bi se znao intenzitet prirasta). Algoritam ovog postupka je ukratko prikazan:

$$\{U_{Tri}^o\} = [A2]^T \{U\} \quad (4.1a)$$

$$\{U_{Tri}^{o,CS}\}_6 = \int \epsilon_{CS}^{Tri} dx \quad (4.1b)$$

$$\{\Delta U^o\}_6 = [G]^T \{U_{Tri}^o\} - \{U_{Tri}^{o,CS}\}_6 \quad (4.1c)$$

$$\{\Delta F^o\} = [G] [K_s^o] \{\Delta U^o\}_6 \quad (4.1d)$$

$$\{\Delta F^{\Delta Q}\} = \{F^{\Delta q}\} - \{F_{Def}^{\Delta q}\} \quad (4.1e)$$

$$\{\Delta F^{END}\} = \{\Delta F^o\} + \{\Delta F^{\Delta Q}\} \quad (4.1f)$$

$$\{\Delta F^R(\xi)\} = [N(\xi)] \{\Delta F^{END}\} + \{\Delta F^{\Delta Q}(\xi)\} \quad (4.1g)$$

$$\{\Delta \epsilon_{Elast}^R(\xi)\} = [C^R(\xi)] \{\Delta F^R(\xi)\} \quad (4.1h)$$

$$\{\epsilon^R(\xi)\} = CS \rightarrow getTrialStrain() \quad (4.1i)$$

$$CS \rightarrow setTrialStrain(\{\epsilon^R(\xi)\} + \{\Delta \epsilon_{Elast}^R(\xi)\}) \quad (4.1j)$$

$$\{\Delta F_0^{\Delta q}\} = \{F^{\Delta q}\} \quad (4.1k)$$

Ukratno, u (4.1.a) se pomeranja čvorova prevode u lokalna pomeranja štapa. Zatim, operacijama (4.1.b) sprovodi postupak koji je detaljno opisan u okviru poglavlja 4.9 i 4.6 i kojim se integracijom deformacija preseka, određuje stanje pomeranja krajeva štapa koje odgovara probnim vrednostima deformacija preseka. Prirast pomeranja krajeva čvorova ($\{\Delta U^o\}_6$) određen izrazom (4.1.c) se nalazi kao razlika zadatih pomeranja čvorova i vrednosti dobijenom integracijom. Prirast sila od prirasta pomeranja čvorova se nalazi u (4.1.d), množenjem prirasta pomeranja čvorova sa tangentnom matricom krutosti. Ukoliko postoji prirast opterećenja po štapu ΔQ , on izaziva dodatni prirast reakcija štapa (4.1.e) koji se određuje izrazima (2.68.b i c), pri čemu je deformacija u osnovnom sistemu usled sila određena izrazima (4.7) i (4.6) na osnovu prirasta sila od prirasta opterećenja i tangentnih matrica krutosti preseka. Konačna vrednost prirasta sila na krajevima štapa

$\{\Delta F^{END}\}$ usled prirasta opterećenja i dodatnog pomeranja čvorova je određeno izrazom (4.1.f). Prirast sila na mestu poprečnog preseka $\{\Delta F^R(\xi)\}$, je određen prirastom sila na krajevima i prirastom opterećenja (izraz (4.1.g)). Probna vrednost dilatacije na mestu poprečnog preseka je vektor koji je dobijen od strane poprečnog preseka zahtevom *getTrialStrain()*, dok je prirast elastične deformacije poprečnog preseka određen izrazom (4.1.h). Na kraju se poprečnom preseku zadaje probna vrednost dilatacije jednaka zbiru postojeće probne i elastičnog prirasta (izraz (4.1.j)). Vrednost sila na krajevima usled prirasta opterećenja ($\{F^{\Delta q}\}$) koji se javljaju na 'osnovnom sistemu proste grede', smešta u promenljivu $\{\Delta F_0^{\Delta q}\}$.

3. **Vektor rezidualnog opterećenja:** Ova funkcija se primenjuje u nelinearnom postupku. Slično funkciji *setTrialNodeDisp()*, ova funkcija obavlja znatno složenije operacije na štapu formiranom metodom fleksibilnosti. Ukratko, odgovor štapa na ovu funkciju se svodi **na postavljanje probnog stanja** nakon čega se primenjuju sledeće operacije:

$$\{U_{Tri}^{o,CS}\} = \int \epsilon_{CS}^{Tri} dx \quad (4.2a)$$

$$\{\Delta U_R^o\} = \{U_{Tri}^{o,CS}\} - \{U_{Com}^o\} - \{\Delta U_{NE}^o\} \quad (4.2b)$$

$$\{\Delta F_R^{\Delta U}\} = [K^o] \{\Delta U_R^o\} \quad (4.2c)$$

$$\{\Delta F_R\} = \{\Delta F_0^{\Delta q}\} - \{\Delta F_R^{\Delta U}\} \quad (4.2d)$$

$$\{F_R\} = \{F_R^{Com}\} + \{\Delta F_R\} \quad (4.2e)$$

$$\{F_R^{Glob}\} = [A2]^T \{F_R\} \quad (4.2f)$$

Pri ovome, je najpre u (4.2.a), se integracijom deformacija preseka duž štapa, odredi pomeranje krajeva koje odgovara trenutnom stanju. Sam postupak integracije je prikazan izrazima (4.9) i (4.6). Potom se odredi prirast pomeranja u odnosu na utvrdjenu vrednost $\{U_{Com}^o\}$, umanjenu za intenzitet prirasta neelastičnih deformacija u odnosu na poslednju utvrdjenu vrednost $\{\Delta U_{NE}^o\}$. Prirast rezidualnih sila, koje su posledica prirasta pomeranja čvorova, se određuje u (4.2.c), množenjem prethodno određenog pomeranja sa matricom krstosti, da bi se ukupan prirast rezidualnih uticaja štapa, odredio izrazom (4.2.d) sumiranjem sa prirastom reakcija osnovnog sistema proste grede usled prirasta opterećenja duž štapa (koji je sračunat u okviru *setTrialNodeDisp*, funkcije. Ukupno rezidualni uticaji koje štap prenosi na čvorove su jednaki zbiru prethodnih probnih vrednosti akumuliranih sila i ovog prirasta, kao što je pokazano u (4.2.e). Na kraju, se vrši transformacija u globalni koordinatni sistem i sistemu se isporučuje vrednost rezidualnog opterećenja u globalnom koordinatnom sistemu.

4. **Utvrđivanje probnog stanja:** Pri završenim iteracijama, pre novog inkrementiranja nivoa opterećenja, mora se objektu saopštiti da je trenutno *stanje jedno od stanja na ravnotežnom putu*. To se obavlja porukom *commit()*.

Kako je u ovom elementu, primenjivano elastično ponašanje u iteracijama u okviru jednog inkrementa, dok je sistem u celini nelinearan, to se u samom elementu mora čuvati dovoljno podataka za određivanje prirasta svih potrebnih veličina. Podaci koji moraju biti sračunati u tim iteracijama su:

- (a) **Stanja poprečnih preseka** se čuvaju u objektima poprečnih preseka, od njih se dobija tangenta matrica fleksibilnosti preseka i probna vrednost deformacija preseka.
- (b) $\{U_{Com}^o\}$ - Pomeranja koja su utvrđena u lokalnom koordinatnom sistemu.
- (c) $\{U_{Tri}^o\}$ - Probna vrednost pomeranja u lokalnom koordinatnom sistemu.
- (d) $\{\Delta U_{NE}^o\}$ - Prirast neelastične deformacije u odnosu na poslednje utvrđeno stanje. Ovaj vektor se mora čuvati u slučaju da je kao pobuda u okviru inkrementa, zadata vrednost koja će generisati neelastične deformacije krajeva (na primer protok vremena kod viskoznih materijala).
- (e) $\{F_R^{Com}\}$ - Utvrđena vrednost rezidualnog opterećenja, (akumulirana u prethodnim inkrementima)
- (f) $\{\Delta F_0^{\Delta a}\}$ - vektor prirasta reakcija u osnovnom sistemu u okviru tekuće iteracije. Ova veličina se sračunava pri *setTrialNodeDisp* a koristi i u toj rutini i u *getResidualEndForc*.
- (g) $\{\Delta F_R\}$ vektor prirasta rezidualnih sila. Ova veličina se mora čuvati jer se u toku iteracija u okviru jednog inkrementa vrednost ovog vektora menja, te je tek po utvrđivanju zadovoljavajućeg stepena ravnoteže u čvorovima, sistem će poslati poruku *commit* i tek će se tada primeniti izraz (4.3.b), kojim se vrednosti rezidualnih sila sumirati.

Pozivom funkcije *commit* svim poprečnim presecima se prosledi ista poruka (4.3.a) (i oni utvrde svoju vrednost), a potom će ' tekuće ' probne vrednosti postati utvrđene (4.3.b), odnosno rezidualne sile inkrementirane (4.3.c) a privremene vrednosti inkrementa poništene (4.3.d) i (4.3.e).

$$CS \rightarrow commit() \quad (4.3a)$$

$$\{U_{Com}^o\} = \{U_{Tri}^o\} \quad (4.3b)$$

$$\{F_R^{Com}\} = \{F_R^{Com}\} + \{\Delta F_R\} \quad (4.3c)$$

$$\{\Delta U_{NE}^o\} = \{0\} \quad (4.3d)$$

$$\{\Delta F_R\} = \{0\} \quad (4.3e)$$

5. **Postavljanje vremena**, se obavlja funkcijom kojom se sistem obraća štapi *setTime(double T)*. Za razliku od grednog elementa čiji su članovi matrice krutosti izvedeni metodom deformacije, u ovom slučaju se mora odrediti i prirast neelastične deformacije krajeva štapa (ukoliko do njega dolazi). Odnosno sem poruke kojom se poprečnom preseku zadaje vreme, mora mu se saopštiti da izvrši svoje balansiranje (4.4.a). Usled tog balansiranja, statički uticaji u preseku će ostati nepomenjeni, dok će se izgenerisati neelastična deformacija preseka u celini, koja će biti iskorišćenja za određivanje neelastične deformacije grede (4.4.b) i (4.4.c). Pre postavljanja novog vremena, gredi se mora uputiti poruka *commit*, kako bi neelastična deformacija u tom inkrementu bila jednak razlici između utvrđenih i trenutnih deformacija.

$$CS \rightarrow setTimeAndBalanceForc(T) \quad (4.4a)$$

$$\{U_{Tri}^{o,CS}\} = \int \epsilon_{CS}^{Tri} dx \quad (4.4b)$$

$$\{\Delta U_{NE}^o\} = \{U_{Tri}^{o,CS}\} - \{U_{Com}^o\} \quad (4.4c)$$

Zahtevi (poruke) koje ova klasa šalje elementima sistema su:

Poprečnom preseku:

get_matrix_C_sec(C) -za matricom fleksibilnosti preseka
 getTrialStrain() - očitava vrednosti dilatacija
 setTrialStrain() - postavlja vrednosti dilatacija
 commit() - utvrđuje trenutnu vrednost (konstatuje da je na putanji rešenja)
 setTimeAndBalanceForc(T)

Sistemu čiji je član:

getStageID()
 getLamdaStage()
 getElementLoadPP

Optere cenju elementa:

getForceVectorAt()
 getDefVectorAt()

Objekti od kojih se sastoji ovaj objekat karakterišu moguća unutrašnja stanja koja određuju ponašanje objekta. To je u najvećem delu navedeno u okviru opisa funkcije *setTrialNodeDisp*, te će ovde biti samo rekapitulirano:

1. *ID* identifikator pomoću koga od sistema za određeni slučaj opterećenja dobija objekat opterećenja.
2. *CS* - Poprečni preseki duž štapa. Ovi objekti sadrže svoje funkcije i po potrebi obezbeđuju vrednosti deformacija, sila ili krutosti i fleksibilnosti u preseka.
3. $\{U_{Com}^o\}$ - Pomeranja koja su utvrđena u lokalnom koordinatnom sistemu.
4. $\{U_{Tri}^o\}$ - Probna vrednost pomeranja u lokalnom koordinatnom sistemu.
5. $\{\Delta U_{NE}^o\}$ - Prirast neelastične deformacije u odnosu na poslednje utvrđeno stanje. Ovaj vektor se mora čuvati u slučaju da je kao pobuda u okviru inkrementa, zadata vrednost koja će generisati neelastične deformacije krajeva (na primer protok vremena kod viskoznih materijala).
6. $\{F_R^{Com}\}$ - Utvrđena vrednost rezidualnog opterećenja, (akumulirana u prethodnim inkrementima)
7. $\{\Delta F_0^{\Delta q}\}$ - vektor prirasta reakcija u osnovnom sistemu u okviru tekuće iteracije. Ova veličina se sračunava pri *setTrialNodeDisp* a koristi i u toj rutini i u *getResidualEndForc*.
8. $\{\Delta F_R\}$ vektor prirasta rezidualnih sila.

Pored formalne integracije matrice krutosti, određivanje uticaja opterećenja linijskog elementa na sam element i sistem u celini je direkto zavisno od karakteristika elementa (rasporeda krutosti duž elementa). Otuda je i pri linearnom ponašanju, funkcija integracije ovih uticaja poverena elementu.

U nelinearnoj analizi, statički uticaji koje element prenosi na čvorove (reakcije elementa) se nazivaju rezidualnim uticajima. U slučaju nelinearne analize, i uticaji opterećenja će se takodje određivati (integrirati) kao rezidualni uticaji.

4.3 Slučajevi opterećenja

Pri analizi uticaja, isti strukturalni sistem se izlaže različitim skupovima uticaja koji istovremeno deluju. Uobičajeni naziv za grupu spoljašnjih uticaja koji se analizira je slučaj opterećenja. Treba napomenuti da je pri linearnim analizama, moguće vršiti kombinaciju slučajeva opterećenja, i na taj način nezavisno posmatrati uticaje pojedinih delova opterećenja koja inače istovremeno deluju sa drugim, kako bi se ocenio doprinos svakog pojedinačnog dela.

U nelinearnim analizama, ne postoji mogućnost superpozicije, te se svaki skup opterećenja mora nezavisno analizirati. U ovim sistemima je bitan redosled nanošenja uticaja, te se umesto slučajeva opterećenja u linearnoj analizi, može govoriti o fazama. Svaka faza sistema, predstavlja jedno stanje sa definisanim opterećenjem. Kako redosled faza određuje ponašanje sistema, to je u analizi nelinearnih sistema, iskorišćena mogućnost da se opterećenje svake faze, formalno unosi kao slučaj opterećenja. Redosled faza, odgovara redosledu indeksa slučajeva opterećenja. Parametar intenziteta opterećenja λ po svakoj fazi ima vrednosti od 0 do 1 ($\lambda = 0$ je na početku faze i $\lambda = 1$ na kraju faze). Na taj način je opterećenje u fazi i u funkciji parametra λ određeno izrazom:

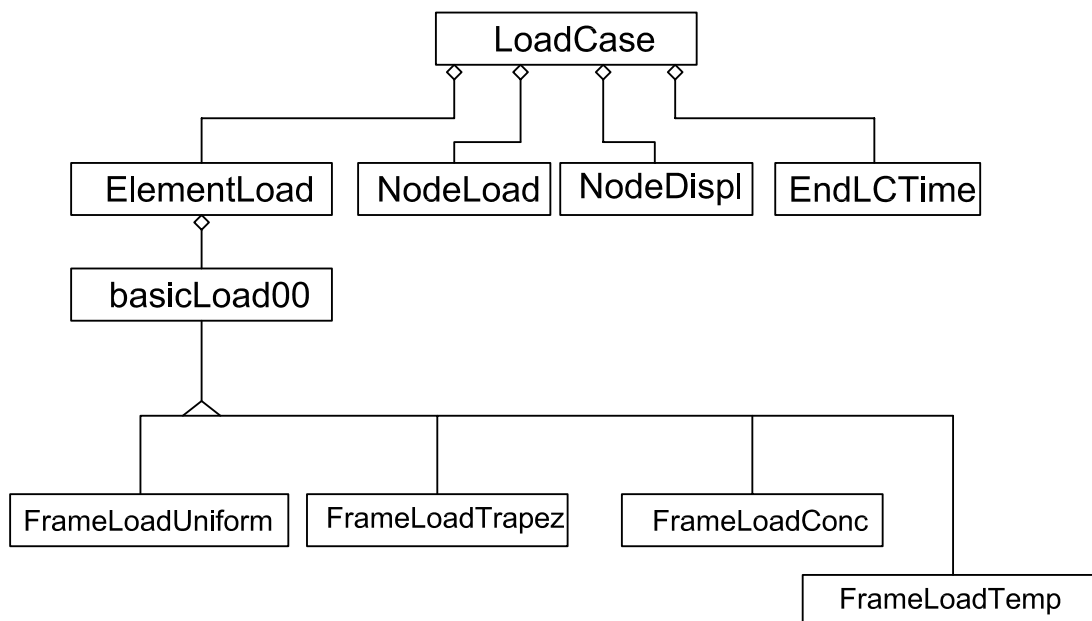
$$q(i, \lambda) = \lambda q_i + (1 - \lambda)q_{i-1}$$

Sistem (ili strukturalni Domen), je zadužen za čuvanje podataka o strukturi a time i o opterećenjima. Jedna od funkcija sistema na zahtev elementa obezbeđuje informaciju o opterećenju elementa (ukoliko postoji), odnosno da vraća informaciju da je element neopterećen. U okviru sistema, se formira slučaj opterećenja (*LoadCase*) kao poseban objekat. On će sadržati listu opterećenja štapova (*ElementLoad*), listu opterećenja čvorova (*NodeLoad*), listu zadatih pomeranja čvorova (*NodeDispl*) kao i podatak o trenutku završetka faze (*EndLCTime*). Taj podatak o trenutku završetka faze je potreban da bi se mogli analizirati efekti vremenskih deformacija.

Grafički prikaz objektnog modela slučaja opterećenja (*LoadCase*) se može videti na skici 4.2. Od interesa za ponašanje štapa je klasa *ElementLoad*, koja će sadržati informaciju o opterećenju konkretnog elementa - grede.

Primena objektno orijentisanog modeliranja na klasu *ElementLoad*, obuhvata tri osnovne faze:

1. **Identifikacija** - prepoznavanje osnovnih funkcija koje se očekuju od budućih objekata ove klase. U prethodno izloženim postupcima, možemo uočiti da je to informacija o intenzitetu presečnih sila na statički određenom osnovnom štapu. Odnosno u slučaju linearne analize i tzv. *deformaciono opterećenje* preseka (efekti temperature i skupljanja t , Δt i ϵ_s). To su informacije koje su štapu potrebne da bi mogao da izvrši integraciju

Slika 4.2: Objektni model *slučaja opterećenja*

ekvivalentnog čvornog ili rezidualnog opterećenja, odnosno da na osnovu prirasta sila uspostavi priraste deformacija na svojim karakterističnim presecima u nelinearnoj analizi.

2. **Apstrakcija** budućih objekata u klase. U ovom slučaju to je uspostavljanje klase *ElementLoad* koja, koristeći osobinu aditivnosti statičkih uticaja, u sebi sadrži niz (ili vektor) *osnovnih opterećenja - basicLoad00* štapa. Kako se ne može unapred utvrditi koliko i kojih sve *osnovnih opterećenja* će se naći na određenom štapu, to se svi oni moraju tretirati na isti način, odnosno sva osnovna opterećenja moraju biti klasa istog tipa. To je u ovom slučaju klasa *basicLoad00*. Specijalni slučajevi te klase, se usvajaju kao izvedene klase, i u ovom slučaju, to su klase *FrameLoadUniform*, *FrameLoadTrapez*, *FrameLoadConc* i klasa koja će biti primenjivana samo u linearnim analizama pri generisanju deformacionog opterećenja *FrameLoadTemp*. Sam naziv svake od ovih klasa govori o kakvom se opterećenju radi. U zavisnosti od konkretne klase, sadržaće različite podatke. Tako će za uniformno opterećenje biti dovoljno poznavati intenzitet opterećenja, pravac (deluje u pravcu lokalne ose x,y ili z) i tip (da li je opterećenje momentima ili silama).
3. **Realizacija** - utvrdjivanje funkcija (*interface-a*) kojim će se vršiti komunikacija između klase u toku proračuna. U odnosu na slučaj opterećenja (*LoadCase*), funkcije koje treba da obezbedi su da vrati adresu objekta (opterećenja štapa ili čvora). To su funkcije:
 - `bool LoadCase::get_ElementLoad_PP(int const iD, element_load ** pp_load)`
 - `bool LoadCase::get_NodeLoad(int const iD, NodeLoad0 * &pLoad)`
 - `double LoadCase::getStageTime()`

Štap će se obratiti sistemu, sa svojim identifikatorom, i dobiti kao informaciju adresu objekta *ElementLoad*-a. Od objekta opterećenja (*ElementLoad*), štap će zatražiti informa-

ciju o intenzitetu vektora presečnih sila na konkretnom preseku, ili o intenzitetu vektora dodatnih deformacija na konkretnom mestu. Otuda svi objekti tipa *ElementLoad*, moraju imati dve funkcije:

- `double * get_forceVector_at(int const NoOfForces, double const at_x, double const L_x)`; Funkcija vraća vektor sila na zadatom preseku, ukoliko je dužina štapa bila L_x .
- `double * get_defVector_at(int const NoOf, double const at_x, double const L_x)`; Funkcija vraća vektor dodatnih - neelastičnih deformacija na zadatom preseku, ukoliko je dužina štapa bila L_x .

A sam objekat će sadržati vektor objekata tipa *basicLoad00* i izvršiti pozivanje iste funkcije po svim opterećenjima štapa i sumiranje uticaja. Na kraju, samom štapu, će biti saopštena vrednost sile na zadatom mestu.

4.4 Integracija deformacije štapa

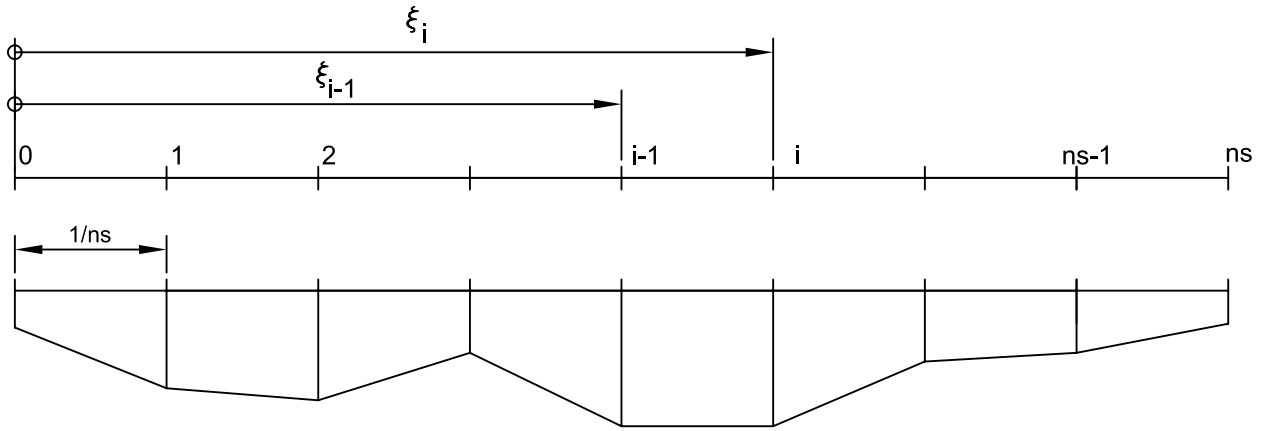
Integracija deformacije štapa, će biti neophodna pri određivanju ekvivalentnog opterećenja u linearnoj analizi odnosno rezidualnog opterećenja u nelinearnoj analizi za štapove izvedene metodom fleksibilnosti. Mada se u oba slučaja radi formalno o sličnom postupku, postoji značajna razlika, jer se u linearnoj analizi koriste samo statičke veličine i krutost preseka. U nelinearnoj analizi se postupak mora sprovoditi za inkrement sila, korišćenjem deformacija preseka, tangente krutosti preseka kao i prirasta neelastične deformacije krajeva štapa ako je do njega došlo.

Pri nelinearnoj analizi, ova integracija mora biti istog kvaliteta kao i integracija članova matrice krutosti, odnosno broj integracionih tačaka mora biti isti. To je u nelinearnoj analizi nametnulo korišćenje matrica manje tačnosti (numerički integrisane) u odnosu na one koje je moguće obezbediti analitičkim izrazima.

