NIKOLA HAJDIN

TEORIJA POVRŠINSKIH NOSAČA

3. LJUSKE

GRAĐEVINSKI FAKULTET • BEOGRAD

Naučna knjiga • BEOGRAD

GRAĐEVINSKI FAKULTET UNIVERZITETA U BEOGRADU
ZAVOD ZA TEHNIČKU MEHANIKU I TEORIJU KONSTRUKCIJA

NIKOLA HAJDIN

TEORIJA POVRŠINSKIH NOSAČA

3. LJUSKE

GRAĐEVINSKI FAKULTET • BEOGRAD

Naučna knjiga • BEOGRAD

Akademik dr inž. Nikola Hajdin
TEORIJA POVRŠINSKIH NOSAČA
3. LJUSKE

Recenzenti:
Prof. dr *Natalija Naerlović-Veljković*, dipl. inž.
Prof. dr *Miodrag Sekulović*, dipl. inž.

Izdaje:
Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu
Bulevar revolucije 73, Beograd
IRO »Naučna knjiga«
Uzun-Mirkova 5, Beograd

Odobreno za štampu od strane Komisije za izdavačku delatnost Građevinskog fakulteta u Beogradu po preporuci Zavoda za tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija

Glavni i odgovorni urednik
Prof. dr *Milan Gojković*

Za izdavača
Dragoslav Joković

Urednik
Nikola Dončev

Tehnički urednik
Gordana Krstić

Priredio za štampu
Mr *Branislav Pujević*, asistent

Tiraž: 1000 primeraka

Štampa: Štamparija »Bakar« – Bor

Beograd, novembar 1984.

S A D R Ž A J

TREĆI DEO

LJUSKE

Strana

/

P R E D G O V O R

Predavanja sadržana u ovoj svesci pod naslovom "ljuske" treći su i poslednji deo predavanja iz Teorije površinskih nosača, koja sam držao na Gradjevinskom fakultetu počev od 1959.godine.

Prva dva dela: Ploče napregnute na savijanje i ploče napregnute u svojoj ravni izašla su kao skripta već nekoliko puta i u poslednjem izdanju u jednoj svesci.

Ta sveska zajedno sa ovim čini celinu i sadrži sva poglavlja ovog predmeta prema postojećem programu.

U Beogradu, 1.11.1984.godine

Nikola Hajdin

T R E Ć I   D E O

LJ U S K E

Uvod

1. Definicija i osnovne pretpostavke

Za razliku od ploče ljuskom nazivamo površinsku konstrukciju ograničenu sa dve krive površi na ostojanju h za koje pretpostavljamo da je malo u odnosu na ostale dimenzije.

Geometrijsko mesto tačaka, izmedju tih površi, jednako udaljenih od ovih površi nazvaćemo srednjom površi date ljuske.

U izučavanju ljuski smatraćemo kao i dosad da je materijal izotropan i da se pokorava generalisanom Hook-ovom zakonu i sem toga da su pomeranja tačaka (usled deformacije ljuske) mala u odnosu na debljinu ljuske.

Slično kao kod ploča i ljuske možemo podeliti na dve velike klase: tanke i debele ljuske.

Tankima ćemo nazivati one kod kojih je odnos h/R, gde je R radijus krivine srednje površi, mali u odnosu na jedinicu. U tehničkim problemima smatramo da ovaj uslov sa gledišta potrebne tačnosti zadovoljavaju ljuske za koje je odnos:

$$max\left(\frac{h}{R}\right) \leq \frac{1}{20}$$

a u izvesnim slučajevima primenjujemo teoriju tanke ljuske i za veće odnose.

Ljuske kod kojih je ovaj odnos veći od navedenog spadaju u klasu debelih ljuski čija je teorija znatno komplikovanija, i kojima se mi u ovom kursu nećemo baviti.

Osnovne pretpostavke na kojima se zasniva teorija tankih ljuski slične su pretpostavkama za ploče napregnutih na savijanje, i sastoje se u sledećem:

a) Prava vlakna upravna na srednju površinu ljuske ostaju i posle deformacije prava ne menjajući svoju dužinu, (Kirchoff-Loveova pretpostavka).
b) Normalni naponi u ravnima paralelnim srednjoj površini zanemaruju se u poredjenju sa ostalim naponima.

Primene teorije ljuski su mnogostruke i u različitim oblastima tehnike: u aeronautici, brodogradnji, mašinstvu, gradjevinarstvu itd.