4.4.1 Numerička integracija deformacija krajeva u linearnoj analizi

U linearnoj analizi, karakteristike poprečnih preseka ostaju konstantne tokom analize. Sam postupak integracije deformacije, predstavlja numerički postupak integracije izraza (2.40) do (2.44) izraženih u funkciji krutosti preseka i slija koje deluju u preseku. U zavisnosti od argumenta koji je prosledjen funkciji, numerička integracija će se obaviti podelom štapa na ns segmenata, sa $ns + 1$ poprečnih preseka koji su na istom rastojanju uz numeraciju prikazanu na slici 4.3.

U tom slučaju usvaja se pretpostavka o identičnim dužinama segmenata. Za svaki presek, koji je numerisan od 0 do ns , određuje se prirast deformacija preseka na $\{\epsilon_{pres}\}_i$ na osnovu sila u preseku (4.5,b) koje je sračunao objekat *EelementLoad*, dodatne deformacije (deformacionog opterećenja) (4.5,c), koje je takodje obezbedio objekat *ElementLoad*, matrice fleksibilnosti poprečnog preseka (4.5,d) koju je sračunao poprečni presek koji je pozvan funkcijom *get_CSpAt*(ξ). Pozivima sekvenci funkcija (4.5), obezbeđuju se vektori deformacije u presecima duž štapa.



Slika 4.3: Pretpostavljeni oblik promene sila i deformacija duž štapa

$$\xi_i = \frac{i}{ns} \quad (4.5a)$$

$$\{F_{pres}^q\}_i = pLoad \rightarrow get_forceVector_at(6, \xi_i, l) \quad (4.5b)$$

$$\{\epsilon_{defL}\}_i = pLoad \rightarrow get_defVector_at(6, \xi_i, l) \quad (4.5c)$$

$$[C]_i \leftarrow get_CSpAt(\xi) \rightarrow get_matrix_C_sec(C) \quad (4.5d)$$

$$\{\epsilon_{pres}\}_i = [C]_i \{F_{pres}^q\}_i + \{\epsilon_{defL}\}_i \quad (4.5e)$$

Numerička integracija se sprovodi izrazima (4.6). U okviru tih izraza je usvojena pretpostavka o linearnoj promeni svih deformacijskih veličina između preseka, kao što je prikazano na sici 4.3.

$$\varphi_{y(i)}^0 = \varphi_{y(i-1)}^0 - \frac{\kappa_{y(i-1)} + \kappa_{y(i)}}{2} \frac{l}{ns} \quad (4.6a)$$

$$\varphi_{z(i)}^0 = \varphi_{z(i-1)}^0 + \frac{\kappa_{z(i-1)} + \kappa_{z(i)}}{2} \frac{l}{ns} \quad (4.6b)$$

$$W(l) = \frac{\gamma_{xz(0)} + \gamma_{xz(ns)} - \varphi_{y(0)}^0 - \varphi_{y(ns)}^0}{2} \frac{l}{ns} + \sum_{i=1}^{ns-1} \left(\gamma_{xz(i)} - \varphi_{y(i)}^0 \frac{l}{ns} \right) \quad (4.6c)$$

$$V(l) = \frac{\gamma_{xy(0)} + \gamma_{xy(ns)} + \varphi_{z(0)}^0 + \varphi_{z(ns)}^0}{2} \frac{l}{ns} + \sum_{i=1}^{ns-1} \left(\gamma_{xy(i)} + \varphi_{z(i)}^0 \frac{l}{ns} \right) \quad (4.6d)$$

$$\varphi_y(0) = \frac{W(l)}{l} \quad (4.6e)$$

$$\varphi_z(0) = -\frac{V(l)}{l} \quad (4.6f)$$

$$\varphi_y(l) = \frac{W(l)}{l} + \varphi_{y(ns)}^0 \quad (4.6g)$$

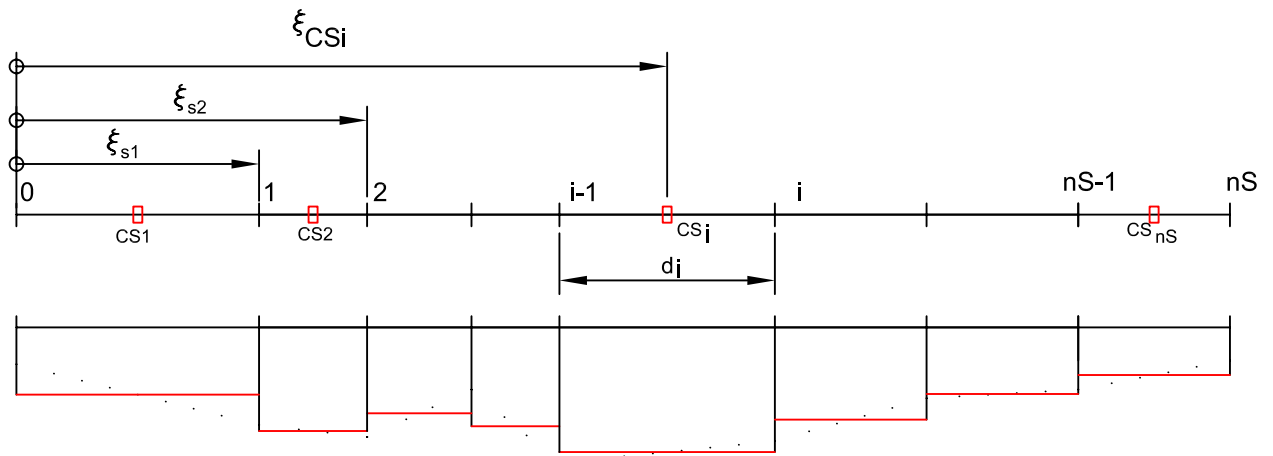
$$\varphi_z(l) = \varphi_{z(ns)}^0 - \frac{V(l)}{l} \quad (4.6h)$$

$$\Delta l = \frac{(\epsilon_{x(0)}^R + \epsilon_{x(ns)}^R) l}{2 ns} + \sum_{i=1}^{ns-1} \left(\epsilon_{x(i)}^R \frac{l}{ns} \right) \quad (4.6i)$$

$$\varphi_x(l) = \frac{(\theta_{x(0)}^R + \theta_{x(ns)}^R) l}{2 ns} + \sum_{i=1}^{ns-1} \left(\theta_{x(i)}^R \frac{l}{ns} \right) \quad (4.6j)$$

4.4.2 Modifikacija numeričke integracije

Pri nelinearnoj analizi, izloženi postupak numeričke integracije nije moguće sprovesti jer se pri nelinearnoj analizi, vrednosti deformacija preseka obezbeđuju od strane objekata poprečnih preseka. Prirasti deformacija krajeva se mogu sračunati kao u prethodnom slučaju, ali sumiranje neće biti korektno, budući da se u osnovi radi o različitim postupcima integracije. Zbog toga je izvršena modifikacija prednog postupka, kako bi se dobile vrednosti deformacija koje će biti istog stepena tačnosti kao kod buduće nelinearne analize. U ovom slučaju, štap se sastoji od određenog broja poprečnih preseka, koji su konstatnih karakteristika u okviru segmenta. Nelinearnost se sadrži u samom objektu materijala, koji je prenosi na poprečni presek a time ceo segment štapa ima iste dilatacije. Na taj način se uvodi pretpostavka da je defomacija dela štapa - segmenta homogena. Zato se modifikacija sastoji u numeričkoj integraciji uz konstantne karakteristike po segmentu, određene za presek na polovini segmenta. Za razliku od prethodnog postupka, u ovom slučaju nije potreban parametar ns jer je on određen brojem poprečnih preseka koji je određen kad je definisan štap. Pri definisanju geometrije štapa, definisano je nCS poprečnih preseka (koji mogu imati iste karakteristike). Svaki poprečni presek CS_i se prostire od ξ_{i-1} do ξ_i , kao što je na slici 4.4 prikazano.



Slika 4.4: Položaj poprečnih preseka i usvojeni oblik promene deformacija duž štapa

Na slici su pravougaonicima prikazani položaji polovine segmenta. To su referentni položaji objekta poprečnog preseka. Usled statičkih uticaja na referentnim položajima, deformiše se poprečni presek a kako je na segmentu stanje deformacija homogeno, to će svaka od komponenti vektora deformacija poprečnog preseka duž segmenta imati konstantne vrednosti.

Izrazi (4.5) se delom menjaju. Tako izrazi (4.5), postaju (4.7). U njima se razlikuje izraz a i e.

$$\xi_i = \frac{\xi_{si} + \xi_{si-1}}{2} \quad (4.7a)$$

$$\{F_{pres}^q\}_i = pLoad- > get_forceVector_at(6, \xi_i, l) \quad (4.7b)$$

$$\{\epsilon_{defL}\}_i = pLoad- > get_defVector_at(6, \xi_i, l) \quad (4.7c)$$

$$[C]_i <= get_CSpAt(\xi) - > get_matrix_C_sec(C) \quad (4.7d)$$

$$\{\epsilon_{pres}\}_i = [C]_i \{F_{pres}^q\}_i + \{\epsilon_{defL}\}_i \quad (4.7e)$$

$$d_i = \xi_{si} - \xi_{si-1} \quad (4.7f)$$

U ovom slučaju, posmatra se deformacija $\varphi_{y(i)}^0$, $\varphi_{z(i)}^0$, W_i^+ i V_i^+ tačaka koje su na kraju segmenta (na spoju segmenta i i $i + 1$). Izrazi (4.6.a) do (4.6.d) se sukcesivno sračunavaju.

$$\varphi_{y(i)}^0 = \varphi_{y(i-1)}^0 - \kappa_{y(i)} d_i \quad (4.8a)$$

$$\varphi_{z(i)}^0 = \varphi_{z(i-1)}^0 + \kappa_{z(i)} d_i \quad (4.8b)$$

$$W_i = W_{i-1} + (\gamma_{xz(i)} - \varphi_{y(i-1)}^0) d_i + \kappa_{y(i)} \frac{d_i^2}{2} \quad (4.8c)$$

$$V_i = V_{i-1} + (\gamma_{xy(i)} + \varphi_{z(i-1)}^0) d_i + \kappa_{z(i)} \frac{d_i^2}{2} \quad (4.8d)$$

$$\varphi_y(0) = \frac{W(l)}{l} \quad (4.8e)$$

$$\varphi_z(0) = -\frac{V(l)}{l} \quad (4.8f)$$

$$\varphi_y(l) = \frac{W(l)}{l} + \varphi_{y(ns)}^0 \quad (4.8g)$$

$$\varphi_z(l) = \varphi_{z(ns)}^0 - \frac{V(l)}{l} \quad (4.8h)$$

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{nCS} (\epsilon_{x(i)}^R d_i) \quad (4.8i)$$

$$\varphi_x(l) = \sum_{i=1}^{nCS} (\theta_{x(i)}^R d_i) \quad (4.8j)$$

4.4.3 Numerička integracija deformacije štapa u nelinearnoj analizi

U nelinearnoj analizi, objekti poprečnih preseka, sadrže u sebi vrednosti deformacija preseka. Za utvrđeno stanje deformacije preseka, deformacija štapa se integriše korišćenjem izraza (4.6). Razlika se javlja u određivanju deformacija preseka, umesto izraza (4.7), u ovom slučaju se koriste (4.9). Na taj način se određuje deformacija krajeva štapa koja odgovara postavljenim probnim vrednostima deformacija preseka $\{U_{Tri}^{o,CS}\}$, koji se koriste u okviru (4.1.b), (4.2.a)

$$\xi_i = \frac{\xi_{si} + \xi_{si-1}}{2} \quad (4.9a)$$

$$\{\epsilon_{pres}\}_i = get_CSpAt(\xi) \rightarrow getStrain() \quad (4.9b)$$

$$d_i = \xi_{si} - \xi_{si-1} \quad (4.9c)$$

U okviru rezimiranja ponašanja grednog elementa, treba napomenuti da se mnogi od navedenih izraza obavljaju u okviru objekta grednog elementa i predstavljaju njegovu 'privatnu' stvar. Korisniku objekta su bitne samo javne funkcije kojima on komunicira sa objektom. U ovom slučaju to je pet funkcija. Ove funkcije su:

1. *getTangent()*;
2. *setTrialNodeDisp(double *, double *)*;
3. *getResidualEndForc(const int ℓ LC, const double lamda, int ns)* ;
4. *CreateEndLoadVector4LC(int const ℓ s, int const ℓ ns)* ;
5. *commit()* ;
6. *setTime(double T)*;

Glava 5

Objekat poprečnog preseka

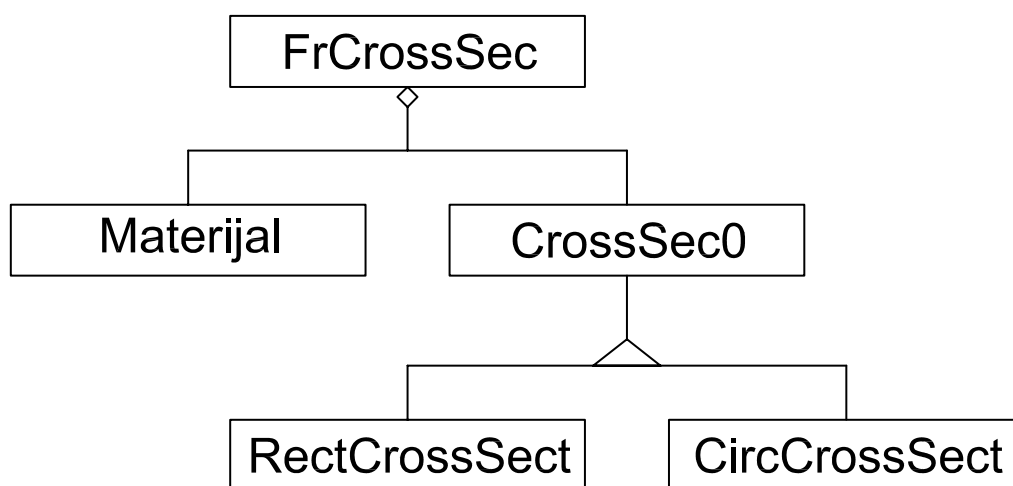
U okviru ovog poglavlja, obradiće se objekat poprečnog preseka. On formira veze generalisanih statičkih i deformacijskih veličina u preseku, prihvata informaciju o probnim vrednostima deformacija i obezbedjuje informaciju o vrednostima sila koje odgovaraju probnim vrednostima deformacija

U okviru opisa linijskih elemenata, izložen je postupak formiranja modela štapa kao i formiranje krutosti preseka, bez ulaženja u način na koji će se relacije između deformacija i sila u preseku obezbediti. U ovom poglavlju će se prikazati postupci za formiranje matrica krutosti i fleksibilnosti preseka.

Osnovne funkcije poprečnog preseka u ovoj analizi je obezbedjivanje odgovora na poruke -zahteve štpa.

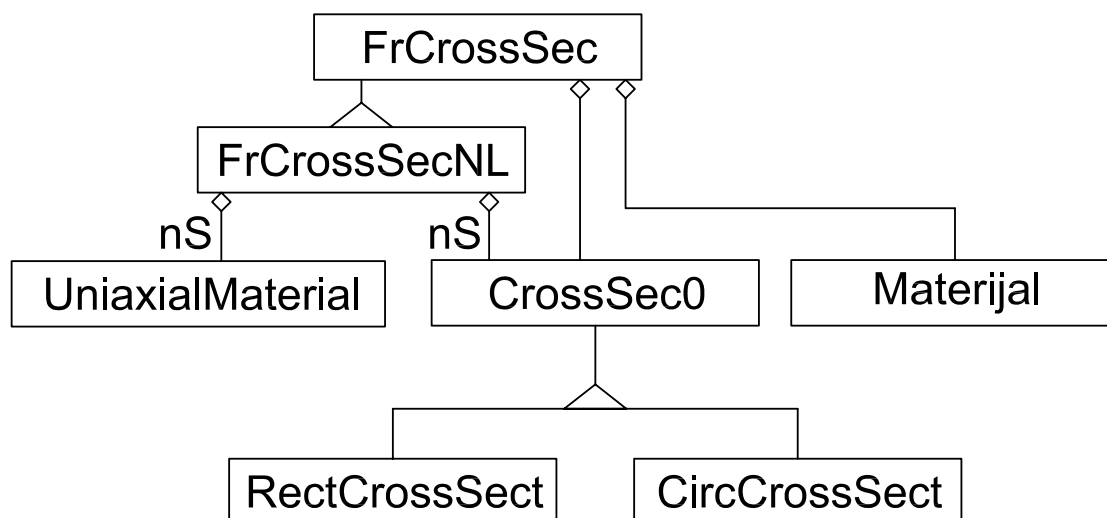
Tok modeliranja i formiranja objektnog modela poprečnog preseka sadrži tri faze:

- **Identifikacija** - prepoznavanje osnovnih funkcija koje se očekuju od budućih objekata ove klase. U prethodno izloženim postupcima, možemo uočiti da je to informacija o tangentnoj matrici krutosti, tangentnoj matrici fleksibilnosti, kao i vrednosti vektora statičkih i deformacijskih veličina u preseku. Poprečni presek takodje treba da obezbedi mogućnost zadavanja 'probnih vrednosti pobude' što su u ovom slučaju deformacije preseka. Pored gore navedenog, u analizi vremenskih deformacija, presek mora da prihvati informaciju o protoku vremena, odnosno da prema potrebi, sam izvrši svoje balansiranje.
- **Apstrakcija** budućih objekata u klase. U zavisnosti od tipa analize, najpre će se formirati najjednostavniji model poprečnog preseka koji će biti u stanju da opiše homogeno ponašanje u linearnoj analizi. Potom će se formirati model proizvoljnog višedelnog poprečnog preseka koji će biti primeren linearnim i nelinearnim modelima sa više materijala u okviru jednog preseka. Objekat poprečnog preseka se u najjednostavnijem slučaju (homogenog preseka) sastoji od objekta *oblika preseka* (*CrossSec0*) i objekta *Materijal*. Specijalni slučajevi oblika poprečnog preseka su 'pravougaoni' i 'kružni' poprečni presek. Ova dva oblika su izvedena iz klase *CrossSec0*. Objektni model klase homogenog poprečnog preseka *FrCrossSec* je prikazan na slici 5.1 .



Slika 5.1: Model homogenog poprečnog preseka

Za opisivanje nelinearnog ponašanja, modeliraće se nova klasa poprečnog preseka *FrCrossSecNL*. Kako je to specijalni slučaj poprečnog preseka, ova klasa će se modelirati kao subklasa klase *FrCrossSec*. Nelinearno ponašanje preseka je u fizičkom smislu, proizašlo iz nelinearnog ponašanja materijala. Otuda će se površina poprečnog preseka podeliti na više delova (slično fiberima, vlaknima ili patch-ovima). U svakom od delova, materijal će biti u homogenom stanju kako bi se mogao dodeliti jedan objekat materijala tom delu. Objektni model nehomogenog poprečnog preseka, prikazan je na slici 5.2 .



Slika 5.2: Model nehomogenog poprečnog preseka

- **Realizacija** - utvdjivanje funkcija (*interface*-a) kojim će se vršiti komunikacija između klasa u toku proračuna. U odnosu na gredni element, ove funkcije su već definisane. Pri integraciji tangenčnih krutosti površine *CrossSec0* moraju preseku obezbediti svoje geometrijske karakteristike u skladu sa zahtevom (od vrednosti površine, preko položaja težišta, do momenata inercije), dok materijali moraju objektu poprečnog preseka obezbediti svoje tangenčne krutosti koje odgovaraju utvrđenom stanju i napone koji odgovaraju trenutnom stanju. Sa druge strane, materijali od sistema dobijaju informaciju o zadatoj probnoj vrednosti dilatacija na osnovu vektora probnih vrednosti defomracija preseka i položaja težišta materijala.

5.1 Geometrijske karakteristike preseka ili dela preseka

Geometrijske karakteristike preseka su poverene klasi *CrossSec0*. Ovakav objekat, na zahtev vraća informaciju o relevantnim geometrijskim karakteristikama potrebnim za određivanje doprinosa vrednostima matrice krutosti i fleksibilnosti preseka. Te funkcije su:

- Funkcije koje obezbedjuju koordinate relevantnih preseka: *get_Yt()*, *get_Zt()*, *get_Ys()*, *get_Zs()*
- Funkcije koje obezbedjuju vrednosti površine i koeficijenta smicanja: *get_A()*, *get_ky()*, *get_kz()*
- Funkcije koje obezbedjuju vrednosti statičkih momenata sračunatih u odnosu na referentnu osu: *get_SyR()*, *get_SzR()*

- Funkcije koje obezbeđuju momente inercije u odnosu na težišne ose: $get_IyT()$, $get_IzT()$, $get_IyzT()$, $get_It()$
- Funkcije koje obezbeđuju vrednosti momenata inercije u odnosu na referentnu osu : $get_IyR()$, $get_IzR()$, $get_IyzR()$

Objekat površine poprečnog preseka *CorssSec0* se ne zadaje preko oblika, već preko karakteristika. Od navadenih funkcija, samo funkcije koje obezbeđuju karakteristike u odnosu na referentne ose vrše proračun, dok ostale samo vraćaju vrednosti lokalnih promenljivih. Specijalni slučajevi oblika poprečnog preseka su dva oblika:

1. Pravougaoni oblik, modeliran objektom *RectCrossSec* kome je dovoljno definisati: visinu h (dimenziju u pravcu lokalne ose 3) i širinu (dimenziju u pravcu lokalne ose 2) a prema potrebi i odsutpanje položaja težista od referente ose (dy i dz). Na osnovu tih podataka, ovaj objekat obezbeđuje sve vrednosti geometrijskih karakteristika.
2. Kružni poprečni presek, kome je dovoljno zadati vrednost poluprečnika i prema potrebi odsutpanje položaja težista od referente ose (dy i dz). Na osnovu tih podataka, ovaj objekat obezbeđuje sve vrednosti geometrijskih karakteristika.

5.2 Materijal

Ovaj objekat je modeliran za potrebe linearne analize. U skladu sa potrebama linearne analize, očekuje se linearno elastičan materijal a za njegovo definisanje je dovoljno uneti: E - moduo elastičnosti, ν - Poasson-ov koeficijent, γ - zapremisku masu, α koeficijent termičke dilatacije.

Pozivima $get_E()$, $get_v()$, $get_G()$, $get_gamma()$ i $get_alpha()$, ovaj objekat obezbeđuje brojne vrednosti : Modula elastičnosti, Poasson-ovog koeficijenta, modula smicanja, zapreminske mase i koeficijenta termičke dilatacije.

Treba napomenuti da je ovaj objekat daleko jednostavniji od objekta *UniaxialMaterial* koji će biti obradjen u sledećoj glavi i koji omogućava modeliranje nelinearnih efekata.

5.3 Homogen poprečni presek

Da bi se odredjeni poprečni presek smatrao homogenim, nužno je da bude na njemu primenjen samo jedan materijal, kao i da karakteristike tog materijala budu konstantne, nezavisno od nivoa opterećenja ili faze proračuna. Na taj način, homogeni poprečni preseki su svedeni na linearno povašanje, mada mogu biti primenjeni i u nelinearnim sistemima za modeliranje elemenata koji će imati linearna svojstva. Materijal koji može biti primenjen u homogenom poprečnom preseku je ograničeni na klasu *Materijal*.

Uprkos svojoj jednostavnosti, homogeni poprečni preseki obezbeđuju potpunu funkcionalnost pri modeliranju greda u oblasti linearne analize kao i kod greda koje treba da iskažu linearno ponašanje u nelinearnoj analizi. Dve kalase *CrossSec0* i *Materijal* obezbeđuju sve neophodne podatke za formiranje odgovora koje pred homogen poprečni presek postavlja sistem.

Poruke koje obezbeđuje ovaj objekat su:

- **Tangentna matrica krutosti preseka:** Obezbedjuje se pozivom funkcije *get_matrix_KM_sec(K)*. Članovi matrice su određeni izrazima (2.26) i modifikovani kako bi matrica bila simetrična (u skladu sa diskusijom sa strane 33) i to je matrica K^{R-} . Ovi članovi zavise samo od geometrijskih karakteristika oblika preseka, modula elastičnosti i modula klizanja materijala.
- **Tangentna matrica fleksibilnosti:** Obezbedjuje se pozivom funkcije *get_matrix_C_sec(C)*. Članovi matrice su određeni izrazima (2.24) i zavise samo od geometrijskih karakteristika oblika preseka, modula elastičnosti i modula klizanja materijala.
- **Postavlja probne vrednosti deformacija preseka.** Obezbedjuje se pozivom *setTrialStrain(matrix_m Eps)* kojim se probne vrednosti dilatacija smeštaju u sam objekat kako bi se u slučaju da se uputi poruka *getStrain()* mogla vratiti, ili u slučaju da se uputi proruka *getStress()* taj vektor mogao pomnožiti sa matricom krutosti poprečnog preseka i takva vrednost vratiti.
- **Obezbedjuje vrednosti postavljene probne dilatacije,** pozivom *getStrain()*
- **Obezbedjuje vrednosti sila u preseku,** pozivom *getStress()*
- Funkcija *setTimeAndBalanceForce(double T)* je dodata ovom objektu da bi takvu poruku on mogao prihvatiti i da bi štap sa homogenim presekom mogao biti primenjen u nelinearnoj vremenskoj analizi. Ali kako linearno elastičan materijal, ne menja svoje stanje usled protoka vremena, to ova funkcija neće uticati na homogeni poprečni presek.
- Funkcija *setTime(double T)* je slično pretnodnoj, dodata ovom objektu da bi takvu poruku on mogao prihvatiti, ali ona ne utiče na promene stanja ili odgovore homogenog poprečnog preseka.

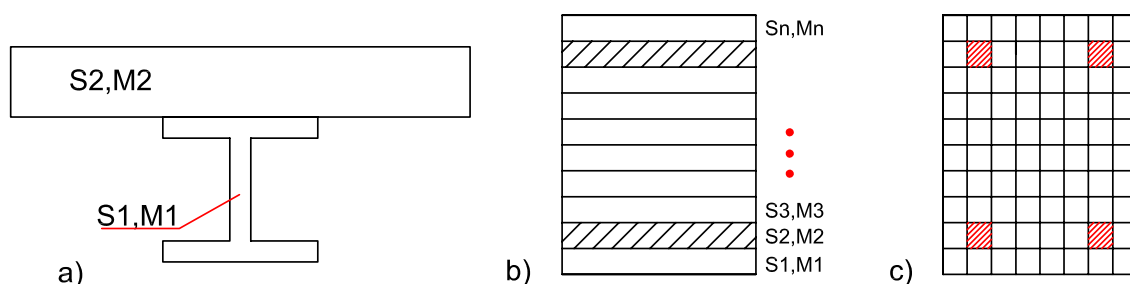
Stanje objekta je određeno sa tri objekta unutar njega, i to su:

1. **CrossSec0** objekat oblika poprečnog preseka
2. **Materijal** objekat materijala
3. **Vektor** probnih vrednosti deformacija (koji se menja pozivom *setTrialStrain(matrix_m Eps)*)

5.4 Višedelni poprečni presek

Nehomogeni poprečni presek se modelira tako što se površina poprečnog preseka podeli na više delova, pri čemu je svaki od tih delova u homogenom stanju. Zbog toga se u ovom radu, umesto izraza nehomogeni poprečni presek, koristi izraz višedelni poprečni presek. U svakom od delova se nalazi po jedan objekat jednoaksijalnog materijala. Ovi delovi imaju funkciju vlakana, fibera ili regiona. Svakom od delova, karakteristike materijala su određene objektom materijala, kome su kao pobuda redom prosledjivane i deformacije težišta tog dela, odnosno vremenski inkrementi celog sistema.

Primeri oblika poprečnih preseka, sa podelom na površine su dati na slici 5.3.



Slika 5.3: Oblici poprečnih preseka i podela na površine

Na slici 5.3.a je prikazan presek koji je podeljen na dve površine. Takva podela je primerena modeliranju spregnutih nosača pri čemu će oba materijala ostati u elastičnoj oblasti a pri tom materijal M2 može iskazati viskozna svojstva i svojstva skupljanja. Taj model ne treba primenjivati u slučaju da se želi modelirati materijalna nelinearnost (elasto-plastično ponašanje čeličnog dela). Naime, kako se karakteristike materijala određuju na osnovu dilatacije u težištu površine, presek će se elastično ponašati sve dok se na mestu težišta ne dostigne dilatacija na granici tečenja.

U slučaju da se želi pratiti oštećenje pri savijanju u jednoj ravni, presek treba modelirati kao na slici 5.3.b. U tom slučaju, presek je podeljen na lamele, i dostizanjem odgovarajuće dilatacije u težištu lamele, materijal u čitavoj lameli menja karakteristike. Ovakav model će sa druge strane biti nepraktičan u slučaju da sve lamele ostanu u linearnoj oblasti a opet neće moći da prikaže efekte oštećenja savijanjem u drugoj ravni.

Model preseka prikazan na slici 5.3.c je model kod koga je presek podeljen na veliki broj površina u oba pravca i može prikazati oštećenje usled kombinacije normalnih sila i momenata savijanja u oba pravca. Mada univezalan, ovakav model u sebi krije veliki broj operacija koje se moraju obaviti pri svakom zahtevu sistema.

Poruke koje će prihvatati objekat višedelnog preseka, su određene zahtevima sistema i to su poruke koje su već navedene kako u okviru modela štapa, tako i u okviru modela homogenog poprečnog preseka.

- **Tangentna matrica krutosti poprečnog preseka.** Obezbedjuje se pozivom funkcije *get_matrix_KM_sec(K)* za sve površine u okviru poprečnog preseka. Članovi matrice svakog dela su određeni izrazima (2.26) i korigovani u znaku članova pete kolone (u skladu sa diskusijom na strani 33). Ovi članovi zavise samo od geometrijskih karakteristika preseka, tangentnog modula elastičnosti i modula klizanja materijala. Tangentne matrice krutosti svih površina poprečnog preseka se sumiraju i dobija se tangenta matrica krutosti celog preseka.
- **Matrica fleksibilnosti preseka** se obezbedjuje istim pozivom kao kod homogenog preseka: *get_matrix_C_sec(C)* ali se ne mogu koristiti izvedeni izrazi za članove matrice fleksibilnosti. U ovom slučaju se najpre mora naći matrica krutosti celog preseka, sumiranjem članova matrica krutosti delova preseka (određenih izrazima (2.26), bez korekcije znaka pete vrste). A potom se inverzijom te matrice, nalazi matrica fleksibilnosti složenog preseka.

- **Postavljanje probne vrednosti deformacija preseka.** Obezbedjuje se pozivom *setTrialStrain(matrix.m Eps)* kojim se probne vrednosti dilatacije svakog dela odredjuju na osnovu dilatacije na mestu težišta tog dela. Tako se izvršavaju (5.1.a) i (5.1.b) po svim površinama. Potom se poziva *getStrain()* koji će sračunati odgovarajuće sile i na kraju vektor probnih dilatacija preseka izjednači sa zadatim.

$$\epsilon_i^R = \epsilon^R + \kappa_y Z_{Ti} - \kappa_z Y_{Ti} \quad (5.1a)$$

$$Mat[i] \rightarrow setTrialStrain(\epsilon_i^R) \quad (5.1b)$$

$$\{\epsilon_{Tri}^R\} = \{\epsilon^R\} \quad (5.1c)$$

- **Obezbedjuje vrednosti postavljene dilatacije,** pozivom *getStrain()*, pri čemu će se vratiti vektor $\{\epsilon_{Tri}^R\}$ koji je postavljen nekom od ranijih poruka.
- **Obezbedjuje vrednost sila u preseku,** pozivom *getStress()*. Ova funkcija po svim površinama, odredi tangetni moduo elastičnosti i smicanja (5.2a i b). Odredi normalni napon u materijalu 5.2.c. Na osnovu napona u materijalu, odredi rezultujuću normalnu silu u delu površine kao i doprinos tog napona momentima savijanja oko y i z ose (5.2d,e i f). Odredi priraste transverzalnih sila i momenta torzije na osnovu tangentnog modula smicanja, prirasta deformacije u odnosu na utvrđeno stanje (5.2g,h i i). Da bi na kraju sumiranjem dobio konačne vrednosti statičkih uticaja.

$$E_i = Mat[i] \rightarrow getTangent() \quad (5.2a)$$

$$G_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu[i])} \quad (5.2b)$$

$$\sigma_i = Mat[i] \rightarrow getStress() \quad (5.2c)$$

$$N_i = \sigma_i A_i \quad (5.2d)$$

$$My_i = \sigma_i S y_i^R + \kappa_y^{Tri} I y_i^C E_i \quad (5.2e)$$

$$Mz_i = -\sigma_i S z_i^R + \kappa_z^{Tri} I z_i^C E_i \quad (5.2f)$$

$$\Delta T y_i = ((\gamma_{xy}^{Tri} - \gamma_{xy}^{Com}) A_i k_{yi} - (\theta_x^{Tri} - \theta_x^{Com}) S z_i^R) G_i \quad (5.2g)$$

$$\Delta T z_i = ((\gamma_{xz}^{Tri} - \gamma_{xz}^{Com}) A_i k_{zi} + (\theta_x^{Tri} - \theta_x^{Com}) S y_i^R) G_i \quad (5.2h)$$

$$\Delta M x_i = ((\gamma_{xy}^{Com} - \gamma_{xy}^{Tri}) S z_i^R + (\gamma_{xz}^{Tri} - \gamma_{xz}^{Com}) S y_i^R + (\theta_x^{Tri} - \theta_x^{Com}) I t_i^R) G_i \quad (5.2i)$$

$$N = \sum N_i \quad (5.2j)$$

$$My = \sum My_i \quad (5.2k)$$

$$Mz = \sum Mz_i \quad (5.2l)$$

$$Ty = Ty^{Com} + \sum (\Delta T y_i) \quad (5.2m)$$

$$Tz = Tz^{Com} + \sum (\Delta T z_i) \quad (5.2n)$$

$$Mx = Mx^{Com} + \sum (\Delta M x_i) \quad (5.2o)$$

$$\{F^{Tri}\} = \{N, Ty, Tz, Mx, My, Mz\}^T \quad (5.2p)$$

- Funkcija *setTime(double T)* prosledjuje vreme materijalima u sivim delovima poprečnog preseka. Ukoliko neki od materijala ima viskozno svojstvo ili osobinu skupljanja, on će na osnovu ove funkcija izmeniti svoje stanje.

- Funkcija *setTimeAndBalanceForce(double T)* dodeljuje svim materijalima u poprečnom preseku vreme a potom izvrši balansiranje deformacija u preseku tako da intenziteti sila ostanu kao pre zadavanja vremena. Na taj način, u preseku nastaje dodatna - neelastična deformacija.

$$\{F^{Tri}\} = getStress() \quad (5.3a)$$

$$\{\epsilon^{Tri}\} = getStrain() \quad (5.3b)$$

$$[C] = get_matrix_C_sec(C) \quad (5.3c)$$

$$setTime(T) \quad (5.3d)$$

$$\{F^{New}\} = getStress() \quad (5.3e)$$

$$\{\Delta F\} = \{F^{New}\} - \{F^{Tri}\} \quad (5.3f)$$

$$\{\epsilon^{New}\} = \{\epsilon^{Tri}\} - [C] \{\Delta F\} \quad (5.3g)$$

$$setTrialStrain(\epsilon^{New}) \quad (5.3h)$$

Izloženi modeli su testirani i potpuno funkcionalni, ali im se može zameriti što su učinjena znatna pojednostavljenja u tretmanu uticaja i deformacija poprečnih sila. U ovom objektnom modelu može se primeniti proizvoljni objekat poprečnog preseka, pod uslovom da može da da odgovor na navedene upite.

Glava 6

Modeliranje ponašanja materijala

U ovom poglavlju će se obraditi modeliranje ponašanja materijala. Uprkos postojanju brojnih složenih materijalnih modela, u ovom radu će se akcenat staviti na specifičnosti modela materijala koje su potrebne za analizu linijskog elementa. Prikazani su osnovni modeli materijala, analizirana je mogućnost njihovog kombinovanja kao i problemi vezani za numeričko modeliranje kombinacija osnovnih modela.

Na kraju su prikazani neki od složenih modela, koji jednoznačno određuju odgovor za zadanu pobudu. Najveći broj ovih objekata modela je preuzet i modifikovan iz OpenSees-a, odnosno FEDEAS-a. U okviru ovog rada razvijen je model linearno elastičnog viskoznog materijala koji simulira CEB-ov odnosno EC2 predlog za određivanje efekata tečenja i skupljanja.

Opisivanje veza između statičkih veličina (napona) i deformacijskih veličina na nivou materijala je povereno konstitutivnim vezama. U zavosnosti od stepena apstrakcije, postoji mnogo načina da se prikažu zavisnosti statičkih i deformacijskih veličina.

Najopštiji pristupi polaze od konstitutivnih modela zasnovanih na principima termodinamike. Nove tehnologije i mogućnosti proračuna razvijaju konstitutivne modele koji omogućavaju analizu efekata plastičnosti, konačnih deformacija, anizotropnog oštećenja i drugih složenih pojava. Ovi modeli se verifikuju na jednostavnim ali trodimenzionim modelima za koje su poznate očekivane vrednosti stanja koja se prate. Složenost modela ilustruje činjenica da je sama integracija nelinearnosti koja proizilazi iz materijalnog modela na jednostavnim konačnim elementima predmet mnogih naučnih radova.

Veze koje se dobijaju omogućavaju razvijanje opštih konstitutivnih modela. Pri opisivanju realnih materijala i različitih nelinearnosti u njima, predlaže se usvajanje odgovarajućih koeficijenata. Matematički modeli omogućavaju modeliranje veza u trodimenzionom naponskom stanju.

Sa stanovišta strukturne analize, materijalni model treba da obezbedi vezu:

$$F(\Delta\sigma, \Delta\epsilon, D, \sigma^{hist}, \epsilon^{hist}, \dots) = 0 \quad (6.1)$$

što znači da na osnovu poznate istorije napona, istorije deformacija, oštećenja, plastičnih deformacija i drugih parametara, za trenurno stanje napona i deformacija na osnovu pretpostavljenog prirasta napona, odredi prirast deformacija, ili da na osnovu pretpostavljenog prirasta deformacija, odredi prirast napona.

Veza (6.1) se linearizuje i za potrebe strukturne analize se svodi na izraz kojim se povezuju prirasti napona i prirasti elastičnih deformacija (6.2):

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl}(D, \Delta\epsilon, \sigma^{hist}, \epsilon^{hist}, \dots)\Delta\epsilon_{kl}^e \quad (6.2a)$$

$$\Delta\epsilon_{ij}^e = K_{ijkl}(D, \Delta\sigma, \sigma^{hist}, \epsilon^{hist}, \dots)\Delta\sigma_{kl} \quad (6.2b)$$

Veza kojom se određuje prirast neelastične deformacije je:

$$\Delta\epsilon_{ij}^n = \Delta\epsilon_{ij}^n(D, \Delta\sigma, \sigma^{hist}, \epsilon^{hist}, \dots) \quad (6.3)$$

U izrazima (6.2) i (6.3), tačkice označavaju proizvoljan broj parametara koji utiču na vezu. Ti parametri su: temperatura, vlažnost, starost, karakteristike materijala i slično.

Izrazi (6.2) i (6.3) se uprkos svojoj opštosti ne mogu koristiti u svim oblastima mehanike, ali je njihova upotreba pri analizi elastičnih, plastičnih i viskoznih efekata zadovoljavajuća.

6.1 Primena u modelu linijskog nosača

Ograničenja koja nameću pretpostavke modela proračuna grednog nosača u mnogome su smanjila potrebu za stepenom apstrakcije kojim se opisuju konstitutivne veze. Redukcija svih karakteristika na liniju, nametnula je pretpostavku ravnog preseka. Pretpostavka ravnog preseka, ograničila je upotrebu materijalnog modela na ravno stanje napona uz ograničenje deformacije preseka kao celine. Sa druge strane, uočava se potreba da materijalni model bude

prilagodjen specifičnim zahtevima, kako bi prikazao složene efekte nelinearnog ponašanja preseka, kao celine.

Ravno i linearno stanje napona su specijalan slučaj prostornog stanja, ali direktna primena materijalnog modela koji izražava prostorno stanje napona, u jednodimenzionalnom naponskom stanju, pri modeliranju ponašanja preseka u celini, nije optimalno rešenje već se moraju vršiti prilagodjavanja.

Da bi se ilustrovao problem, možemo posmatrati armirano betonski presek opterećen na zatezanje. Prirastom intenziteta opterećenja, dolazi najpre do oštećenja zategnutog dela betona, a potom i do formiranja prsline. Pošto je ceo beton u homogenom naponskom stanju, prsline se naglo širi preko celog betonskog dela preseka. Detaljna analiza efekata bi konstatovala da je na mestu preseka napon u betonu u pravcu ose štapa jednak nuli, dok se statički uticaj prenosi preko armature. Presek u kome se javila prsline je u odnosu na osu štapa beskonačno kratak deo i umesto analize samog preseka, mora se analizirati deo štapa neposredno ispred i iza preseka (zona oko preseka) a navedeni efekti ' razmazati '. Pri tome bi se moralo konstatovati da se u presecima ispred i iza prsline smičućim naponima prenose uticaji sa zategnute armature na beton, kao i da dolazi do formiranja i propagacije prsline koja odvaja beton od armature. Posmatranjem samo kombinacije jednoosnog naprezanja betona i armature, bi se medjutim dobile veze izmedju sila i izduženja koja ne bi obuhvatila efekte sadejstva betona i armature. Jasno bi se javio skok u deformaciji štapa i pad aksijalne krutosti štapa kao celine. To ponašanje medjutim nije realno (zbog navedenih uticaja sadejstva zategnutog betona i armature, čija bi detaljna analiza nametnula upotrebu trodimenzionih elemenata za modeliranje betonskog dela štapa i armature, kao i analizu sa stanovišta mehanike loma).

U nekim pristupima modeliranju, klasi *material*, se dodeljuje uloga generatora materijalne nelinearnosti. To je slučaj u objektnom modelu koji je razvijan u okviru *OpenSees*. U tom slučaju, se u okviru klase *materijal*, obuhvataju i oblici nelinearnosti koje se javljaju u okviru poprečnih preseka strukturnih konačnih elemenata. Pri tome se složeno nelinearno ponašanje pri cikličnom opterećenju generisano u klasi *materijal*, primenjuje za povezivanje momenta i krivine $M - \kappa$ ili transverzalne sile i smicanja celog preseka $T_z - \gamma_{xz}$.

Vrsta problema koja se analizira nameće niz potrebnih vrednosti koje treba da obezbedi klasa materijala. U ovom radu je naglasak stavljen na materijalnu nelinearnost, oštećenje i viskozne deformacije kao osnovne uzroke nelinearnosti. Otuda je pažnja posvećena onim karakteristikama materijala koje su potrebne za opisivanje takvog ponašanja. To je pre svega ponašanje pri monotonom opterećenju. Sa druge strane, u opštem pristupu, klasa treba da obezbedi i odgovor na ponašanje pri cikličnom i dinamičkom opterećenju. Zbog toga su klase kojima se opisuje ponašanje materijala u *OpenSees*-u prilagodjene cikličkom i dinamičkoj analizi.

Osnovne funkcije koje će se traziti od elementa su informacije o krutosti za trenutno stanje, informacije o prirastu sila za zadat prirast deformacija. Pored toga, od elementa će se očekivati da pamti utvrđena stanja tokom opterećenja. Zato i jednodimenzioni model materijala mora da obezbedi:

- *getTangent* Vraća tangentnu vrednost krutost koja odgovara utvrđenom stanju, u ovom slučaju, funkcija će vratiti tangente vrednosti modula elastičnosti i modula smicanja.
- *setTrialStrain* Postavlja probne (privremene) vrednosti dilatacija.
- *getStress* Vraća vrednosti napona koje odgovaraju probnim (privremenim) dilatacijama.

- *Ccommit* Utvrđuje privremene vrednosti dilatacija.

Pored navedenih funkcija, koje se u sličnom obliku javljaju i u drugim objektnim modelima, u cilju obezbeđivanja prirasta vremenskih deformacija, klasa materijala bi trebala biti obogaćena funkcijama koje generišu takve deformacije:

- *setTime* : Zadaje vreme, a materijal koji poseduje viskozna svojstva generiše svoje dilatacije na osnovu istorije naprezanja.

Svaki od materijala mora biti osposobljen da primi ovakve instrukcije. To znači da je potrebno u osnovnoj klasi materijal uneti te funkcije, dok će u izvedenim klasama, one biti preklapljene. Svaki od materijala će sadržati i informaciju o zapreminskoj masi, kao i informaciju o koeficijentu termičke dilatacije kao i funkcije kojima se postavljaju i vraćaju ovi parametri, ali njima nećemo posvećivati posebnu pažnju u ovom radu.

U ovom radu će se definisati minimalni broj klasa materijala koje su potrebne za definisanje nelinearnih efekata u jednodimenzionom materijalu, uz naglasak je veliki broj objekata nastao modifikacijom sličnih objekata preuzetih iz objektnog modela *OpenSees*-a.

6.1.1 Modeli *idealnih* materijala

U mehanici se ponašanje materijala pojednostavljuje i idealizuje. Modeli idealizovanih materijala su jednostavni za analizu a njihovom kombinacijom se mogu opisati složene veze. U ovom delu je dat kratak osvrt na jednodimenzione modele *idealnih* materijala i njihove kombinacije. Idealni materijali su oni specijalni (mada jednostavni) tipovi materijala. Mada je njihovo ponašanje jednostavno preostali deo sistema, njima pristupa kao bilo kom materijalu. Odnosno, u odnosu na trenutno stanje: određuje tangentsnu krutost, zadaje nove vrednosti nezavisnih promenljivih (dilatacija) i traži odgovor zavisnih vrednosti (napona). Otuda će način komunikacije biti isti i u slučaju idealno elastičnog materijala, bez obzira na činjenicu da se njegova krutost može direktno dobiti. Primeri *idealnih* materijala su:

Idealno elastičan materijal

Jednodimenziono ponašanje idealno elastičnog materijala je izuzetno jednostavno. Parametar koji je konstanta nezavisno od nivoa opterećenja je:

- Modulo elastičnosti - E

Klasa funkcioniše nezavisno od intenziteta ili istorije probnih dilatacija i uvek kao tangentsnu krutost materijala vraća iste vrednosti modula elastičnosti. Uprkos tome, pri integraciji matrice krutosti sistema ili određivanju rezidualnog opterećenja, objekti (poprečni preseki) će se obraćati ovoj klasi na isti način kao i svakoj drugoj.

Kruto plastičan materijal

Ponašanje ovog materijala je jednostavno za opisivanje ali se u njegovom modeliranju javljaju problemi koji su pre svega uzrokovani potrebom da se on tretira kao i svaki drugi materijal. Naime njegova krutost je do dostizanja napona plastifikacije beskonačna. Po dostizanju napona plastifikacije, krutost postaje beskonačno mala za prirast dilatacije ali je beskonačna

za rasterećenje do dostiznaj napona plastifikacije u suprotnom smeru. Problem u modeliranju je uzrokovan činjenicom da se u numeričkom smislu beskonačne veličine modeliraju konačim (mada izuzetno velikim ili izuzetno malim) brojevima. Izuzetno velike ili zanemaljivo male krutosti pri minimalnim prirastima dovode do divergencije nelinearnog postupka kojim se generiše ponašanje veza ovakvih materijala. Zato se ovaj materijal može modelirati kao elastoplastični materijal sa jako velikim modulom elastičnosti, mada, povezivanje ovog elementa sa ostalim u serijsku vezu, dovodi do nestabilnosti celog materijala. Otuda se razvijaju modeli složenijih materijala koji će u svom sastavu uključivati efekte serijske veze ovog materijala sa drugim modelima.

Prekidni materijal

Slično krutoplastičnom materijalu, i ovaj model materijala se koristi pri jednostavnom opisivanju ponašanja, ali istovremeno, generiše nestabilnost pri serijskom povezivanju sa drugim materijalima. Oštećenje koje se njime opisuje se iskazuje u modelima složenih materijala, dok se sama upotreba ovog materijala izbegava.

Materijal koji generiše efekte zazora - GAP - materijal

Ovaj materijal služi da se prikaže model pri kome se aktivira veza nakon dostizanja određene vrednosti dilatacije. Slično krutoplastičnom ili prekidnom materijalu, u serijskoj vezi sa drugim materijalima generiše nestabilnost te se umesto njegove direktne primene koriste složeni modeli materijala.

6.1.2 Složeni materijali

Složeni materijali se u mehaničkom smislu dobijaju serijskim i paralelnim povezivanjem osnovnih materijala. Mada je takav pristup sa mehaničkog stanovišta potpuno prihvatljiv, pri modeliranju se (osim u slučaju idealnoelastičnog materijala) javljaju brojni problemi. Ti problemi se pre svega manifestuju odsustvom konvergencije rešenja. Otuda se umesto upotrebe serijske veze, koriste složeni materijali, koji u sebi na posredan način sadrže osnovne materijale. Njihovo ponašanje je međjutim jednoznačno određeno.