Potstrek za razradu teorije i njenih primena u gradjevinarstvu ima se dobrim delom zahvaliti armiranom betonu koji je otvorio široko polje za primenu racionalnih konstruktivnih sistema.

Ljuske kao konstrukcije, odnosno kao elementi konstrukcija, izradjene iz različitih materijala, nalaze primenu u mnogim oblastima tehnike. U gradjevinarstvu je čelik kao materijal za ljuske relativno široko zastupljen u konstrukcijama kao što su rezervoari, cevovodi i sl.

2. Srednja površ ljuske. Sile u preseku.

Srednju površ ljuske možemo zadati u vektorskom obliku:

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta), \tag{III.1}$$

gde je $\vec{r}$ vektor položaja tačke srednje površi i zavisi od proizvoljnih parametara α i β.

U skalarnom obliku ova jednačina se raspada na tri parametarske jednačine:

$$x = x\,(\alpha,\beta)$$
$$y = y\,(\alpha,\beta) \qquad \text{(III.2a,b,c)}$$
$$z = z\,(\alpha,\beta)\,.$$

Sem na ovaj način jednačina srednje površine može, kao jednačina površi u prostoru, biti zadata u obliku:

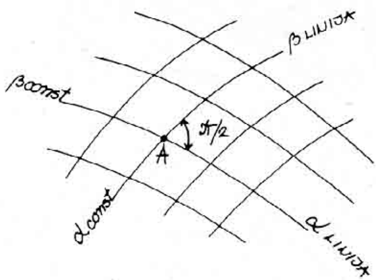
$$F(x,y,z)=0 \qquad \text{(III.3)}$$

ili u eksplicitnom obliku

$$z=f(x,y) \qquad \text{(III.4)}$$

Ako se zadržimo na prvom načinu opisivanja površi onda je na primer za odredjeno α i β data jedna tačka na površi , a za β = const dobijaju se α -linije na površi i slično tome, za α = const, β -linije.

Svaku tačku na površi , prema tome, možemo shvatiti kao presek dveju linija α i β . Parametre α i β nazivamo krivolinijskim koordinatama, a α i β -linije koordinatnim linijama (Sl. 1).



(Sl. 1)

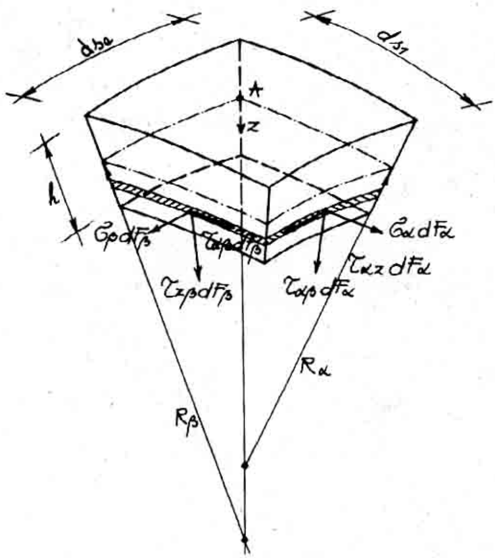
Specijalan slučaj koordinata α i β imamo kad su α i β linije medjusobno ortogonalne.

Medju svim mogućim medjusobno ortogonalnim linijama α i β koje prolaze kroz posmatranu tačku, jedan par ovih linija ima tu osobinu da krivina linije koju dobijamo presekom ravni, koja je upravna na srednju površinu i sadrži tangentu na koordinatnu liniju u posmatranoj tački, ima maksimalnu odnosno minimalnu vrednost.

Ovakve koordinate nazivamo glavnim i dalje ćemo posmatrati ljuske samo u ovim koordinatama. Položaj bilo koje tačke u ljusci odredjen je prema tome koordinatama α i β i ostojanjem te tačke od srednje površine z .

Iz ljuske ćemo iseći u okolini tačke A elemenat presecima upravno na srednju površ a duž tangenti na linije $\alpha=$ const. i $\alpha + d\alpha$ =const odnosno β =const i $\beta + d\beta$ =const (Sl. 2).

Normalne napone na tim površinama obeležimo sa σ_α odnosno σ_β, a komponente totalnog smičućeg napona u tim presecima obeležićemo sa $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha z}$ odnosno $\tau_{\beta\alpha}$, $\tau_{\beta z}$.