Idealno elastoplastičan materijal

Za opis idealno elastoplastičnog ponašanja materijala, usvojena je klasa koja je slična klasi *ElasticPPMaterial* iz *OpenSees*-a. Modeliranje ovakvog ponašanja se formalno moglo postići serijskom vezom idealno elastičnog i krutoplastičnog materijala. Ali bi se u tom slučaju pri svakoj promeni stanja morala obaviti nelinearna analiza. Ponašanje materijala je definisano parametrima:

- Moduo elastičnosti - E
- Napon tečenja pri pozitivnim naponima - Y_n
- Početna vrednost dilatacije - ϵ_0
- Napon tečenja pri negativnim naponima - Y_p

- Zaostalom plastičnom deformacijom 'privatnim parametrom' koji sam materijal menja i prati.

Paralelno generisani materijal

Ovaj materijal služi da omogući paralelnu vezu više materijala. Proizvoljan broj materijala se mogu paralelno vezati i na taj način dobiti željeno ponašanje. Formira se od proizvoljnog broja materijala od kojih neki mogu biti i serijske veze postojećih materijala. Ponašanje ovog materijala je jednoznačno određeno brojem i materijalima koji su povezani. Funkcije *setTrialEps* šalje istu informaciju svim materijalima koji su paralelno vezani, dok funkcije *getTangent* i *getTrialForce* vrše sumiranje krutosti i napona svih materijala.

Serijski povezani materijal

Ovaj model materijala omogućava serijsko povezivanje više materijala. Materijali su linijski vezani i pri zadavanju probnog intenziteta dilatacije, materijal mora rasporediti tu dilataciju po svojim komponentama. U osnovi, po postavljanju probne vrednosti dilatacije, materijal ulazi u nelinearni postupak rasporedjivanja dilatacija prema svojim komponentama. Stanje ovog materijala je određeno stanjima materijala od kojih je načinjen, ali u okviru same klase se uočavaju 'privatne' promenjive:

- Cstrain i Tstrain - utvrđena i probna vrednost ($Cstrain=\epsilon^c$ i $Tstrain=\epsilon^t$).
- Cstress i Tstress - utvrđena i probna vrednost napona ($Cstress=\sigma^c$ i $Tstress=\sigma^t$).
- Ctangent i Ttangent - utvrđena i probna vrednost krutosti ($Ctangent=E^c$ i $Ttangent=E^t$).
- nizovi *stress, *flex i *strain - Nizovi vrednosti napona, fleksibilnosti i dilatacija po materijalima, koje se menjaju u toku iteracija. (σ_i , f_i i ϵ_i).
- tolerancija i maksimalni broj iteracija
- Niz materijala čijim je povezivanjem dobijen serijski povezan materijal (čuva se niz pointera na materijale)

Upravo serijski povezani materijal može poslužiti kao dobar primer prednosti i mana objektnog pristupa analizi problema. Naime, taj materijal kao i svaki drugi materijal, sadrži osnovne funkcije kojima komunicira sa sistemom kome je potreban. Njegova struktura zahteva da se u slučaju upotrebe nelinearnih modela u serijskoj vezi, pri postavljanju probne vrednosti dilatacije obavi unutar njega nelinearna analiza kojom će se rasporediti uticaji po elementima koje sadrži. Pri toj analizi, može doći do divergencije rešenja. I pri veoma jednostavnim testovima cikličnog opterećenja serijske veze idealno elastičnog i idealno elastoplastičnog modela, u zavisnosti od algoritma, dolazi do divergencije rešenja.

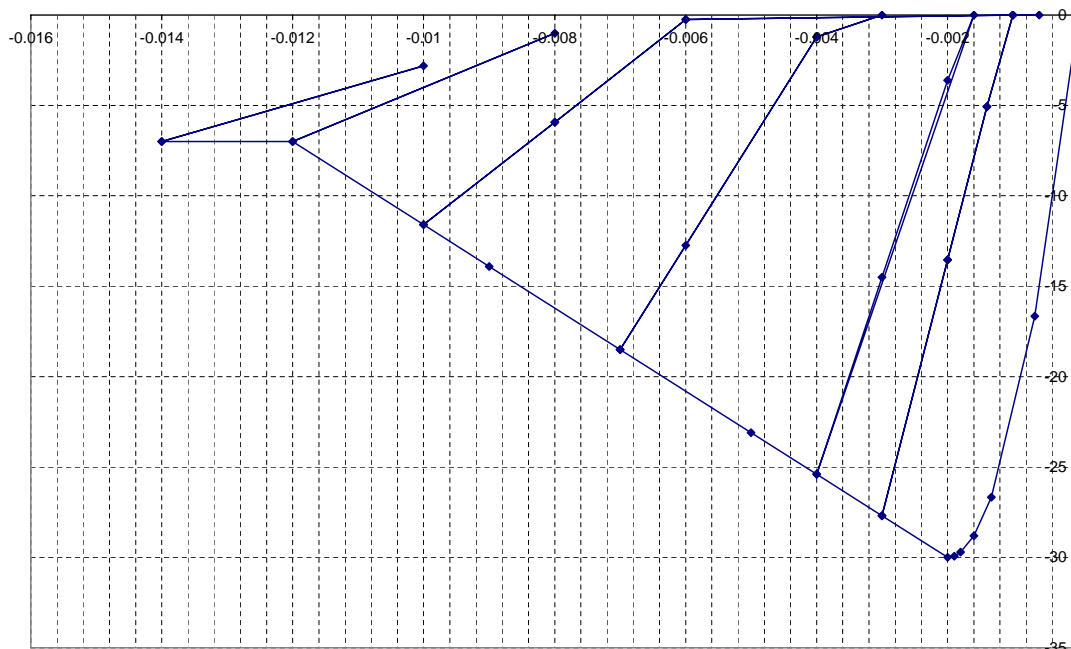
Objektnim pristupom, izolovano je ponašanje materijala u klasama materijala, i postupak nelinearne analize i ne zna za probleme klase materijala. Postupak samo traži tangentne vrednosti krutosti preseka i neubalansirane uticaje i njih proverava u odnosu na kriterijum konvergencije, a to je ravnoteže statičkih uticaja u čvorovima.

Model materijala beton - Concrete01

Realno modeliranje betona bi se moglo ostvariti kombinacijom serijskog i paralelnog povezivanja velikog proja linerno elastičnih, elastoplastičnih i prekidnih elemenata. Takav materijal bi iskazivao lošu konvergenciju. Otuda je razvijen materijal koji na zadovoljavajući način iskazuje veze dilatacija i napona koje su uočene kod betona. U radu je preuzet i donekle modifikovan kod razvijen od strane Frank McKenna, Georgy L. Fenves i Filip C. Filippou i implementiran u OpenSees-u (*Concrete01.cpp - rev 1.14*) koji opisuje modifikovan Kent-Park model. Ovaj model ne poseduje čvrstoću pri zatezanju, dok se pri opterećenju uočava ponašanje karakteristično za oštećenje i plastičnost. Karakteristike koje određuju ponašanje materijala su:

- σ_{pc} maksimalni napon pri inicijalnom opterećenju.
- ϵ_{pc} dilatacija koja odgovara maksimalnom naponu pri inicijalnom opterećenju
- σ_{pcu} vrednost napona pri maksimalnoj dilataciji
- ϵ_{pcu} vrednost maksimalne dilatacije.

Ove karakteristike su prikazane na slici 6.1. Model materijala na slici ima vrednosti $\sigma_{pc} = -30$, $\epsilon_{pc} = -0.002$, $\sigma_{pcu} = -7$ i $\epsilon_{pcu} = -0.012$.. Na slici se uočava pad modula elastičnosti pri rasterećenju, karakterističan za materijale sa oštećenjem.



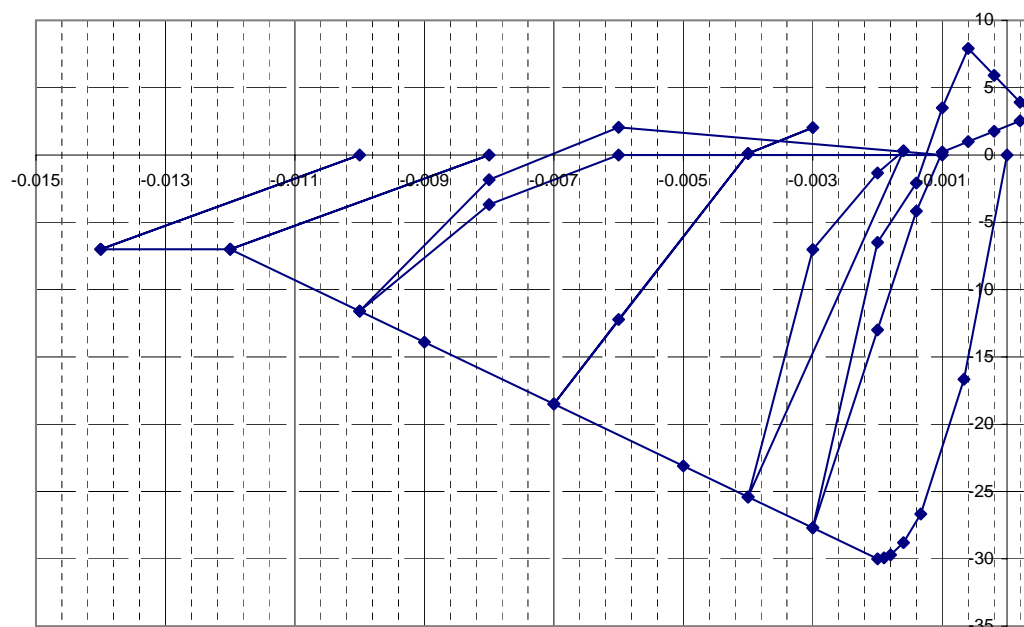
Slika 6.1: Dijagram napona i dilatacije pri cikličnom opterećenju materijala *Concrete01*

Model materijala beton - Concrete02

Model materijala betona koji je u mogućnosti da primi naprezanja zatezanja je opisan klasom *Concrete02*. Osnovno ponašanje klase su razvili D.Size i C.Filippou na osnovu modela materijala sa linearnim oslabljenjem pri zatezanju i linearnim oštećenjem koji je prema referencama u kodu i literaturi razvio Mohd Yassin. Karakteristike materijala su određene parametrima:

- σ_{pc} maksimalni napon pri inicijalnom opterećenju.
- ϵ_{pc} dilatacija koja odgovara maksimalnom naponu pri inicijalnom opterećenju
- σ_{pcu} vrednost napona pri maksimalnoj dilataciji
- vrednost maksimalne dilatacije.
- λ - odnos krutosti pri rasterećenju nakon dostizanja ϵ_{pcu}
- σ_t - maksimalni napon zatezanja.
- E_{ts} - nagib krive omekšanja pri zatezanju.

Pri monotonom opterećenju (prirastu negativne dilatacije), oba materijala se ponašaju identično. Za razliku od *Concrete01*, ovaj materijala može da primi izvesna zatezana i opiše ponašanje pri zatezanju.



Slika 6.2: Dijagram napona i dilatacije pri cikličnom opterećenju materijala *Concrete02*

Modeli *Concrete01* i *Concrete02* iskazuju veoma složene procese. Samo ponašanje materijala je svedeno na jednodimenzioni modela a broj parametara od kojih zavisi ponašanje je smanjen kako bi bio prilagodjen primeni.

6.1.3 Materijali koji generišu dilataciju

U odnosu na analizu sistema, posebna grupa materijala su materijali koji će generisati dilataciju i bez prisutva ili promene statičkog uticaja (napona). Svi realni materijali imaju, u većoj ili manjoj meri, uz elastične i ove osobine, ali se njihovo ponašanje u ovoj analizi izdvaja zbog karaktera nove dilatacije. Kako su u cilju jednostavnosti već definisani materijali koji su bez ovih osobina, to će se uvesti materijali koji će imati samo ove osobine i generisati promene dilatacije i bez promene napona. Ovi efekti su :

- Uticaj temperature - u zavisnosti od temperaturne promene, dolaziće do pojave dilatacije.
- Skupljanje - osobina koja je izražena kod betona, u funkciji protoka vremena, vlažnosti, materijala, oblika i drugih parametara i bez prisustva napona dolazi do pojave dilatacije.
- Tečenje ili puzanje - efekti pri kojima se u funkciji istorije napona javljaju dodatne dilatacije (i bez promene napona).

Serijskim povezivanjem ovih materijala sa već postojećim materijalima se formalno mogu napraviti modeli koji će imati odgovarajuća svojstva (uz elasto plastično ponašanje sa oštećenjem, imaće i osobine da mogu primiti i generisati deformaciju tokom vremena ili dilataciju uzrokovanu temperaturom.

Ukoliko se ovo ponašanje izdvoji na nivou materijala, svaki primerak klase materijala će morati da bude osposobljen da primi poruku *setTime*.

U serijskoj vezi, ovi materijali se usled opterećenja statičkim uticajima, moraju ponašati beskonačno kruto. Pojam beskonačne veličine u numeričkom modeliranju je problematičan i po pravilu se koristi dovoljno velika veličina, koja će se u odnosu na ostale krutosti ponašati kao beskonačna. Na taj način se svaki od materijala praktično sveo na *veoma krut* elastičan materijal, koji sa druge strane ima mogućnost generisanja uticaja usled temperature ili istorije napona.

Linearni viskozni materijal

Osobina viskoznog materijala je da generiše dilataciju tokom vremena u funkciji intenziteta napona. Linearnost između intenziteta napona i neelastičnog prirasta deformacije usled tog napona, je široko primenjivana na odogovarajućim (radnim) naponskim nivoima. Otuda se može primeniti princip superpozicije uticaja tokom vremena. Određivanje reološkog ponašanja materijala se može postići kombinacijama serijskog i paralelnog povezivanja Newton-ovog tela sa idealno elastičnim i plastičnim modelima materijala. Pri tome bi se karakteristike elementarnih tela usvajale na osnovu eksperimentalnih rezultata ponašanja samog materijala.

Za numeričko modeliranje ovih efekata, značajan je princip superpozicije i poznavanje funkcije tečenja. Postojeći standardi definišu te funkcije, te se pri numeričkim modeliranjima veoma široko koriste. Pojedini programi daju mogućnost određivanja koefinijenata kojima se metodom najmanjih kvadrata, nalaze koeficijenti uz funkcije kojima se modelira funkcija tečenja.

Ograničenje u primeni tih funkcija je pre svega u oblasti napona u kojoj važe. To je po pravilu oblast u kojima su materijali u odnosu na koje se primenjuju u elastičnom stanju ($|\sigma| < 0,4f_{cm}$, gde je f_{cm} granična vrednost napona u materijalu). Efekti ovih dilatacija na oštećenim materijalima (bilo pri pritisku ili zatezanju) nisu pokriveni standardima.

Ukoliko se ovi materijali primenjuju pri modeliranju samo u linearno elastičnoj oblasti, to omogućava da se za homogene preseke ili njihove delove (ceo materijal je u homogenom stanju) za poprečni presek ili njegov deo odredi neelastična dilatacija u funkciji istorije elastične dilatacije, umesto u funkciji istorije napona.

Razvoj dilatacije, uz intenzitete napona koji ostavljaju materijal u elastičnoj oblasti, pri konstantnom naponu se iskazuje izrazima:

$$\epsilon(t) = \int_{-\text{inf}}^t J(t, \tau) C \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (6.4)$$

u zavisnosti od standarda, funkcijom J se izražava deo koji je trenutna - elastična dilatacija i deo koji se razvija vremenom

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E(t)} + \frac{\phi(t, t_o)}{E_{c28}} \quad (6.5)$$

Integracijom izraza (6.4) u određenom periodu, dobija se izraz:

$$\epsilon(t, t_o) = \sigma(t_o) \left[\frac{1}{E(t_o)} + \frac{\phi(t, t_o)}{E_{28}} \right] + \Delta\sigma(t, t_o) \left[\frac{1}{E(t_o^+)} + \frac{\chi\phi(t, t_o)}{E_{28}} \right] \quad (6.6)$$

U izrazu se koristi koeficijent χ koji uvodi efekat promene napona u periodu vremena. U slučaju linearne promene, koeficijent $\chi = 0.6$, dok je u slučaju kvadratne promene $\chi = 0.8$.

Podelom vremena na veći broj intervala, umesto integrala se dobijaju sume, a dilatacija u trenutku $n+1$ postaje:

$$\epsilon_{n+1} = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \left[\frac{\chi}{E(t_i)} + \frac{1-\chi}{E(t_{i+1})} + \frac{\chi\phi(t_{n+1}, t_i) + (1-\chi)\phi(t_{n+1}, t_{i+1})}{E_{28}} \right] \quad (6.7)$$

U slučaju zanemarivanja promene modula elastičnosti tokom vremena, izraz se pojednostavljuje i dobijamo za neelastičnu deformaciju u trenutku $n+1$:

$$\epsilon_{n+1}^N = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \frac{\chi\phi(t_{n+1}, t_i) + (1-\chi)\phi(t_{n+1}, t_{i+1})}{E_{28}} \quad (6.8)$$

Izrazi kojima se modelira funkcija tečenja, kao i promena modula elastičnosti tokom vremena su definisani standardima.

Sa stanovišta numeričkog modela, materijal koji treba da generiše neelastični deo viskozne deformacije tokom vremena, treba da poznaje istoriju napona u smislu poznavanja niza inkremenata i vremena u kojima su se odigrali, kao i priraste elastičnih dilatacija.

Sam model je određen usvojenim kodom (standardom) i zavisi od niza parametara: vlažnosti, vrste betona, poluobima, trenutka opterećenja i slično. Funkcija promene koeficijenta tečenja kroz vreme se može uočiti deo koji određuje konačnu vrednost i deo koji pokazuje razvoj funkcije kroz vreme. U zavisnosti od predloga uočavaju se izrazi za deo koji zavisi od vremena:

$$\phi^{temp}(t, t_o) = \frac{1}{0.1 + t_o^{0.2}} \left(\frac{t - t_o}{\beta_H + (t - t_o)} \right)^{0.3} \quad \beta_H = 1500 \quad (6.9a)$$

$$\phi^{temp}(t, t_o) = 1.25 t_o^{-0.118} \frac{(t - t_o)^{0.6}}{10 + (t - t_o)^{0.6}} \quad (6.9b)$$

$$\phi^{temp}(t, t_o) = \frac{1}{0.43 + 0.12 t_o^{0.47}} \frac{(t - t_o)^{0.47}}{2.4 + (t - t_o)^{0.47}} \quad (6.9c)$$

Problem međutim nastaje iz uslova što je standardima po poravilu zahtevana elastična dilatacija (prirast neelastične dilatacije je dat u funkciji prirasta elastične dilatacije). Na taj način i materijal koji bi se dobio serijskim povezivanjem različitih materijala sa viskoznom, morao bi viskoznom materijalu da saopštava informacije o inkrementima celokupne elastične dilatacije. Sa druge strane, već pomenuti problem konvergencije serijski povezanih elemenata dolazi do izražaja, jer bi ovakav element (ukoliko bi želeli da izdvojimo deo koji generiše viskoznu dilataciju) pri trenutnim opterećenjima morao biti beskonačno krut.

Uz navedeno ograničenje standarda na naponske nivoe za koje je osnovano ostati na linearnoj vezi, to nameće odstupanje od principa formiranja modela materijala serijskim povezivanjem, već kreiranje materijala koji će u sebi sadržati izraze koji na osnovu istorije dilatacija, vremena i temperature mogu u svakom trenutku odrediti napon.

U teorijskom smislu, ovi modeli su identični modelima koji se dobijaju kompozicijom (serijskim i paralelnim povezivanjem) jednostavnih materijala, ali je suštinska razlika u tome što se u okviru njih ne sprovodi nelinearni postupak pri zadavanju pobude.

6.1.4 Linearno elastični viskozni materijal

U okviru rada, u cilju modeliranja viskoznih efekata i skupljanja, formiran je linearno elastičan viskozni materijal koji viskozne deformacije generiše primenjujući empirijske izraze predložene standardima CEB-FIP i EC2. Navedeni materijal će se ponašati linearno elastično, a pri zadavanju vremena, će generisati neelastičnu deformaciju skupljanja i tečenja.

Za odfeđjivanje efekata skupljanja i tečenja se primenjuju izrazi definisani standardima 'CEB-FIP Model Code 90' i 'Evrokd 2'. Kako su standardom predviđeni empirijski izrazi funkcija nekoliko parametara to se pri definisanju materijala, ti parametri mogu uneti, a neki od njih imaju pretpostavljenu - default vrednost. Pri formiranju modela odstupilo se od potpune primene standarda jer je zanemarena promena modula elastičnosti kroz vreme, te je on usvojen kao konstanta. Pri definisanju karakteristika materijala, ostavljena je mogućnost da se 'isključiti skupljanje', kako bi se rezultati mogli uporediti sa primerima iz literature.

Vremenske deformacije prema standardu: 'CEB-FIP Model Code 90'

Parametri koji definišu viskozna ponašanje materijala prema standardu su:

- RH - vlažnost vazduha (kako se u izrazima koristi količnik $\frac{RH}{RH_o}$, pri čemu je $RH_o = 100$) , to će se vlažnost uneti u procentima odnosno u opsegu od 0 do 1.
- h - poluobim u milimetrima (to je odnos dvostruke površine i obima poprečnog preseka $\frac{2A_c}{u}$, u empirijskim izrazima se koristi količnik $\frac{h}{h_o}$ pri čemu je $h_o = 100mm$.

- f_{cm28} - čvrstoća kocke, starosti 28 dana, pri pritisku (u MPa), dok se u izrazima koristi bezdimenzioni izraz $\frac{f_{cm28}}{f_{cm0}}$, pri čemu je $f_{cm0} = 10MPa$;
- β - koeficijent koji u zavisnosti od primenjenog cementa ima vrednosti 8,5 ili 4.

Na osnovu zadatih parametara, koji su unutrašnje promenjive objekta, objekat može sračunati koeficijent tečenja:

$$\phi(t, t_o) = \left(1 + \frac{1 - \frac{RH}{RH_o}}{0.43 + \left(\frac{h}{h_o}\right)^{\frac{1}{3}}} \right) \left(\frac{5.3}{\left(\frac{f_{cm28}}{f_{cm0}}\right)^{0.5}} \right) \left(\frac{1}{0.1 + t_o^{0.2}} \right) \left(\frac{(t - t_o)}{\beta_H + (t - t_o)} \right)^{0.3} \quad (6.10a)$$

$$\beta_H = \min \left\{ \begin{array}{l} 1500 \\ 150 + \left(1 + \left(1.2 \frac{RH}{RH_o} \right)^{18} \right) \frac{h}{h_o} + 250 \end{array} \right\} \quad (6.10b)$$

$$\epsilon_s(t, t_s) = \left(160 + 10\beta \left(9 - \frac{f_{cm28}}{f_{cm0}} \right) \right) \times 10^{-6} \beta_{RH} \left(\frac{(t - t_s)}{350 \left(\frac{h}{h_o}\right)^2 + (t - t_s)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.10c)$$

$$\beta_{RH} = \left\{ \begin{array}{ll} -1.55 \left(1 - \left(\frac{RH}{RH_o} \right)^3 \right) & 40\% \leq RH < 99\% \\ 0.5 & RH \geq 99\% \end{array} \right\} \quad (6.10d)$$

Vremenske deformacije prema standardu: 'Evrokod 2'

Ovaj standard se neznatno razlikuje od 'CEB-FIP Model Code 90'. Izrazi kojima se odredjuju koeficijenti tečenja i vrednost dilatacije skupljanja su prikazani jednačinama (6.11). Koeficijenti k_h , α_{ds1} , α_{ds2} i α_{ds3} zavise do vrste cementa. Koeficijent tečenja definisan izrazom (6.11.a) za $f_{cm} \leq 35$ identičan izrazu (6.10.a). Značenje parametara je isto kao u 'CEB-FIP' modelu.

$$\phi(t, t_o) = \phi_{RH} \left(\frac{16.8}{(f_{cm})^{0.5}} \right) \left(\frac{1}{0.1 + t_o^{0.2}} \right) \left(\frac{(t - t_o)}{\beta_H + (t - t_o)} \right)^{0.3} \quad (6.11a)$$

$$\beta_H = \left\{ \begin{array}{ll} 1,50 + \left(1 + (0.012RH)^{18} \right) h + 250 \leq 1500 & za f_{cm} \leq 35 \\ 1,50 + \left(1 + (0.012RH)^{18} \right) h + 250\alpha_3 \leq 1500\alpha_3 & za f_{cm} > 35 \end{array} \right\} \quad (6.11b)$$

$$\phi_{RH} = \left\{ \begin{array}{ll} \left[1 + \frac{1 - \frac{RH}{RH_o}}{0.1 + \left(\frac{h}{h_o}\right)^{\frac{1}{3}}} \right] & za f_{cm} \leq 35 \\ \left[1 + \frac{1 - \frac{RH}{RH_o}}{0.1 + \left(\frac{h}{h_o}\right)^{\frac{1}{3}}} \alpha_1 \right] \alpha_2 & za f_{cm} > 35 \end{array} \right\} \quad (6.11c)$$

$$\alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.7} \quad \alpha_2 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.2} \quad \alpha_3 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.5} \quad (6.11d)$$

$$\epsilon_s(t, t_s) = \beta_{ds}(t, t_s) k_h \epsilon_{cd,0} + (1 - e^{-0.2t^{0.5}}) 2.5 (f_{ck} - 10) 10^{-6} \quad (6.11e)$$

$$\beta_{ds}(t, t_s) = \frac{t - t_s}{t - t_s + 0.04h^{1.5}} \quad (6.11f)$$

$$\epsilon_{cd,0} = 0.85 \left[(220 + 110\alpha_{ds1}) e^{-\alpha_{ds2} \frac{f_{cm}}{f_{cm0}}} \right] 10^{-6} 1.55 \left(1 - \left(\frac{RH}{RH_o} \right)^3 \right) \quad (6.11g)$$

Funkcije linearno elastično viskozno materijala

Poruke, koji ovaj materijal prima su identične porukama drugih materijala i one su:

- *getTangent()* Kako je moduo elastičnosti konstantan, to će ova funkcija stalno ' vraćati ' vrednost modula elastičnosti E ;
- *setTrialStrain(double Eps)* Ova funkcija će postavljati probnu vrednost dilatacije ϵ^{Tri} . Objekat sam pamti intenzitet svoje neelastične dilatacije ϵ_{NE} , te se pozivom ove funkcije trenutna vrednost elastične dilatacije sračunava i postavlja probna vrednost napona.

$$\sigma^{Tri} = E(\epsilon^{New} - \epsilon_{NE}) \quad (6.12a)$$

$$\epsilon^{Tri} = \epsilon^{New} \quad (6.12b)$$

- *getStress()* Ova funkcija će obezbediti trenutnu vrednost napona (vratiće vrednost promenljive σ^{Tri});
- *setTime(T)* Ova funkcija sračunava priraste neelastične dilatacije na osnovu prethodne istorije prirasta napona. Da bi objekat materijala mogao da pravilno odgovori na ovaj zahtev, on mora da poseduje dva vektora:

- $\Delta\sigma_i$ - niz vrednosti prirasta napona u prethodnim vremenskim trenucima;
- T_i - niz vremenskih trenutaka u kojima je dolazilo do prirasta napona.