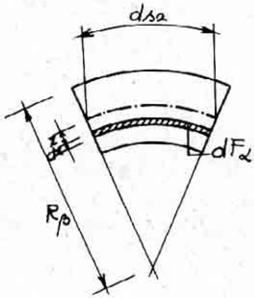
(Sl. 2)

Sa R_α i R_β obeleženi su poluprečnici glavnih krivina. Redukcioni momenat i rezultantu svih sila koje deluju na presečenim površinama u odnosu na srednju površ ljuske, mereno na jedinicu dužine odgovarajuće koordinatne linije (α ili β), razložićemo na komponente u pravcima tangenti na koordinatne linije α, β i u pravcu normale z.

Ove komponente glavnog vektora i momenta zvaćemo zajedničkim imenom kao i ranije presečnim silama ili silama u preseku.

Imajući u vidu da je (Sl. 3)

$$dF_\alpha = \frac{ds_2}{R_\beta}\left(R_\beta - z\right)dz = \left(1 - \frac{z}{R_\beta}\right)ds_2\,dz \qquad \text{(III.5a)}$$



(Sl. 3)

i slično tome:

$$dF_\beta = ds_1\left(1 - \frac{z}{R_\alpha}\right)dz \qquad \text{(III.5b)}$$

presečne sile u preseku α=const date su izrazima:

a) normalna sila:

$$N_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\alpha \left(1-\frac{z}{R_\beta}\right) dz \tag{III.6a}$$

b) momenat savijanja:

$$M_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} z\,\sigma_\alpha \left(1-\frac{z}{R_\beta}\right) dz \tag{III.6b}$$

c) smičuća sila:

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1-\frac{z}{R_\beta}\right) dz \tag{III.6c}$$

d) torzioni momenat:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{+h/2} z\,\tau_{\alpha\beta} \left(1-\frac{z}{R_\beta}\right) dz \tag{III.6d}$$

e) transverzalna sila:

$$T_\alpha = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\alpha\beta} \left(1-\frac{z}{R_\beta}\right) dz \tag{III.6e}$$

Slično tome u preseku β =const imamo:

a) normalna sila:

$$N_\beta = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\beta \left(1-\frac{z}{R_\alpha}\right) dz \tag{III.7a}$$

b) momenat savijanja:

$$M_\beta = \int_{-h/2}^{+h/2} z\,\sigma_\beta \left(1-\frac{z}{R_\alpha}\right) dz \tag{III.7b}$$

c) smičuća sila:

$$N_{\beta\alpha} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\beta\alpha} \left(1-\frac{z}{R_\alpha}\right) dz \tag{III.7c}$$

d) torzioni momenat:

$$M_{\beta\alpha}=\int_{-h/2}^{+h/2} z\,\tau_{\beta\alpha}\left(1-\frac{z}{R_\alpha}\right)dz \qquad \text{(III.7d)}$$

e) transverzalna sila:

$$T_\beta=\int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\beta\alpha}\left(1-\frac{z}{R_\alpha}\right)dz \qquad \text{(III.7e)}$$

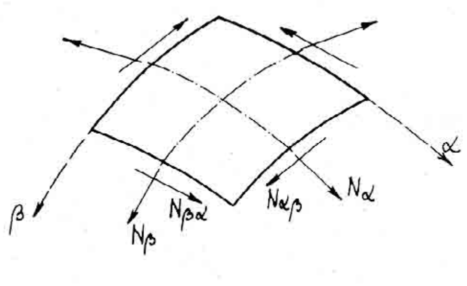
Treba primetiti da i pored konjugovanosti smičućih napona

$$\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha}$$

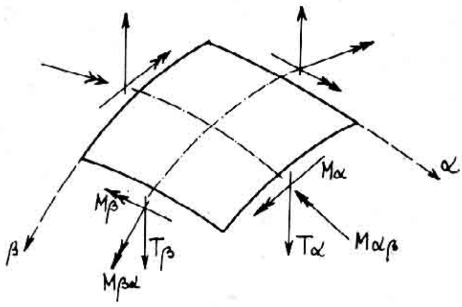
u opštem slučaju su smičuće sile $N_{\alpha\beta}$ i $N_{\beta\alpha}$ a isto tako i torzioni momenat $M_{\alpha\beta}$ i $M_{\beta\alpha}$ medjusobno različiti

$$N_{\alpha\beta}\neq N_{\beta\alpha}$$
$$M_{\alpha\beta}\neq M_{\beta\alpha}$$

Na (Sl. 4) prikazani su pozitivni pravci sila u preseku koje deluju u tangencijalnoj ravni na srednju površ i u odgovarajućem preseku α =const odn. β =const, a na (Sl. 5) momenti savijanja, torzioni momenti i transverzalne sile



(Sl. 4)



(Sl. 5)

Sem unutrašnjih sila na prikazani elemenat isečen iz ljuske deluje i spoljašnje opterećenje.