Pored ovoga, objekat mora imati dve privatne funkcije, kojima će na osnovu svojih parametara (RH, h, β i f_{cm28}) odredjivati vrednosti izraza (6.10.a) i (6.10.c).

Pozivom funkcije, objekat izvrši sledeće operacije:

$$t^{Tri} = T;$$

$$\epsilon^{Tri} = \epsilon^{Com};$$

Po svim vremenskim trenucima

$$\Delta\phi_i = \phi(t^{Tri}, T_i) - \phi(t^{Com} - T_i)$$

$$\epsilon^{Tri} = \epsilon^{Tri} + \Delta\phi_i \Delta\sigma_i / E$$

$$\sigma_{tmp} = \sigma_{tmp} + \sigma_i$$

$$\epsilon^{Tri} = \epsilon^{Tri} + (\sigma^{Tri} - \sigma_{tmp})\phi(t^{Tri}, t^{Com}) / E$$

$$\epsilon^{Tri} = \epsilon^{Tri} + \epsilon_s(t^{Tri}, t_0) - \epsilon_s(t^{Com}, t_0)$$

$$\epsilon_{NE} = \epsilon_{NE} + \epsilon^{Tri} - \epsilon^{Com}$$

$$setTrialStrain(\epsilon^{Com})$$

Prethodnim operacijama, praktično, objekat sračuna prirast neelastične dilatacije skupljanja i tečenja, koji je nastao u poslednjem inkrementu vremena a posledica je prethodnih inkremenata napona u poznatim trenucima vremena, da bi na kraju postavio vrednost dilatacija na utvrdjenu vrednost.

- *commit()* Poruka utvrdjuje vrednost. Ona najpre proveri da li je došlo do inkrementiranja vremena u odnosu na prethodno utvrdjeno stanje (da li je $t^{Tri} = t^{Com}$) i ukoliko je došlo, poveća vektor vremenskih trenutaka, dodajući mu t^{Tri} , kao i vektor inkremenata napona i dodajući $\delta\sigma = \sigma^{Tri} - \sum \Delta\sigma_i$. Potom prtbne vrednosti napona i dilatacija utvdi : $\epsilon^{Com} = \epsilon^{Tri}$ i $\sigma^{Com} = \sigma^{Tri}$

Objekat linearno viskozno materijala u sebi sadrži promenjive, koje jednoznačno određuju njegovo stanje. U skladu sa prethodno izloženim te promenjive su:

- Parametri materijala (E , RH , h , f_{cm28} , β)
- Probnu vrednost napona i dilatacije σ^{Tri} i ϵ^{Tri} ;
- Vrednost neelastične dilatacije ϵ_{NE}
- Utvrđene vrednosti napona i dilatacije σ^{Com} i ϵ^{Com} ;
- niz vrednosti prirasta napona u prethodnim vremenskim trenucima $\Delta\sigma_i$;
- niz trenutaka u kojima je dolazilo do prirasta napona T_i

Na taj način, objekat je u stanju da obezbedi potreban odgovor sistemu (u ovom slučaju poprečnom preseku) i da se sam menja (mutira) u zavisnosti od poruka koje dobija od sistema.

Glava 7

Numerički primeri

7.1 Elastični model

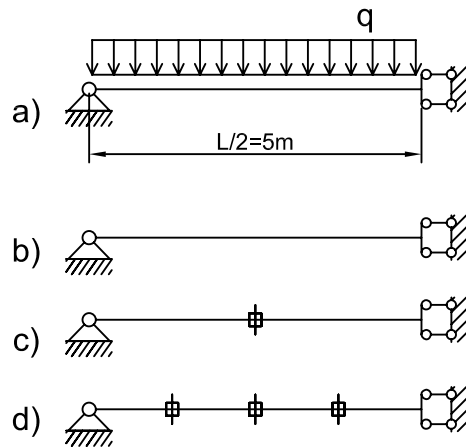
U ovom primeru je verifikovana konvergencija rešenja u zavisnosti od elementa, načina integracije matrice krutosti i broja segmenata duž štapa. Za kontrolu je poslužio model prezentovan u radu [23]. U navedenom radu je mešovitom metodom izveden konačni element grede osposobljen da iskaže defomacije uzrokovane transverzalnim silama.

Izraz za ugib tačke na sredini proste grede opterećenje ravnomernim opterećenjem q je:

$$w_{max}^E = \frac{5qL^4}{348EI} + \frac{qL^2}{8\kappa GA} \quad (7.1)$$

Drugi sabirak u izrazu (7.1) predstavlja, doprinos uticaja transverzalne sile na deformaciju.

Raspon modela je $L = 10m$, poprečni presek je pravougaoni dimenzija $b = h = 1m$; moduo elastičnosti materijala $E = 10^6 kPa$. Greda je opterećena ravnomerno raspodeljenim opterećenjem intenziteta $q = 1kN/m$.



Slika 7.1: Grafički prikaz modela polovine grede i modela sa podelom na 1, 2 i 4 dela

Modelirana je polovina raspona, prikazana na slici 7.1 korišćenjem 1,2 ili 4 elementa. Testirano je tri varijante elementa izvednog metodom sila:

1. *AIF* - Analitički integrisan - element čiji su članovi matrice fleksibilnosti analitički integrisani (izrazi 2.56).
2. *NI1F* - Numerički integrisan -element čiji su članovi matrice fleksibilnosti određeni primenom izraza (2.58), tj. stanje u štapu je homogeno a uticaji su preuzeti sa preseka na sredini, što ima iste efekte kao numerička integracija sa jednom tačkom.
3. *NI2F* - Numerički integrisan -element čiji su članovi matrice fleksibilnosti određeni primenom izraza (2.58), uz pretpostavku da greda ima dva poprečna preseka. Primenjen je metod sumiranja matrica fleksibilnosti.
4. *NI4F* - Numerički integrisan -element čiji su članovi matrice fleksibilnosti određeni primenom izraza (2.58), uz pretpostavku da greda ima četiri poprečna preseka. Primenjen je metod sumiranja matrica fleksibilnosti.

5. NID - Element čiji su članovi matrice krutosti određeni primenom izraza (2.38).

U tabeli 7.1 su prikazane sračunate vrednosti ugiba na sredini grede u funkciji broja elemenata i vrste elementa koji je primenjen, dok je u tabeli 7.2 prikazano relativno odstupanje (u procentima) u odnosu na vrednost izraza (7.1).

| Br.štapova | AIF | $NI1F$ | $NI2F$ | $NI4F$ | NID |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0.0015998 | 0.0012873 | 0.00152168 | 0.00158027 | 0.0012873 |
| 2 | 0.00159995 | 0.00152183 | 0.00158042 | 0.00159507 | 0.00152183 |
| 4 | 0.00159999 | 0.00158046 | 0.0015951 | 0.00159877 | 0.00158046 |

Tabela 7.1: Vrednosti ugiba u funkciji broja štapova i u zavisnosti od elementa

Uočavase da analitički integrisan element (AIF) iskazuje najmanje odstupanje. U slučaju da se očekuje linearno ponašanje, treba koristiti ovaj element.

| Br.štapova | AIF | $NI1F$ | $NI2F$ | $NI4F$ | NID |
|------------|------------|---------|----------|----------|---------|
| 1 | 0.0125 % | 19.54 % | 4.895 % | 1.233% | 19.54% |
| 2 | 0.003125 % | 4.885 % | 1.223 % | 0.3081% | 4.886 % |
| 4 | 0.000625 % | 1.221 % | 0.3062 % | 0.07687% | 1.221 % |

Tabela 7.2: Greške u sračunatoj vrednosti ugiba u funkciji broja štapova i u zavisnosti od elementa

U slučaju primene elemenata $NI1F$ ili NID (čiji su članovi određeni numeričkom integracijom sa jednom interpolacionom tačkom), rezultati su identični.

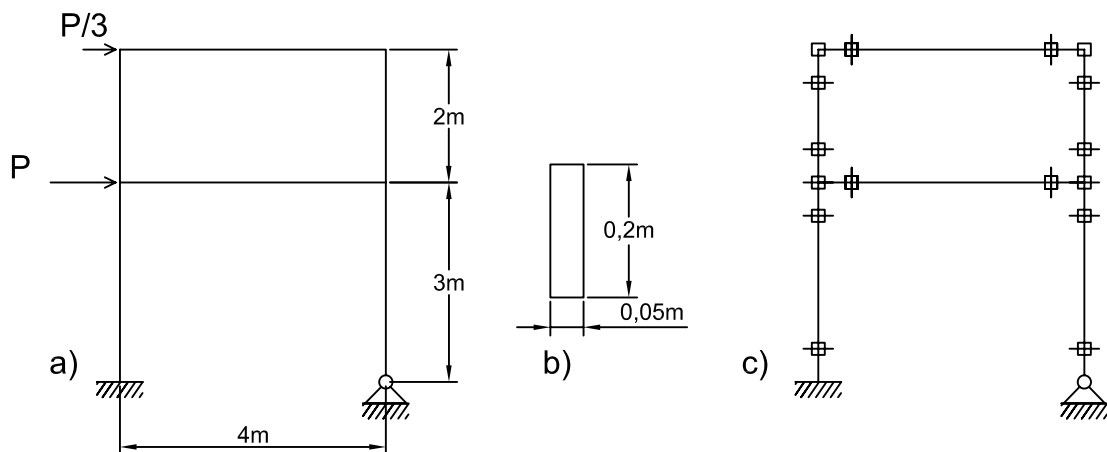
Numerički integrisani elementi sa više integracionih tačaka ($NI2F$ i $NI4F$) imaju veću tačnost, i sa povećanjem broja preseka duž štapa povećava se i tačnost rezultata. Može se takodje uočiti da su rezultati primene dva štapa sa jednom integracionom tačkom ($NI1F$), identični rezultatima primene jednog štapa sa dve integracione tačke ($NI2F$), odnosno rezultati primene četiri štapa sa jednom integracionom tačkom ($NI1F$) su identični rezultatima primene jednog štapa sa četiti integracione tačke ($NI4F$) .

7.2 Ram u ravni primena elastoplastičnog materijala

U ovom primeru je analizirana primena modela rama u ravni prikazanog u literaturi [29]. U navedenom radu je taj primer poslužio za demonstraciju efikasnosti predloženog metoda (*Large Increment Method - LIM*) i rezultati su upoređeni sa rezultatima programa ABAQUS.

Na slici 7.2.a) je prikazan model rama opterećenog dvema koncentrisanim silama. Sve grede su pravougaonog poprečnog preseka dimenzija $0.05 \cdot 0.2\text{m}$, kao što je prikazano na slici 7.2.b). Primenjen je idealno elastoplastičan materijal, modula elastičnosti $E = 200\text{GPa}$, sa graničnom vrednošću napona $\sigma_y = 250\text{MPa}$.

U radu [29] su rezultati prikazani grafički uz kratku tabelu na kojoj su upoređivane vrednosti horizontalnog pomeranja napadne tačke sile P sračunate programom ABAQUS i *LIM*-metodom.



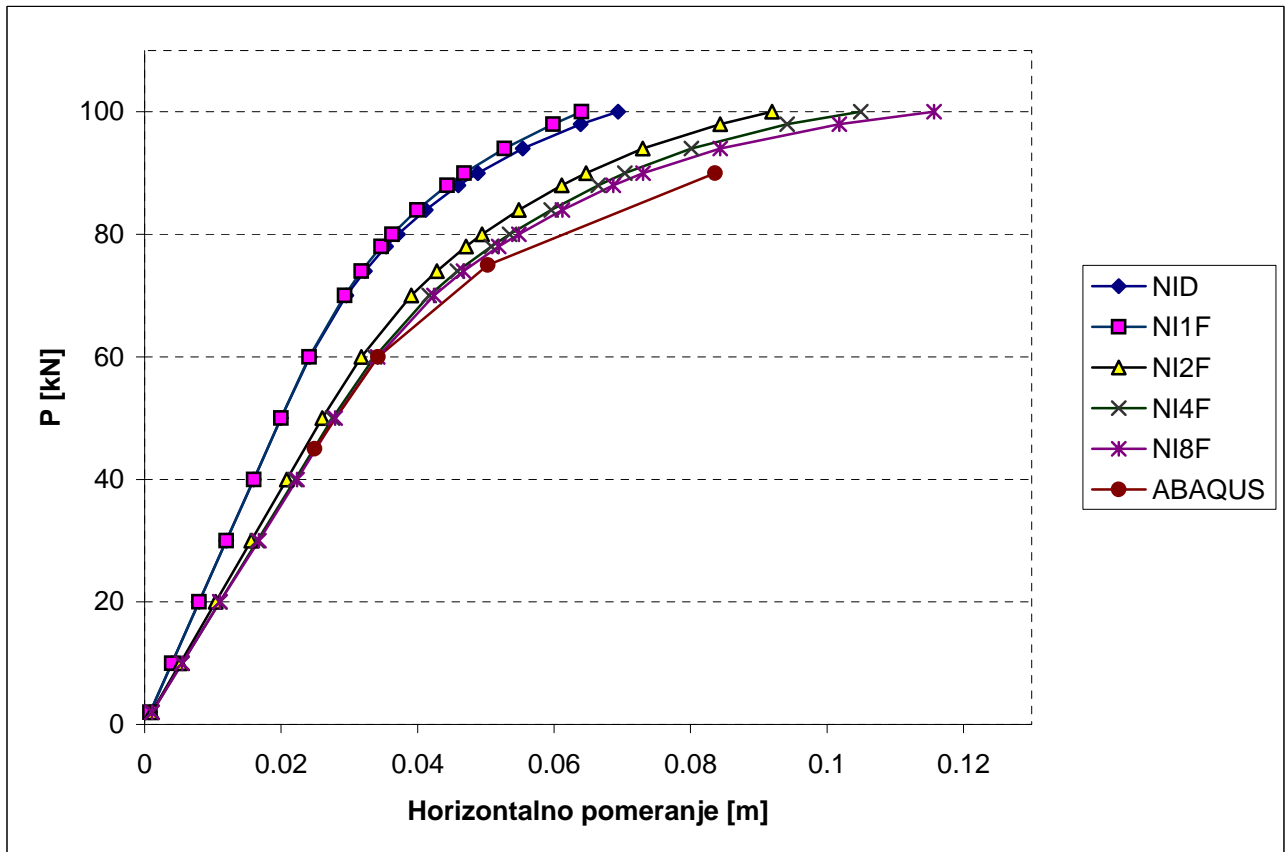
Slika 7.2: Model rama, poprečni presek i podela na štapove

U ovom primeru, ram je modeliran sa 18 štapova i 18 čvorova, prikazanih na slici 7.2.c). Položaji čvorova u modelu su usvojeni tako da su veći štapovi podeljeni čvorovima na zone od 0.5m u okolini krajeva štapova, kako bi se mogli primeniti i elementi štapova sa jednom interpolacionom tačkom.

Poprečni presek je pri modeliranju podeljen 10×3 pravougaone površine. Pri nelinearnom postupku, opterećenje intenziteta $P = 100\text{kN}$ je naneto u jednoj fazi. Primenjen je Newton-Raphson-ov inkrementalno iterativan postupak, prikazan u poglavlju 3.2.1. Ukupno opterećenje faze je podeljeno na 50 jednakih inkrementa (svaki inkrement iznosi $\Delta P = 2\text{kN}$). U okviru svakog inkrementa, broj iteracija je ograničen na 50. Uslov za utvrđivanje konvergencije inkrementa je bila kontrola sume kvadrata neuravnoteženog opterećenja čvorova (u ovom primeru, zahtevana je vrednost manja od $1 \cdot 10^{-3}$).

U cilju utvrđivanja karakteristika, primenjene su oznake elemenata kao u prethodnom primeru elastičnog modela, osim analitički integrisanog. Testiran je i *NI8F*, element čiji su članovi matrice fleksibilnosti određeni izrazima (2.58) sa osam karakterističnih preseka. Rezul-

tati intenziteta sile P i pomeranja napadne tačke te sile su prikazani u tabeli 7.3 i grafički na slici 7.3.



Slika 7.3: Grafički prikaz pomeranja napadne tačke sile P u funkciji intenziteta sile

Može se uočiti da elementi sa NID i $NI1F$ izkazuju veću krutost o kojoj je bilo govora u okviru analize efekata *shear lock* -a. Do neznatne razlike u sračunatim vrednostima pomeranja, primenom ova dva elementa, dolazi usled primene različitih algoritama pri određivanju rezidualnih sila štapa. U slučaju NID , rezidualno opterećenje je određeno vrednostima sila u poprečnom preseku za probne vrednosti deformacija čvorova, dok je u slučaju $NI1F$ element na osnovu probnih deformacija primenio postupak određen izrazima (4.1), da bi se potom rezidualni uticaji u štapu odredili izrazima (4.2).

Primena elemenata sa više integracionih tačaka, daje vrednosti ugiba sa većom tačnošću.

Nelinearno ponašanje sistema u celini je određeno nelinearnim ponašanjem preseka štapova. Poprečni preseki koji određuju ponašanje sistema su na referentnim tačkama duž štapa. U slučaju elemenata NID i $NI1F$, to je presek na polovini štapa, u slučaju $NI2F$, to su preseki na relativnom položaju od $\xi_1 = 0.25$ i $\xi_2 = 0.75$ a u slučajevima elemenata $NI4F$, to su preseki na relativnim položajima $\xi_1 = 0.125$, $\xi_2 = 0.375$, $\xi_3 = 0.625$ i $\xi_4 = 0.875$. Kod elemenata sa više integracionih tačaka krajnji presek je bliži čvoru. Pošto se ekstremne vrednosti uticaja (momenata savijanja), javljaju u čvorovima, to se kod elemenata sa više preseka nelinearnost ranije ispoljava. Na dijagramu 7.3, se može uočiti da je za elemente NID i $NI1F$, početak

| Intenzitet sile $P[kN]$ | NID U [mm] | $NI1F$ U [mm] | $NI2F$ U [mm] | $NI4F$ U [mm] | $NIF8$ U [mm] | $ABAQUS$ U [mm] |
|----------------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|
| 10 | 3.995 | 3.995 | 5.212 | 5.507 | 19.54 | |
| 20 | 7.990 | 7.990 | 10.424 | 11.014 | 11.014 | |
| 30 | 11.985 | 11.985 | 15.636 | 16.521 | 16.742 | |
| 45 | 17.978 | 17.978 | 23.453 | 24.790 | 25.125 | 24.900 |
| 60 | 24.196 | 24.111 | 31.757 | 33.681 | 34.151 | 34.200 |
| 75 | 33.352 | 32.785 | 44.283 | 47.588 | 48.626 | 50.300 |
| 90 | 48.858 | 46.837 | 64.708 | 70.362 | 73.046 | 83.600 |
| 100 | 69.407 | 64.037 | 91.975 | 104.954 | 115.713 | |

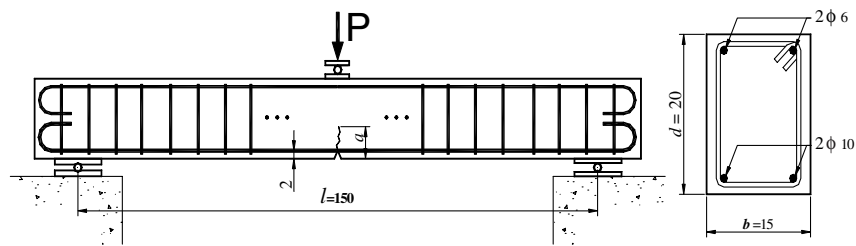
Tabela 7.3: Vrednosti horizontalnog pomeranja napadne tačke sile P u zavisnosti od intenziteta sile i vrste elementa

nelinearnog ponašanja sistema pri intenzitetu opterećenja od $P \approx 70kN$, dok je kod $NI4F$ početak nelinearnog ponašanja uočen pri intenzitetu opterećenja od $P \approx 60kN$.

7.3 Model armiranobetonske grede

U cilju verifikacije elemenata i materijala pri modeliranju armiranobetonske grede iskorišćeni su eksperimentalni i računski rezultati sprovedeni u okviru projekta I.5.1392, finansiranog od strane Ministarstva za nauku i tehnologiju R.S. U okviru navedenog projekta, izvršeni su eksperimenti na armiranobetonskim gredama opterećivanih do loma. Rezultati ovog istraživanja su publikovani u radovima [5] i [6].

Pri eksperimentu su dve serije od po četiri grede opterećivane do loma. Pri eksperimentu su registrovani ugibi i propagacija prsline. U jednoj seriji, primenjena je glatka a u drugoj rebrasta armatura. Dimenzije grede su prikazane na skici 7.4.



Slika 7.4: Model armiranobetonske proste grede

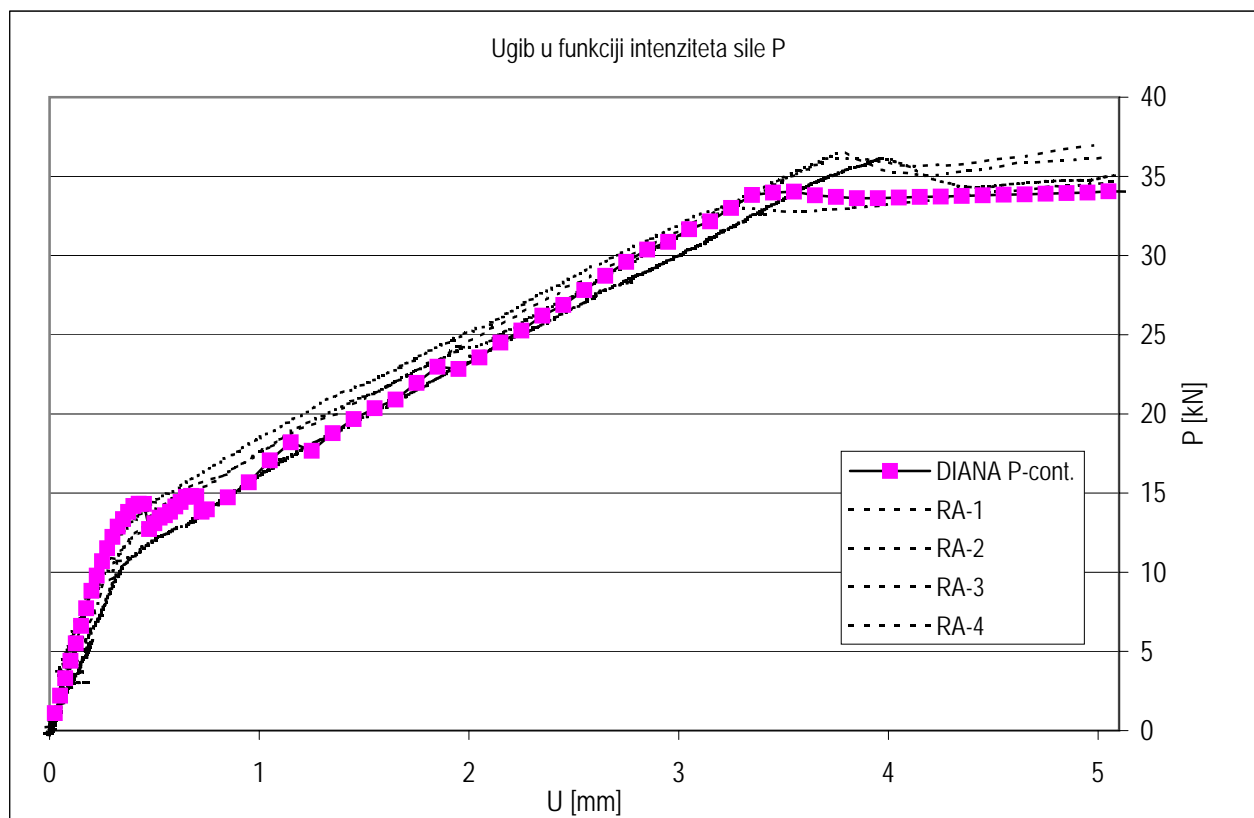
Karakteristike materijala su eksperimentalno utvrđene: čvrstoća betona $f_{cm} = 33MPa$, granica tečenja čelika: $\sigma_y = 460MPa$. Dijagram izmerenog ugiba u zavisnosti od intenziteta sile za četiti grede armirane rebrastom armaturom je prikazan na slici 7.5 isprekidanom linijom. Prema navedenoj literaturi, primenom programa DIANA su sračunate vrednosti ugiba i rezultati su prikazane na slici 7.5, linijom sa kvadratićima.

Korišćenjem osobine simetrije, greda je modelirana sa pet elemenata štapa, kao što je prikazano na slici 7.6. Svi štapovi su imali istu dužinu $0.15m$. Poprečni presek je modeliran kao kompozicija tri preseka (sl.7.6.c):

- Pravougaona površina poprečnog preseka, dimenzija $0.15 \times 0.2m$ je podeljen na 30 elementarnih površina, (10 u pravcu z ose i 3 u pravcu y ose). Ovom površinom je modeliran betonski deo preseka.
- Pravougaoni deo površine $15.7cm^2$, sa koordinatom težišta $z_T = 8cm$ - Ovim delom površine je modeliran uticaj armature u donjoj zoni ($2R\phi 10$)
- Pravougaoni deo površine $5.7cm^2$, sa koordinatom težišta $z_T = -8cm$ - Ovim delom površine je modeliran uticaj armature u gornjoj zoni ($2R\phi 6$).

Na betonskom delu poprečnog preseka je primenjen materijal *Concrete02*. Vrednost graničnog napona pri pritisku je usvojena kao u radu [6] i iznosila je $\sigma_{pc} = f_{pc} = -33MPa$. Vrednost graničnog napona pri zatezanju σ_t nije bila poznata. Zbog toga su u modelima primenjen tri vrednosti $\sigma_t = f_{tc} = 3.5MPa$, $f_{tc} = 3MPa$ i $f_{tc} = 2.5MPa$. Vrednosti ostalih parametara koji determinišu karakteristike ovog složenog materijala su ostale standardne (*default*) vrednosti : $\epsilon_{pc} = -0.002$, $\sigma_{pcu} = 0.2 \cdot \sigma_{pc}$, $\epsilon_{pcu} = 3 \cdot \epsilon_{pc}$, $\lambda = 0.3$ i $E_{ts} = (\sigma_{pc} - \sigma_{pcu}) / (\epsilon_{pcu} - \epsilon_{pc})$.

Karakteristike armature su eksperimentalno utvrđene: $E = 210GPa$, $\sigma_y = 460MPa$. Umesto idealno elastoplastičnog materijala, primenjen je elastoplastičan materijal sa ojačanjem



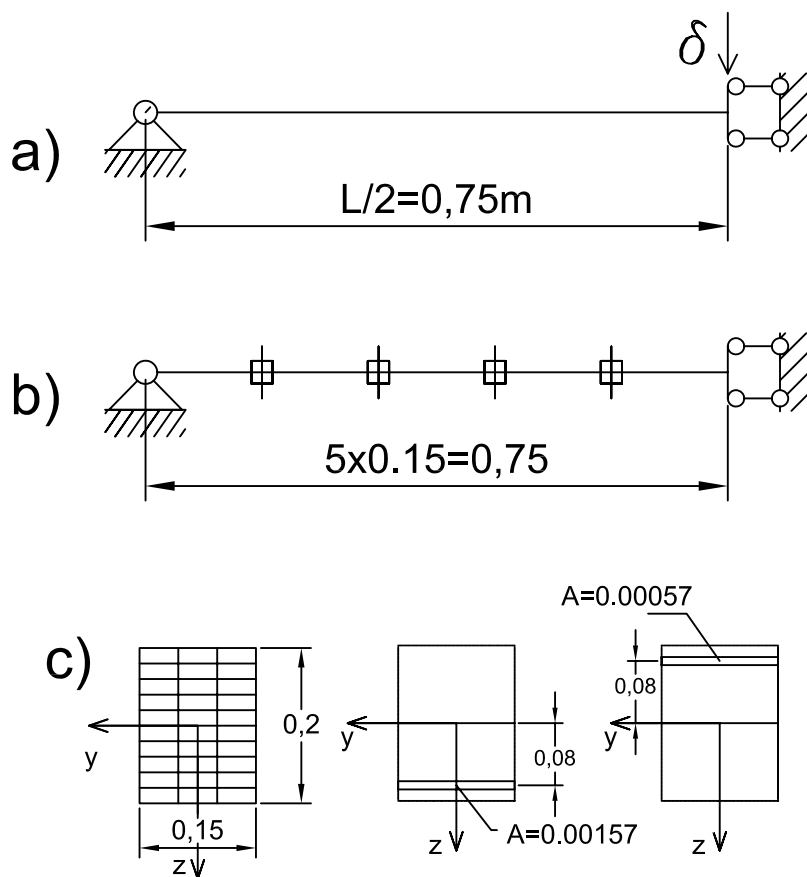
Slika 7.5: Izmerene vrednosti ugiba, u funkciji intenziteta sile i sračunate vrednosti programom DIANA

koji je formiran paralelnim povezivanjem idealno elastoplastičnog materijala sa idealno elastičnim materijalom male krutosti. U svim modelima, granica plastifikacije elastoplastičnog materijala je bila 460MPa , dok je moduo elastičnosti u zavisnosti od modela imao vrednosti zbira modula oba paralelno povezana elementa : $210 + 20 = 230\text{MPa}$ odnosno $190 + 20 = 210\text{MPa}$.

Problem nestabilnosti, koji je posledica primene materijala (*Concrete02*) je rešen načinom opterećivanja. Opterećenje je nanošeno zadavanjem deformacije na mestu delovanja sile. Primljena su dva postupka rešavanja nelinearnog problema: *Metoda početnog napona* i *Modifikovan Newton-Raphson-ov postupak*.

7.3.1 Postupak metodom *početnog napona*

U ovom postupku su matrice krutosti svih štapova Konstantne i odgovaraju početnom stanju. Prema literaturi [26], ova metoda se koristi radi ubrzanja postuka proračuna jer se matrice krutosti elemenata ne sračunavaju u svakoj iteraciji. U ovom radu, metoda je primljena da bi se izbegla eventualna nestabilnost uzrokovana padom krutosti. Umesto izmene postupka proračuna sistema , modifikovao je ponašanje objekta štapa. Izmena se svodila na upotrebu početne krutosti preseka pri svim iteracijama. To je postignuto izmenom u kodu naredbe *commit()* u objektu poprečnog preseku.



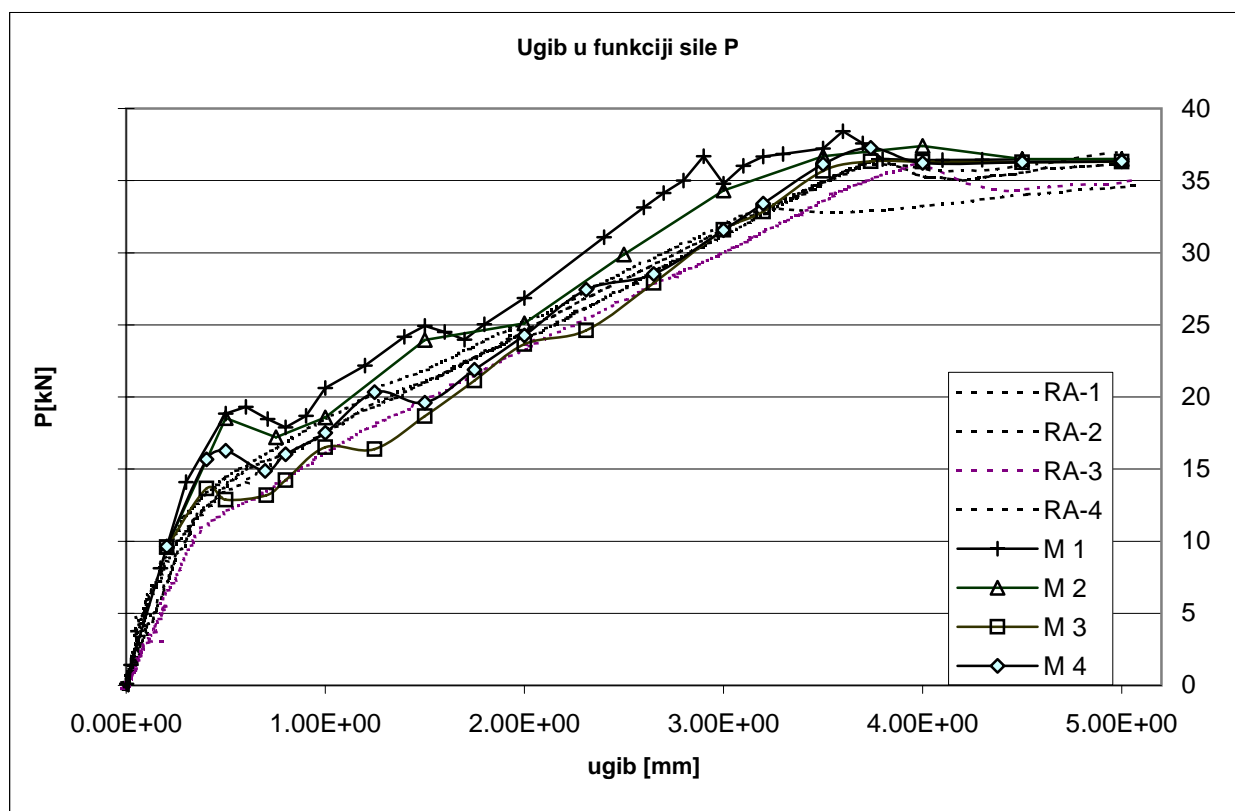
Slika 7.6: Model koji se analizira, podela na štapove i podela površine poprečnog preseka

Standardna funkcija poruke *commit* objekta poprečnog preseka

Iniciranjem komande *commit()* objekat poprečnog preseka prosledi svim materijalima koje sadrži komandu *commit()*, a potom, izmeni svoj status (promenljivu *bCommittedStateEvaluated* izjednači sa *false*). Usled toga, sledeći put, kad bilo koji deo programa zatraži od objekta poprečnog preseka njegovu matricu krutosti, on će najpre proveriti status ove promenljive. U slučaju da je on *true*, poprečni presek neće integrisati svoju matricu krutosti, već će vratiti prethodno sračunatu i sačuvanu vrednost te matrice. U slučaju da je utvrđeno novo stanje generalisanih deformacija u poprečnom preseku, (pozivom komande *commit()*) stanje ove promenljive će biti *false* i pri zahtevu za matricom krutosti poprečnog preseka objekat će sračunati matricu krutosti koja odgovara novoutvrđenom stanju, sačuvati je i izmeniti stanje svoje promenljive *bCommittedStateEvaluated* (izjednačiti ga sa *true*) i na buduće zahteve za matricom krutosti prosledjivati već sračunatu matricu krutosti.

Izmenjena funkcija *commit* objekta poprečnog preseka

Izmenjena funkcija neće izjednačavati vrednost promenljive *bCommittedStateEvaluated* sa *false*. Time će se obezbediti da objekat poprečnog preseka svoju krutost sračuna samo pri prvom pozivu. Tokom proračuna će se koristiti ta, početna matrica krutosti preseka.



Slika 7.7: Sračunate vrednosti ugiba, u funkciji intenziteta sile primenom *metode početnog napona*

Na taj način, izmenom komande *commit()*, nelinearni postupak je postao postupak u kome će matrice krutosti elemenata biti konstantne i jednake početnim. Postupak je sličan postupku koji se u literaturi [26] naziva *postupak početnog napona* ali se izmena nije vršila u algoritmu proračuna već u objektu štapa. Pošto je presek tokom proračuna stalno imao istu krutost, nelinearnost je nastala kao rezultat nelinearnih statičkih uticaja koje je presek generisao. Ovi uticaji u nekim inkrementima ne dovode do konvergencije, ali po stabilizaciji procesa konvergencija se uspostavlja.

U konkretnom primeru, maksimalni broj iteracija u okviru jednog inkrementa je povećan na 200, uz kontrolu sume kvadrata neubalansiranog opterećenja. U slučaju da u iteracijama, suma kvadrata neubalansiranog opterećenja postane veća od sume u prethodnoj iteraciji, postupak se prekida.

Karakteristike materijala su varirane, kako bi se odredile vrednosti čvrstoće betona na zatezanje i modula elastičnosti čelika, za koje se dobijaju vrednosti ugiba bliske merenim. Analizirana su četiri modela kod kojih su varirane čvrstoća betona na zatezanje i moduo elastičnosti čelika:

- *M 1* Model u kome su usvojeni parametri : $\sigma_{fct} = 3.5MPa$ i $E = 210 + 20 = 230GPa$.
- *M 2* Model u kome su usvojeni parametri : $\sigma_{fct} = 3.5MPa$ i $E = 190 + 20 = 210GPa$.

- *M 3* Model u kome su usvojeni parametri : $\sigma_{fct} = 2.5MPa$ i $E = 190 + 20 = 210GPa$.
- *M 4* Model u kome su usvojeni parametri : $\sigma_{fct} = 3MPa$ i $E = 190 + 20 = 210GPa$.

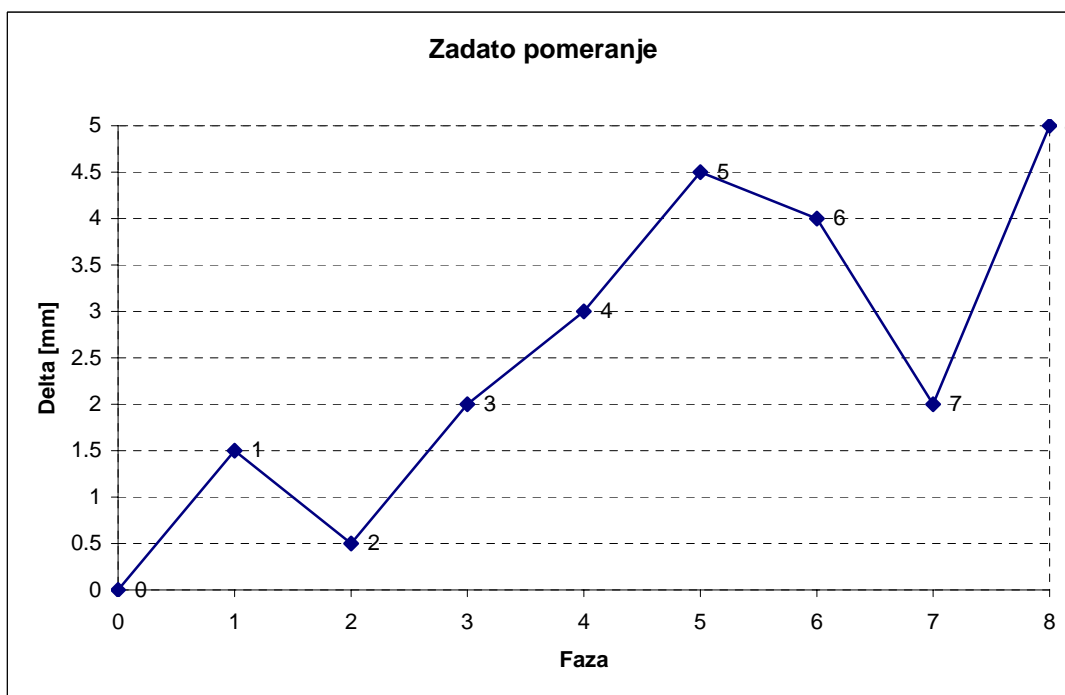
Grafički prikaz rezultata (dijagram ugiba u funkciji opterećenja), za ova četiri materijala su prikazani na slici 7.7. Na istoj slici su isprekidanim linijama prikazane eksperimentalno izmerene vrednosti.

Može se uočiti odredjeni stepen poklapanja sa eksperimentalno izmerenim vrednostima. Posebnu pažnju treba posvetiti parametru *čvrstoća betona na zatezanje*.

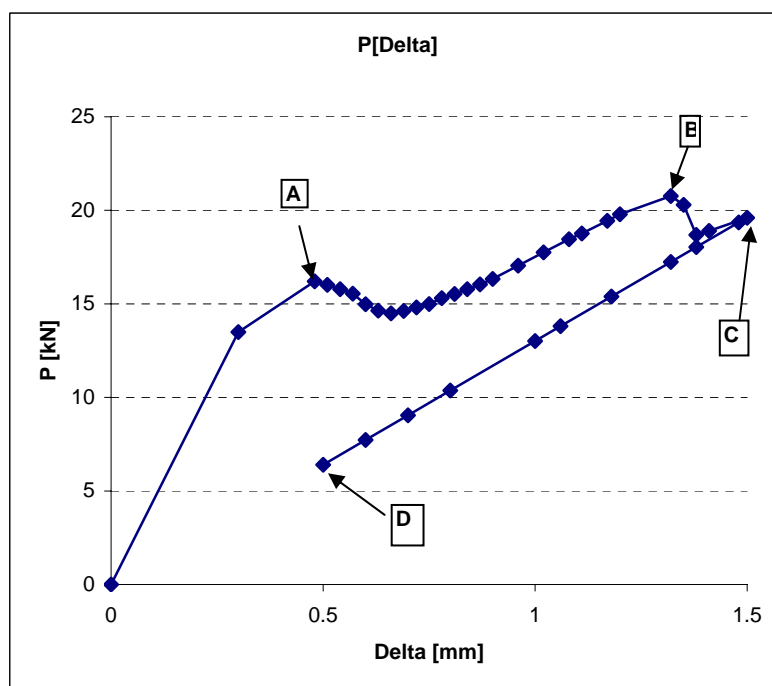
7.3.2 Modifikovan Newton-Raphson-ov postupak

Na modelu *M 4* je primenjen modifikovan Newton-Raphson-ov postupak. Opterećenje je nanošeno zadavanjem deformacije u pravcu delovanja sile. Svaka faza opterećenja je podeljena na 50 inkremenata. U ovom slučaju je praćeno ponašanje i pri rasterećenju, kao i broj iteracija u okviru jednog inkrementa.

Istorija opterećenja je prikazana na dijagramu 7.8. Na kraju prve faze, zadato pomeranje je iznosilo $U_1 = 1.5mm$. U drugoj fazi je vršeno rasterećenje, tako da je na kraju druge faze pomeranje napadne tačke sile iznosilo $U_2 = 0.5mm$. U trećoj, četvrtoj i petoj fazi je prirast zadatog pomeranja bio pozitivan a vrednosti deformacija na kraju faza su iznosile: $2mm$, $3mm$ i $4.5mm$. Rasterećenje je sprovedeno u dve faze, kako bi veličina inkrementa pobude na početku rasterećenja bila manja. Zbog toga su vrednosti zadatog pomeranja iznosila $U_6 = 4mm$ ($\Delta U = 0.5$) i $U_7 = 2mm$. Ponovno opterećenje je sprovedeno u jednoj fazi do vrednosti od $U_8 = 5mm$.



Slika 7.8: Intenzitet opterećenja izražen preko zadatog pomeranja po fazama

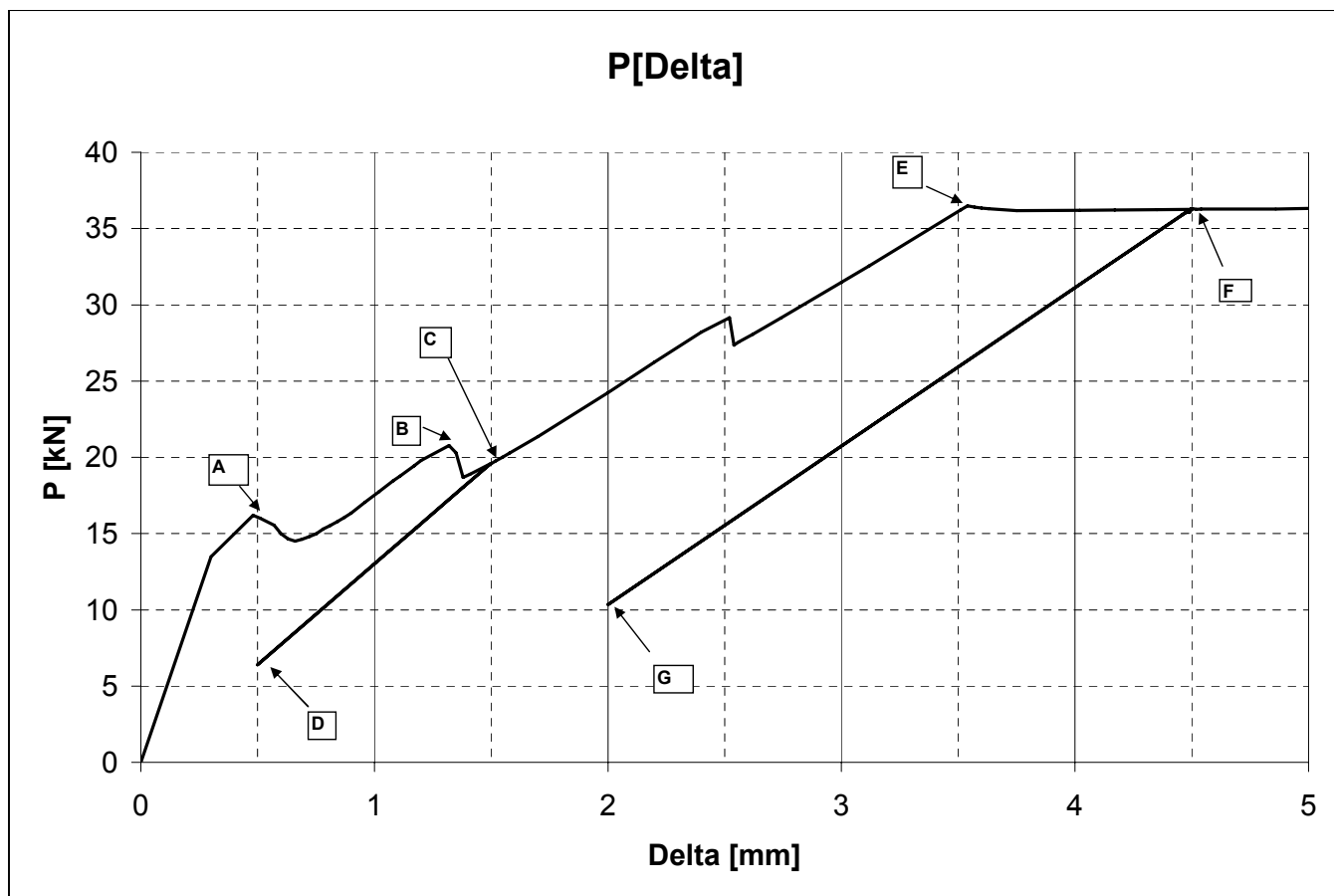
Slika 7.9: Dijagram sile P u funkciji pomeranja U u prve dve faze

Dijagram intenziteta sile u funkciji pomeranja u prve dve faze je prikazan na slici 7.9. Sa slike se može uočiti ponašanje u fazi rasterećenja (deo C-D), karakteristično za oštećenje. Kriva ima pravac ka koordinatnom početku. U slučaju potpunog rasterećenja se ne javlja zaostala deformacija, odnosno, nije došlo do plastičnog ponašanja. To znači da je nelinearnost posledica oštećenja materijala.

U ovom primeru je praćen i broj iteracija potreban da se ostvari konvergencija pri svakom inkrementu. Svaka faza je podeljena na 50 inkremenata. Tako je veličina inkrementa pomeranja u prvoj fazi iznosila $\Delta U_{1,i} = 1.5/50 = 0.03mm$ a u drugoj $\Delta U_{2,i} = 1/50 = 0.02mm$. Pri stabilnom ponašanju, broj iteracija po svakom inkrementu je bio manji od 15. U tačkama A i B na slici 7.9 je dolazilo do nestabilnosti, što se može uočiti i povećanjem broja iteracija. U tabeli 7.4 su prikazane vrednosti zadatog pomeranja, vrednosti sile i broj iteracija. Na levom delu tabele su karakteristične tačke (A i B). Možemo uočiti da neposredno nakon tačke A, broj iteracija dostiže 50, dok neposredno nakon tačke B, broj iteracija dostiže 75. Uprkos tome, uslov konvergecije u ovoj oblasti se postiže (suma kvadrata neubalansiranog opterećenja čvorova je manja od 10^{-3}).

Na slici 7.10 je prikazan dijagram sile u funkciji pomeranja za svih osam faza. Sa dijagrama se uočava, da po *plastifikaciji preseka* (nakon tačke E na dijagramu), pri rasterećenju se iskazuje ponašanje karakteristično za elastoplastične materijale, odnosno da je linija $F - G$ na dijagramu prava. Takodje se uočava da bi se pri potpunom rasterećenju javila zaostala plastična deformacija.

Pri rasterećenju iz tačke F, u prvom inkrementu se ni posle 200 iteracija ne postiže konvergencija. Da bi se smanjio inkrement, rasterećenje iz tačke F u G je podeljeno na dve faze, pri čemu je inkrement u prvoj fazi iznosio $\Delta U_{6,i} = 0.5mm/50 = 0.01mm$. U prvom inkrementu,

Slika 7.10: Dijagram sile P u funkciji pomeranja U u svim fazama

posle 200 iteracija, suma kvadrata neubalansiranog opterećenja čvorova je iznosila 161, ali se već nakon prvog inkrementa, proces stabilizovao i pri ostalim inkrementima (rasterećenju i ponovnom opterećenju na delu $F - G - F$), broj iteracija je bio manji od 10. Treba napomenuti da je konvergencija uspostavljena tek po smanjivanju inkrementa pri rasterećenju. To je u ovom primeru postignuto podelom faze rasterećenja na dve faze, od kojih je prva bila manja.

Ovaj numerički primer demonstrira efikasnost elemenata štapa pri modeliranju oštećenja i plastičnog ponašanja armiranobetonske grede. Naglašava se osetljivost nelinearnog algoritma proračuna na veličinu inkrementa i kriterijum konvergencije.

U slučaju da je tokom analize, došlo do plastifikacije materijala, promena smera uticaja može dovesti do divergencije. U zavisnosti od konkretnog slučaja i intenziteta inkrementa, postupak se može stabilizovati.

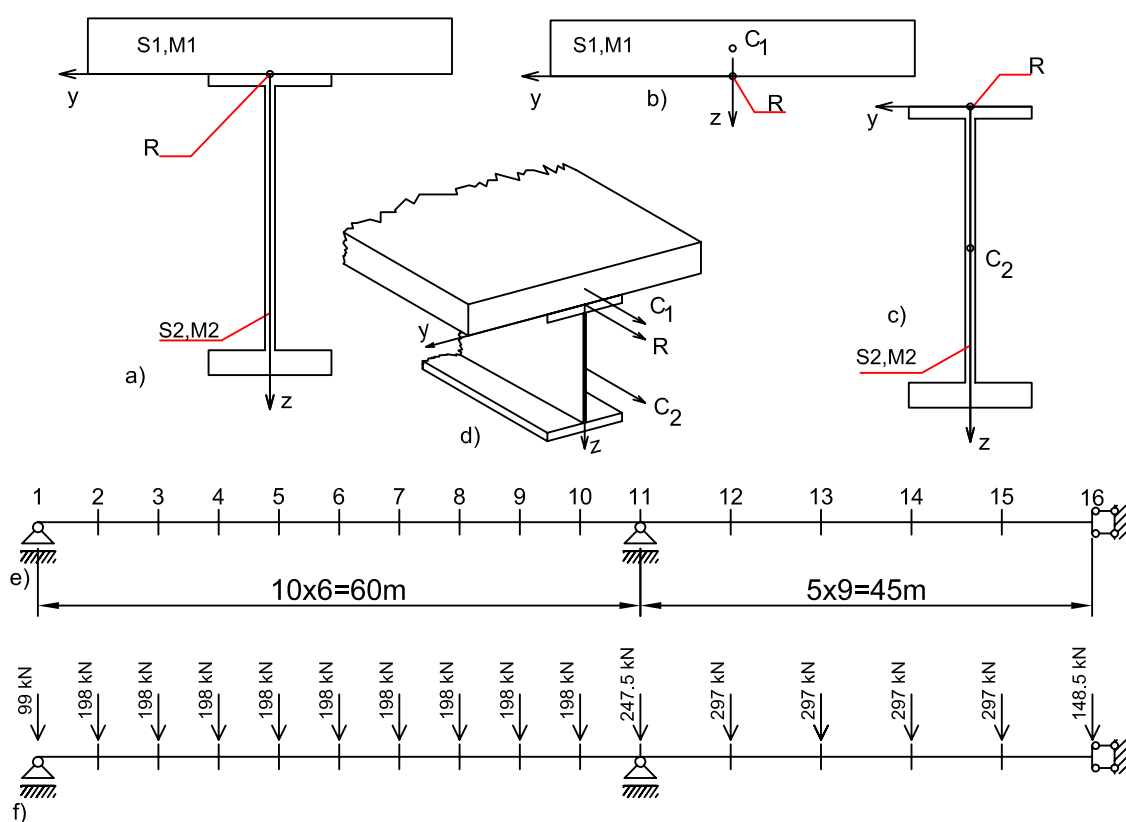
| | Pomeranje [mm] | P [kN] | broj iteracija |
|---|-------------------|-----------|-------------------|
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| A | 0.48 | 16.20646 | 13 |
| | 0.51 | 16.01394 | 50 |
| | 0.54 | 15.78146 | 38 |
| | 0.57 | 15.54854 | 32 |
| | 0.6 | 14.97882 | 61 |
| | 0.63 | 14.64002 | 40 |
| | 0.66 | 14.49474 | 29 |
| | 0.69 | 14.6189 | 20 |
| | 0.72 | 14.80646 | 17 |
| | 0.75 | 14.99386 | 16 |
| | 0.78 | 15.30572 | 12 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | 1.17 | 19.43972 | 21 |
| | 1.2 | 19.78806 | 22 |
| B | 1.32 | 20.7678 | 24 |
| | 1.35 | 20.2956 | 75 |
| | 1.38 | 18.6886 | 49 |
| | 1.41 | 18.89856 | 10 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| F | 4.5 | 36.2518 | 11 |
| | 4.49 | 36.0546 | 201 |
| | 4.48 | 36.1114 | 2 |

Tabela 7.4: Vrednosti sile koja odgovara ugibu i broj iteracija

7.4 Proračun spregnute konstrukcije

U ovom primeru se prikazuje analiza spregnute konstrukcije, efekti viskoznih deformacija i skupljanja. Primer potvrđuje mogućnosti modeliranja nosača primenom štapa spregnutog preseka kod koga se referentna osa ne poklapa sa težišnom.

Oblik konstrukcije je preuzet iz literature [17]. To je simetrični kontinualni nosač na tri polja, raspona $60 + 90 + 60m$, spregnutog poprečnog preseka. Poprečni presek se sastoji iz betonskog dela pravougaonog oblika, širine $385cm$ i visine $26cm$ (na slici 7.11.a obeležen sa $S1$) i čeličnog dela (na slici 7.11.a obeležen sa $S2$). Usvojen je položaj referentne ose štapa R na osi simetrije, na spoju betonskog i čeličnog dela. Vrednosti geometrijskih karakteristika i koordinata težišta u odnosu na referentnu osu R su prikazane u tabeli 7.5.



Slika 7.11: Spregnuti poprečni presek, položaj referentne ose u odnosu na presek i usvojeni položaj čvorova

Kako je nosač simetričan, analiza je vršena na polovini nosača. Položaj čvorova je prikazan na slici 7.11.e). Krajnje polje je podeljeno na 10 štapova dužine 6m, a polovina srednjeg raspona na 5 štapova dužine 9m.

Usvojene karakteristike materijala su:

- Čelik - Idealno elastičan materijal, modula elastičnosti $E = 210GPa$.

- *Beton* - Linearno visko elastičan materijal, modula elastičnosti $E = 30GPa$. Viskozne deformacije i skupljanje su određene izrazima iz standarda *Evrokod 2*. Usvojene su vrednosti parametara: $f_{cm} = 30MPa$, $h = 243mm$, $RH = 80\%$ i cement klase S .

| karakteristike štapova između čvorova | A $\times 10^{-2}[m^2]$ | z_C [m] | I_y $\times 10^{-4}[m^4]$ | I_z $\times 10^{-4}[m^4]$ |
|--|------------------------------|--------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1-2-3 | 5.02 | 1.17 | 336.6 | 5.44 |
| 3-4, 7-8 | 6.22 | 1.36 | 429.5 | 9.02 |
| 4-5-6 | 7.94 | 1.54 | 519.3 | 13.67 |
| 8-9 | 6.952 | 1.48 | 507.6 | 11.00 |
| 9-10 | 8.99 | 1.99 | 1053.9 | 13.67 |
| 10-11 | 12.48 | 2.98 | 2970.5 | 17.33 |
| 11-12 | 9.172 | 2.08 | 1170.3 | 13.67 |
| 12-13 | 7.218 | 1.59 | 615.2 | 11.00 |
| 13-14 | 8.36 | 1.67 | 646.7 | 14.97 |
| 14-15-16 | 10.62 | 1.83 | 743.9 | 20.87 |
| betonski deo | 100.1 | -0.13 | 56.38 | 12364.43 |

Tabela 7.5: Vrednosti geometrijskih karakteristika i položaj težišta u odnosu na referentnu osu

Nosač je izložen sledećim uticajima:

- *Jednako podeljeno opterećenje* q , konstantnog intenziteta u toku vremena $q = 33kN/m$. Ovo opterećenje je redukovano na čvorove i prikazano na slici 7.11.f. Opterećenje je naneto u trenutku $t_0 = 9$ dana. Efekti vremenskih deformacija usled ovog uticaja su određeni uz *isključivanje skupljanja* materijala. Protok vremena je zadavan sistemu i analizirano je stanje nakon 10000 dana.
- *Skupljanje betona* ε_s - model zadate geometrije i karakteristika materijala je izložen uticajima protoka vremena. Pti zadavanju nove vrednosti 'vremena' u materijalu se generiše deformacija skupljanja. Usled deformacije skupljanja, u modelu se javljaju statički uticaji a time i dodatni efekti viskoznih deformacija.

7.4.1 Nelinearan postupak proračuna

Nelinearnost u ovom postupku je posledica neelastičnih, viskoznih deformacija materijala koje se razvijaju tokom vremena. Intenzitet viskoznih deformacija zavisi od istorije napona. Za poznate vrednosti istorije napona, primenom izraza (6.8), određujemo prirast neelastičnih deformacija tečenja.

Postupak nelinearnog proračuna izložen u poglavlju 3.2.1 se modifikuje. U ovom slučaju se, pre početka iterativnog postupka, u svakoj fazi odredi inkrement vremena. Ukoliko je faza i završena u trenutku T_i a sledeća u trenutku T_{i+1} , prirast vremena u fazi $i+1$ je $\Delta T_{i+1} = T_{i+1} - T_i$. Prirast vremena u fazi se deli na ukupan broj inkremenata. Izmena u kodu je prikazana instrukcijama koje su podvučene. Uočavamo da se po određivanju vrednosti inkrementa vremena, na početku svakog inkrementa, poziva `setTime2Frames()`.

```

double Ts=getStageTime(iStage);
double To=CurentTime;
double dT_inc=(Ts-To)/nOfSteps;
for (int incNumb=0; incNumb < nOfSteps ; incNumb++){
    if (dT_inc > 0) { // ima prirasta vremena
        CurentTime+=dT_inc;
        setTime2Frames();
    }
    LamdaStage=(incNumb+1)*DLamdaStage;
    setStageLamdaRES_Displ(); // Postavi pomeranje oslnaca
    setFrameEndTrialDisp(); // to pomeranje saopsti stapovima
    int nIt= 1;
    do{
        createTangent();
        ...
    }
}

```

Razlika u odnosu na klasičan pristup proračuna je u činjenici da se objektima šalju poruke na osnovu kojih oni menjaju svoja stanja (mutiraju). Iniciranje funkcije *setTime2Frames()*, sistem svim elementima šalje poruku o protoku vremena *setTime()*. Svi elementi svojim poprečnim preseccima šalju poruku na osnovu koje se materijalima u poprečnim preseccima saopštava trenutna vrednost vremena. Materijali koji imaju viskozne karakteristike će promeniti svoje unutrašnje stanje na osnovu te poruke, iniciranjem niza komandi prikazanih u okviru funkcije *setTime()* viskoznih materijala na strani 116. Stanje objekata je promenjeno, ali će sistem za to saznati tek kada sledeći put od svojih komponenti zatraži informaciju o rezidualnim uticajima.

Ovako modifikovan postupak se može primenjivati i u slučajevima kad su sve faze opterećenja obavljene u istom vremenskom trenutku. U tom slučaju, inkrement vremena će biti jednak nuli pa se funkcija *setTime2Frames()* neće pozivati.

Ako se u modelu koriste linearni materijali, u okviru svakog inkrementa će biti samo dve iteracije. Po zadatom vremenskom inkrementu, u prvoj iteraciji će se odrediti tangentna matrica krutosti, sračunati rezidualno opterećenje i proveriti suma kvadrata slobodnih članova matrice krutosti sistema. U slučaju da je bilo viskoznih deformacija u materijalu, kriterijum konvergencije neće biti ispunjen. Pošto se radi o linearnom sistemu, već u sledećoj iteraciji će biti ispunjen uslov konvergencije.

7.4.2 Modeliranje nosača grednim elementima

Analizom modela su kontrolisani efekti odstupanja referentne ose od težišne ose. Usvojen je položaj referentne tačke na osi simetrije preseka, na spoju betonskog i čeličnog dela. Analizirana su dva modela ovog nosača:

- *Model SP* Spregnuti presek - u ovom modelu, štapovi su modelirani korišćenjem spregnutog preseka, prikazanog na slici 7.11.a. Jedan deo preseka je od betona a drugi od čelika.
- *Model 2HP* Svaki pojedini štap je modeliran sa dva štapa koji imaju homogene poprečne preseke. Referentne ose oba štapa se poklapaju sa osom na spoju ova dva preseka.

Poprečni presek betonskog štapa je prikazan na slici 7.11.b a čeličnog štapa na slici 7.11.c. Ovakav postupak modeliranja omogućava da se analizira preraspodela uticaja tokom vremena.

Deformacije nosača i statički uticaji su redukovani na referentnu osu R .

Opterećenje je analizirano u pet faza. Početni trenutak od 9 dana je preuzet iz literature [17]. Efekti viskoznih deformacija i skupljanja su najizraženiji na početku procesa. Zato su usvojena vremena faza: 9, 15, 28, 90 i 10000 dana.

| Br.faze | T [dani] | q [kN/m] | ϵ_s $\times 10^{-4}$ |
|---------|-------------|---------------|----------------------------------|
| 1 | 9 | 33 | 0.00 |
| 2 | 15 | 33 | -0.343 |
| 3 | 28 | 33 | -0.541 |
| 4 | 90 | 33 | -1.098 |
| 5 | 10000 | 33 | -2.403 |

Tabela 7.6: Vrednosti intenziteta jednakopodeljenog opterećenja i skupljanja u fazama

U tabeli 7.6 je prikazano i opterećenje. U slučaju jednakopodeljenog opterećenja q , intenzitet opterećenja tokom vremena je konstantan. Pri promeni faza, nosaču je saopštavano vreme na osnovu kojeg je generisana viskozna deformacija u materijalu a time i rezidualni uticaji u elementima.

Pri analizi efekata skupljanja, nosač nije opterećen a nosaču je zadavana informacija o protoku vremena na osnovu koje je materijal generisao deformaciju skupljanja koja je uzrokovala pojavu rezidualnih sila. Nosaču (a time i materijalu) je kao pobuda zadavana vrednost vremena a na osnovu izraza definisanih standardom, materijal je generisao deformaciju skupljanja koja je prikazana u četvrtoj koloni tabele 7.6.

Karakteristični uticaji odredjeni modelom *Model SP* su prikazani u tabeli 7.7:

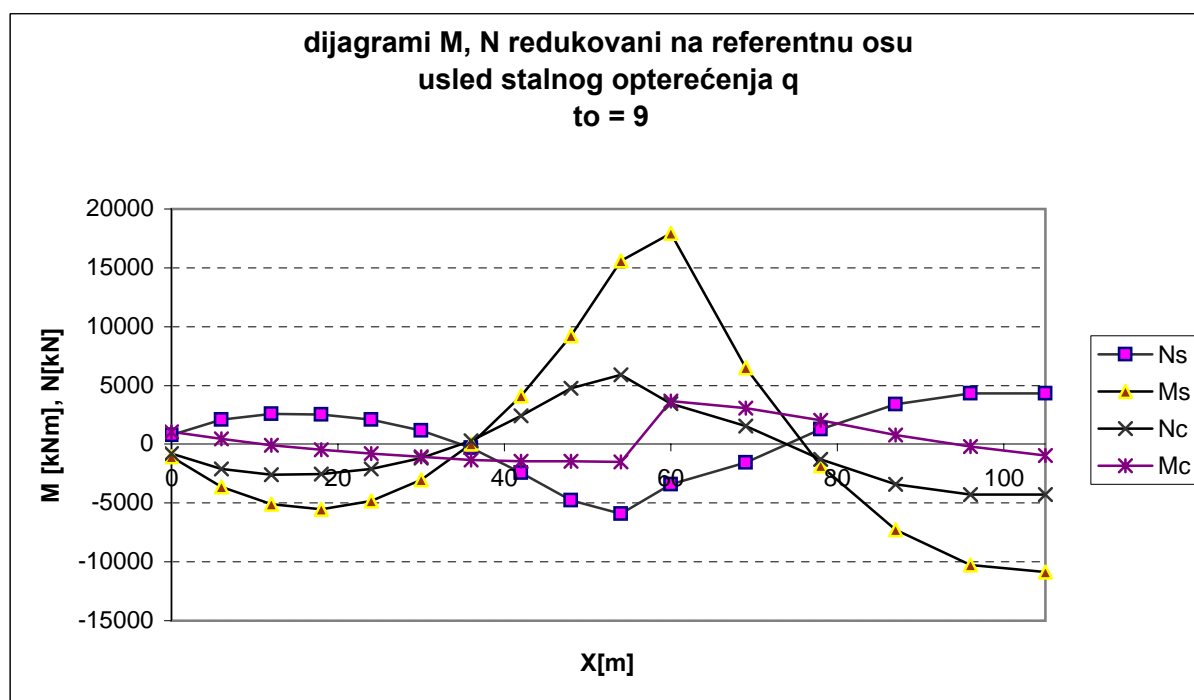
| Br.faze | T [dani] | usled jed. pod. opt. q | | | usled skupljanja ϵ_s | | |
|---------|-------------|--------------------------|----------------------|----------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| | | $U_{16}(q)$ [mm] | $M_{10}(q)$ [kNm] | $M_{16}(q)$ [kNm] | $U_{16}(\epsilon_s)$ [mm] | $M_{10}(\epsilon_s)$ [kNm] | $M_{16}(\epsilon_s)$ [kNm] |
| 1 | 9 | -116 | 21602.8 | -11809.7 | | | |
| 2 | 15 | -134 | 21642.8 | -11769.7 | 0.466 | 245.30 | 245.30 |
| 3 | 28 | -140 | 21657.3 | -11755.2 | 1.267 | 628.57 | 628.57 |
| 4 | 90 | -151 | 21681.6 | -11730.9 | 3.536 | 1622.38 | 1622.38 |
| 5 | 10000 | -183 | 21747.3 | -11665.2 | 8.963 | 3459.73 | 3459.73 |

Tabela 7.7: Vrednosti ugiba na osi simetrije (U_{16}), momenta savijanja iznad oslonca (M_{10}) i momenta savijanja na osi simetrije (M_{16}), usled stalnog opterećenja q tokom vremena i usled skupljanja ϵ_s , u modelu *Model SP*

Analizom vrednosti datih u tabeli 7.7 se uočava da pri konstantnom opterećenju q dolazi do prirasta deformacija (koji je reda veličine 50 %) ali je veoma mala promena intenziteta statičkih uticaja. Promena statičkih uticaja u spregnutom preseku je reda veličine oko 2% .

Efekti preraspodele uticaja unutar poprečnog preseka su analizirani u modelu *2HP*. Deformacija modela (pomeranje čvorova) je identična deformacijama u *Model SP*. Zbirni statički uticaji u oba štapa, redukovani na referentnu osu, su bili jednaki uticajima u *Model SP*. Intenziteti normalnih sila i momenata savijanja u betonskom i čeličnom delu spregnutog preseka (u ovom slučaju u betonskom i čeličnom štapu) su prikazani na slikama 7.12, 7.13 i 7.14. Pri tome su korišćene oznake:

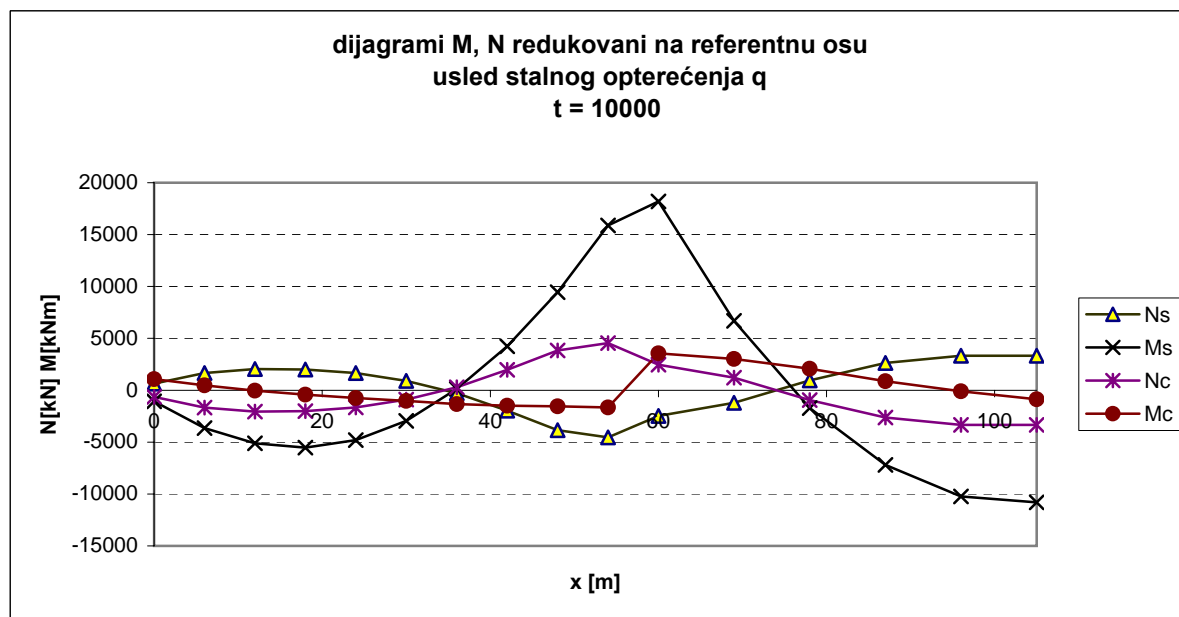
- N_s - normalna sila u čeličnom delu;
- M_s - moment savijanja u čeličnom delu;
- N_c - normalna sila u betonskom delu i
- M_c - moment savijanja u betonskom delu.



Slika 7.12: Statički uticaji usled opterećenja q u betonskom i čeličnom štapu redukovani na referentnu osu u trenutku $t_o = 9$

Pri analizi napona u presecima štapa, treba imati na umu da su članovi matrice krutosti ovih štapova određeni analitičkim izrazima. Pri njihovoj numeričkoj integraciji stanje sila i deformacija preseka na sredini štapa je primenjeno na celoj dužini štapa. Zato se efekti karakteristični za spregnuti presek mogu analizirati na presecima na sredinama štapova. U tabeli 7.8 su prikazane vrednosti statičkih uticaja za presek 10 – 11 na sredini štapa između čvorova 10 i 11, kao i presek 15 – 16, na sredini štapa između čvorova 15 i 16.

Pri obelježavanju momenata savijanja, normalnih sila i napona u tabeli su korišćeni indeksi. Normalne sile, momenti savijanja i naponi u betonskom delu preseka imaju donji indeks

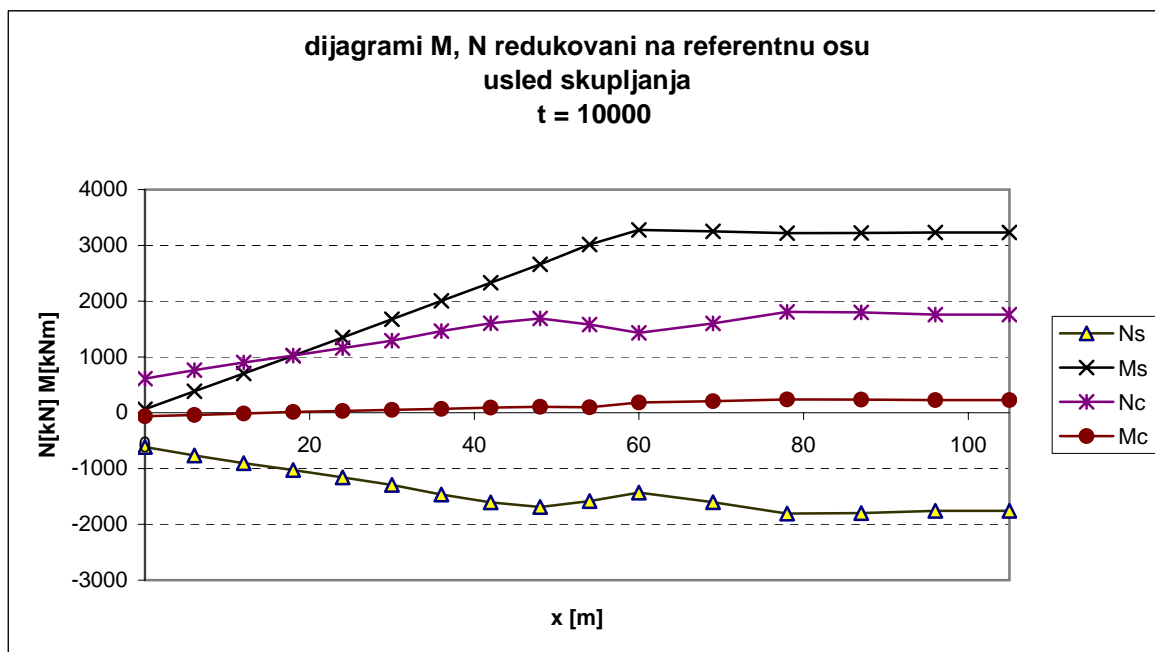


Slika 7.13: Statički uticaji usled opterećenja q u betonskom i čeličnom štapu, redukovani na referentu osu u trenutku $t=10000$

” c ” a u čeličnom ” s ”. Normalna sila i moment savijanja redukovani na referentu osu, imaju gornji indeks R dok se gornjim indeksom C obeležava uticaj redukovani na težište odgovarajućeg dela poprečnog preseka. Naponi na gornjoj ivici preseka, imaju gornji indeks o , dok naponi na donjoj ivici preseka imaju gornji indeks u .

U krajnjoj desnoj koloni tabele 7.8 su vrednosti napona preuzete iz literature [17] u presecima u čvorovima 10 i 16. U tabeli se mogu uočiti izvesna odstupanja. Dominantni uzroci tih odstupanja su :

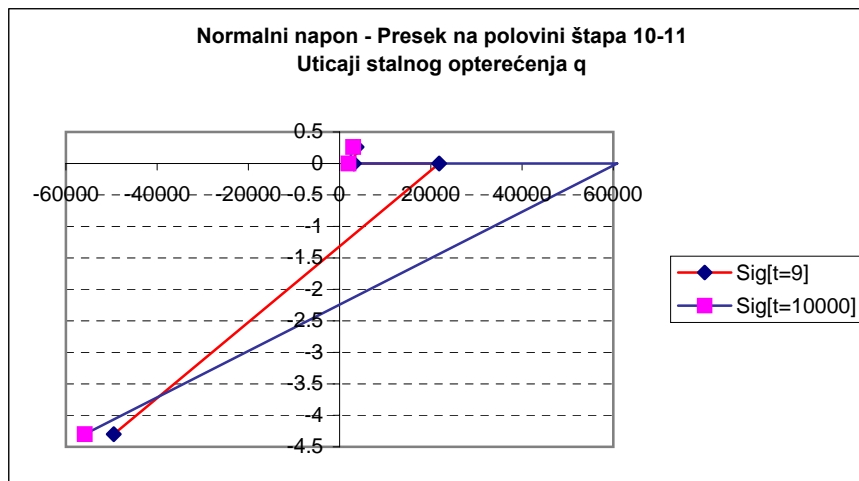
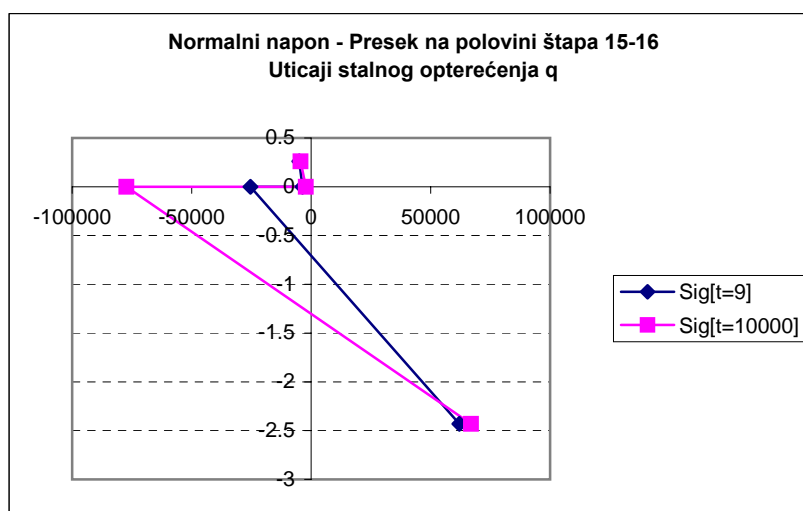
- *Razlika u položaju preseka* u kojima se vrši analiza. U navedenoj literaturi, analiza se vrši u presecima na samim čvorovima, zbog čega se i intenziteti statičkih uticaja razlikuju. U preseku na polovini raspona su manje razlike u naponima jer su i razlike u statičkim uticajima (silama) izmedju položaja dva preseka manje.
- *Usvojene vrednosti koeficijenta* U postupku koji je primenjen u navedenoj literaturi, se usvajaju koeficijenti koji se očitavaju sa dijagrama. Pri tome je vrednost koeficijenta starenja χ usvojena za starost od 7 dana jer vrednost za starost od 9 dana nije bila dostupna. U postupku primenjenom u ovom radu, sprovodi se numerička integracija deformacije tečenja na osnovu istorije napona.
- Različita vrednost dilatacije skupljanja je takodje uzrok odstupanja rezultata. U navedenoj literaturi se koristi dilatacija skupljanja za 10000 dana od -25.14×10^{-5} , dok je program na osnovu izraza definisanih standardom, uticaje određivao za dilataciju skupljanja od -2.403×10^{-4} što dovodi do razlike od oko 4%.
- Primena različitih metoda u određivanju uticaja u statički neodređenom nosaču je jedan od uzroka odstupanja. U navedenoj literaturi, pri rešavanju statičkih nepoznatih je

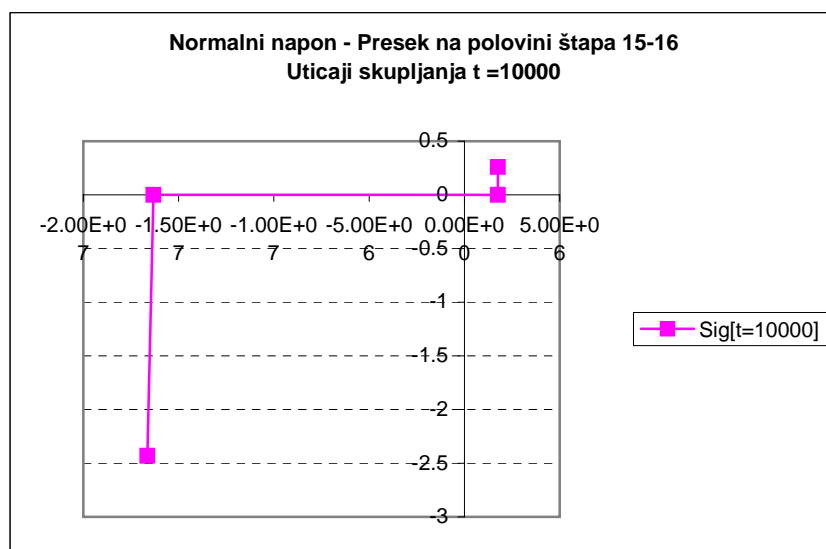


Slika 7.14: Statički uticaji u betonskom i čeličnom štapu redukovani na referentnu osu u trenutku $t=10000$

korišćena metoda sila i pri tom su zanemareni efekti transverzalnih sila na deformaciju nosača. Model štapa koji je primenjen u ovom radu ne zanemaruje ove efekte.

Vrednosti normalnog napona u zavisnosti od z koordinate u karakterističnim presecima su prikazani u početnom trenutku i u trenutku $t = 10000$ dana, na skicama.

Slika 7.15: Dijagram napona na preseku 10-11 usled q u $t = 9$ i $t = 10000$ Slika 7.16: Dijagram napona na preseku 15-16 usled q u $t = 9$ i $t = 10000$



Slika 7.17: Dijagram napona na preseku 15-16 usled skupljanja u t=10000

| Poprečni presek | T | statički uticaji usled jed. pod. opt. q | | Normalni napon [MPa] | Normalni napon, prema lit. [MPa] |
|-----------------|-------|--|---|--|----------------------------------|
| | | uticaji redukovani referentnu osu R | uticaji redukovani na težišne ose C_1 i C_2 | | |
| 10-11 | 9 | $N_c^R = 3426.57kN$ $M_c^R = -458.755kNm$ | $N_c^C = 3426.57kN$ $M_c^C = -13.30kNm$ | $\sigma_c^o = 3.73$ $\sigma_c^u = 3.12$ | 4.21 3.24 |
| | | $N_s^R = -3426.57kN$ $M_s^R = -15129.75kNm$ | $N_s^C = -3426.57kN$ $M_s^C = -4905.06kNm$ | $\sigma_s^o = 21.8$ $\sigma_s^u = -49.5$ | 24.28 -68.52 |
| | 10000 | $N_c^R = 2467.67kN$ $M_c^R = -342.56kNm$ | $N_c^C = 2467.67kN$ $M_c^C = -21.76kNm$ | $\sigma_c^o = 2.97$ $\sigma_c^u = 1.96$ | 1.57 1.56 |
| | | $N_s^R = -2467.67kN$ $M_s^R = -15390.45kNm$ | $N_s^C = -2467.67kN$ $M_s^C = -8027.06kNm$ | $\sigma_s^o = 60.9$ $\sigma_s^u = -55.9$ | 59.56 -76.08 |
| 15-16 | 9 | $N_c^R = -4300.81kN$ $M_c^R = 588.087kNm$ | $N_c^C = -4300.81kN$ $M_c^C = 28.98kNm$ | $\sigma_c^o = -4.96$ $\sigma_c^u = -3.63$ | -4.73 -3.41 |
| | | $N_s^R = 4300.81kN$ $M_s^R = 10553.4kNm$ | $N_s^C = 4300.81kN$ $M_s^C = 2676.51Nm$ | $\sigma_s^o = -25.4$ $\sigma_s^u = 62.0$ | -24.24 62.77 |
| | 10000 | $N_c^R = -3331.43kN$ $M_c^R = 480.8kNm$ | $N_c^C = -3331.43kN$ $M_c^C = 47.8kNm$ | $\sigma_c^o = -4.43$ $\sigma_c^u = -2.23$ | -2.48 -2.41 |
| | | $N_s^R = 3331.43kN$ $M_s^R = 10516.1kNm$ | $N_s^C = 3331.43kN$ $M_s^C = 4414.62kNm$ | $\sigma_s^o = -77.3$ $\sigma_s^u = 66.9$ | -72.64 64.72 |
| | | statički uticaji usled skupljanja | | | |
| 10-11 | 10000 | $N_c^R = 1431.05kN$ $M_c^R = -183.34kNm$ | $N_c^C = 1431.05kN$ $M_c^C = 2.695kNm$ | $\sigma_c^o = 1.37$ $\sigma_c^u = 1.49$ | 2.20 2.24 |
| | | $N_s^R = -1431.05kN$ $M_s^R = -3276.38kNm$ | $N_s^C = -1431.05kN$ $M_s^C = 993.79Nm$ | $\sigma_s^o = -21.4$ $\sigma_s^u = -7.00$ | -17.98 -8.36 |
| 15-16 | 10000 | $N_c^R = 1758.84kN$ $M_c^R = -228.75kNm$ | $N_c^C = 1758.84kN$ $M_c^C = -0.1048kNm$ | $\sigma_c^o = 1.76$ $\sigma_c^u = 1.75$ | 2.12 2.14 |
| | | $N_s^R = -1758.84kN$ $M_s^R = -3230.97kNm$ | $N_s^C = -1758.84kN$ $M_s^C = -9.676kNm$ | $\sigma_s^o = -16.3$ $\sigma_s^u = -16.6$ | -19.57 -17.9 |

Tabela 7.8: Statički uticaji, redukovani na ref. osu R i težište C odnosno normalni naponi na gornjoj i donjoj ivici dela preseka

Glava 8

Rezime

8.1 Rezime

Predmet ovog rada je primena objektno orijentisanog pristupa kao novog načina analize i modeliranja postupka rešavanja problema. Analizirani su efekti materijalne nelinearnosti na linijkom nosaču. Formirani su objekti koji omogućavaju modeliranje i numeričko rešavanje problema vezanih za materijalne nelinearnosti. Rezultat rada je objektni model proračuna na osnovu koga je napisan računarski program. Rezultati programa su verifikovani numeričkim primerima proračuna konstrukcija.

U okviru rada su ostvareni sledeći ciljevi:

1. Analizirane su mogućnosti i prednosti primene objektno orijentisanog pristupa pri rešavanju problema teorije konstrukcija.
2. Izvedeni su analitički izrazi koji opisuju veze između statičkih i deformacijskih veličina za poprečne preseke kod kojih se referentna osa ne poklapa sa težišnom osom niti sa osom smicanja.
3. Izvedeni su analitički izrazi za članove matrice krutosti štapa čija se referentna osa ne poklapa sa težišnom osom poprečnog preseka niti sa osom smicanja. Izrazi za članove matrice krutosti i postupak određivanja rezidualnog čvornog opterećenja je sproveden metodom deformacija i metodom sila.
4. Identifikovane su osnovne funkcije objekata u toku rešavanja nelinearnog problema. Formirane su klase grednog elementa, poprečnog preseka i materijala koje omogućavaju modeliranje materijalne nelinearnosti.
5. Napisan je program koji je primenio objekte štapa, poprečnog preseka i materijala u nelinearnoj analizi.
6. Numeričkim primerima su verifikovani rezultati programa.

Celokupni računarski program je razvijen i testiran. Određen broj klasa u računarskom programu je delom preuzet od drugih autora i potom modifikovan. To su klase *matrix_m* koja je nastala modifikacijom *matrix* klase, kao i klasa *SkyMatrix* koja je u potpunosti preuzeta iz rada Borisa Jeremica. Takođe su delom preuzete funkcije klase koje opisuju nelinearno ponašanje i oštećenje materijala, tj. klase *ElasticPPMaterial*, *Concrete01* i *Concrete02* iz *FEDEAS*-a odnosno *OpenSees*-a.

Numerički primeri ilustruju efikasnost izloženog pristupa u modeliranju efekata materijalne nelinearnosti kao i efekata oštećenja i viskoznih deformacija linijskog nosača.

8.2 Zaključak

Objektno orijentisani pristup u modeliranju i analizi problema materijalne nelinearnosti linijskih nosača je efikasan postupak. Primenom tog postupka, rešavanje složenog problema je pojednostavljeno.

Kao rezultat objektno orijentisanog pristupa modeliranju linijskog nosača, razvijeni su objekti štapa, poprečnog preseka i materijala. U nelinearnom postupku, korišćenjem ovih objekata se uspešno analizira ponašanje linijskog nosača i efekti materijalnih nelinearnosti u koje spadaju oštećenja i viskozne deformacije.

8.3 Mogućnosti daljeg razvoja prikazanog modela proračuna

U toku rada na ovoj tezi uočeni su potencijalni pravci budućeg razvoja modela proračuna:

1. *Razvoj objektnih modela algoritama proračuna.* U okviru ove teze, primenjene modifikacije nelinearnih postupaka su vršene izmenama u programskom kodu. Uočena je potreba za fleksibilnijim postupkom rešavanja nelinearnog problema. Takva analiza je prikazana u radu [21] ali je u tom radu prilagodjena problemima koji se javljaju u dinamičkoj analizi konstrukcija.
2. *Razvoj objekta poprečnog preseka.* Objekat poprečnog preseka koji je razvijen u okviru ovog rada i primenjen u računarskom programu pri određivanju veza između sila i deformacija, koristi pretpostavku da presek ostaje ravan i da se oblik poprečnog preseka ne menja tokom deformacija. Brojne su mogućnosti usavršavanja objekta preseka: predlog podele preseka na regione izložen u radu [22], usvajanje moguće deplanacije usled torzije i sl. Primena novog modela poprečnog preseka na objekte štapova je jednostavna jer se od preseka očekuju odgovori na relativno mali broj poruka koje mu upućuje štap (to je 7 poruka definisanih u 5.4)
3. *Razvoj korisničkog interface-a* Program razvijan u okviru ove teze je imao za cilj proveru i utvrđivanje efikasnosti primene objekata štapova u analizi efekata materijalne nelinearnosti. Različiti rezultati i međjurezultati koji se javljaju tokom analize su praćeni tzv. *kontrolnom štampom* koja je zadavana instrukcijama u samom kodu programa. To ima za rezultat veoma obiman izlazni file. Razvoj korisničkog *interface-a* će doprineti lakšem i efikasnijem korišćenju programa.

Bibliografija

- [1] A.Ali, *Fem analysis of concrete structures subjected to mode-i and mixed-mode loading conditions*, Computer & Structures (1996), no. 6, 1043–1055.
- [2] Wenqing Yuan Amir Mirmiran, Kenneth Zagers, *Nonlinear finite element modeling of concrete confined by fiber composites*, Finite Elements in Analysis and Design (2000), no. 35, 79–96.
- [3] Ricardo O. Foschi Bruce W.R. Frode and Siegfried F. Stierner, *Object - oriented finite element analysis*, Computer & Structures **34** (1990), no. 3, 355–374.
- [4] Boris Jeremić, *Finite deformation hyperelasto-plasticity of geomaterials*, Ph.D. thesis, University of Colorado, Boulder, 1997.
- [5] D. Šumarac, M. Sekulović, Lj. Vlajić, Lj. Brajović, M. Simić, Lj. Atanasković, G. Srećković, N. Muravljov, S. Stošić, Z. Mišković, N. Kodić-Diković, D. Cvetković, *Analiza prslina u ab gredama sa aspekta mehanike loma*, JDGK 10. Kongres Vrnjačka banja, T-14, 1998, pp. 79–85.
- [6] D.Sumarac,M.Sekulovic,D.Krajcinovic, *Fracture of reinforced concrete beams subjected to three point bending*, International Journal of Fracture Mechanics (2003), no. 12, 31–44.
- [7] Bruce Eckel, *Thinking in c++*, Prentice Hall Inc.,A Paramount Communications Company Englewood Cliffs, New Jersey, 1999.
- [8] Enrico Spacone, Filip Filippou, Fabio Taucer, *Fibre beam-column model for non-linear analysis of r/c frames:part.ii applications*, Earthquake engineering and structural dynamics **25** (1996), 727–742.
- [9] Carlos A. Felippa, *Nonlinear finite element methods*, Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Space Structures and Controls University of Colorado, Material assembled from lecture notes for the course, 2001.
- [10] A.M. Awruch H.M. Gomes, *Some aspects on three-dimensional numerical modelling of reinforced concrete structures using the fnite element method*, Advances in Engineering Software (2001), no. 32, 257–277.
- [11] Cay S. Horstmann, *Practical object-orijented development in c++ and java*, WILEY COMPUTER PUBLISHINT, 1997.

- [12] F.Ragueneau G.Casaux J.Mazars, P.Kotronis, *Using multifiber beams to account for shear and torsion application to concrete structural elements*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2006), no. 195, 7264–7281.
- [13] J.W. Davison J.P. Cohoon, *C++ program design- an introduction to programming and objectorijented design*, WBC/McGraw-Hill, 1999.
- [14] Ever J. Barbero Julio F. Davalos, Youngcham Kim, *A layerwise beam element for analysis of frames with laminated sections and flexible joints*, Finite Elements in Analysis and Design (1995), no. 19, 181–194.
- [15] Y.J. Kang, *Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete frames*, Tech. report, Department of Civil Engineering Univesity of California, Berkly, January 1977.
- [16] J. Mazars A. Ibrahimbegovic L. Davenne, F. Ragueneau, *Efficient approaches to finite element analysis in earthquake engineering*, Computer & Structures (2003), no. 81, 1223–1239.
- [17] Jakov D. Lazić, *Približna teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija*, NAUČNA KNJIGA-Beograd, 1988.
- [18] B. Patzak M. Jirasek, *Consistent tangent stiffness for nonlocal damage models*, Computer & Structures (2002), no. 80, 1279–1293.
- [19] Juan J.Cano Manuel L. Romero, Pedro F. Miguel, *A parallel procedure for nonlinear analysis of reinforced concrete three-dimensional frames*, Computer & Structures (2002), no. 80, 1337–1350.
- [20] Antonio R. Mari, *Numerical simulation of the segmental construction of three dimensional concrete frames*, Engineering Structures (2000), no. 22, 585596.
- [21] Francis Thomas McKenna, *Object-orijanted finite element programming: Frameworks for analysis, algorithms and parallel computing*, Ph.D. thesis, University of California, Berkley, 1997.
- [22] Miguel-Sosa P. Fernández-Prada M.A. Navarro-Gregori, J., *A theoretical model to analyse reinforced and prestressed elements under combined loading*, Proceedings of the 2nd International Congress, Session 3 - Modelling and design, ID 3-6, 2006.
- [23] A.Saritas-AAuriccho R.L.Taylor, F.C. Filippou, *A mixed finite element method for beam and frame problems*, Computational Mechanics (2003), no. 31, 192–203.
- [24] Stepan S. Timošenko, *Istorija otpornosti materijala*, GRADJEVINSKA KNJIGA-Beograd, 1965.
- [25] Connie Smith and Lloyd Wiliams, *Software performance engineering for object-orijented systems: A use case approach*, Performance Engineering Services and Software Engineering Research, 1998.

-
- [26] Šerif Dunica, Branislav Kulundžija, *Nelinearna analiza konstrukcija*, NAUČNA KNJIGA-Beograd, 1986.
- [27] Zeljana Nikolić and Ante Mihanović, *Non-linear finite element analysis of post-tensioned concrete structures*, Engineering Computations (1997), no. 14, 509–525.
- [28] David I. McLean William F. Cofera, Yi Zhang, *A comparison of current computer analysis methods for seismic performance of reinforced concrete members*, Finite Elements in Analysis and Design (2002), no. 38, 835–861.
- [29] G.F.Dargush W.S.Barham, A.J.Aref, *Development of the large increment method for elastic perfectly plastic analysis of plane frame structures under monotonic loading*, International Journal of Solids and Structures (2005), no. 42, 6586–6609.
- [30] M.H. Baluch Y.N. Ziraba, *Computational model for reinforced concrete beams strengthened by epoxy bonded steel plates*, Finite Elements in Analysis and Design (1995), no. 20, 253–271.
- [31] Milan Jirasek; Thomas Zimmerman, *Embedded crack model. part ii: Combination with smeared cracks*, INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING (2001), no. 50, 1291–1305.
- [32] Jianfei Chen Z.J. Yang, *Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams*, Engineering Fracture Mechanics (2005), no. 72, 2280–2297.