Za rešenje problema ljuske stoje nam na raspolaganju 6 uslova ravnoteže, koji se mogu postaviti za jedno telo u prostoru. Medjutim ukupan broj nepoznatih sila u preseku ravan je deset, pa je problem odredjivanja naprezanja statički neodredjen i za njegovo rešenje moramo posmatrati i deformaciju ljuske.

BEZMOMENTNA TEORIJA LJUSKI

1. Bezmomentno naprezanje ljuske

Ako se u svim presecima ljuske javljaju samo sile N_α $N_{\alpha\beta}$, $N_{\beta\alpha}$ i N_β , koje leže, kako smo naznačili, u tangencijalnoj ravni na srednju površ , onda takvo naprezanje nazivamo bezmomentnim ili membranskim naprezanjem.

Ovakva vrsta naprezanja javlja se u svakom slučaju ako je ljuska tako tanka da ne poseduje nikakvu otpornost na savijanje (savršeno savitljiva ljuska - membrana). Medjutim tako savršeno savitljiva ljuska nije u stanju da primi sile pritiska, zbog svoje nestabilnosti (izbočavanja) i može se upotrebiti kao konstrukcija samo za slučaj da u svim presecima vlada zatezanje.

Medjutim i kod ljuski, male debljine ali sa izvesnom konačnom krutošću na savijanje, moguće je takvo naprezanje pri kom bi se javile samo membranske sile.

Za takvo stanje naprezanja moraju biti ispunjeni izvesni uslovi, jer se ono ustvari javlja kao specijalan slučaj opisanog naprezanja pri kom se javljaju i ostale sile u preseku.

To su uglavnom sledeći uslovi:

a) Debljina ljuske mora da je mala tako da je odnos h/R u poredjenju sa jedinicom takav da se može zanemariti.
b) Srednja površina ljuske mora biti glatka.
c) Opterećenje ljuske mora biti blago promenljivo i bez skokova.
d) Oslanjanje ljuske mora biti tako da se na krajevima javljaju samo membranske sile.

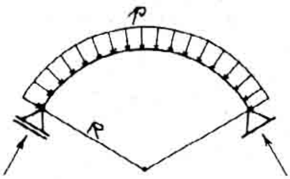
Sem ovog, da bi jedno membransko stanje naprezanja bilo stvarno moguće, mora i deformacija sračunata na bazi odredjenih presečnih sila biti jednoznačno odredjena.

Ove uslove nažalost u našim konstrukcijama nije moguće vrlo često ostvariti, naročito u pogledu oslanjanja i opterećenja.

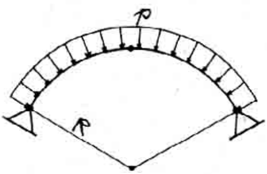
Da bi malo razjasnili membransko naprezanje ljuske poslužićemo se analizom lučnog linijskog nosača.

Poznato je, naime, da se u sistemu prikazanom na (Sl. 6a) i u trozglobnom luku (Sl. 6b) čija je osovina deo kruga, za radijalno opterećenje javljaju samo normalne sile:

$$N_\alpha = pR$$



(Sl. 6a)



(Sl. 6b)

Za ravnomerno radijalno opterećenje i za usvojen oblik osovine lùka naprezanje luka je "membransko", jer se ne javljaju momenti ni transverzalne sile.

Za razliku od linijskih sistema kod kojih je moguće za izabran oblik osovine naći samo jedno opterećenje za koje se javlja membransko naprezanje, kod ljuski je to obično moguće za više vrsta opterećenja.

Bezmomentna ili membranska teorija ljuski, bez obzira na njeno ograničeno važenje ima svoj značaj.

U izvesnom broju slučajeva ona daje zadovoljavajuće rešenje za praksu, a u većem broju slučajeva, kad se membransko rešenje ne može prihvatiti, ono pruža prvi korak za opšte rešenje problema odnosno za tzv. teoriju savijanja ili momentnu teoriju ljuski.

Na kraju, sa gledišta matematske aparature i jednostavnosti pojedinih rešenja, membranska teorija je znatno prostija od teorije savijanja ljuski. Broj presečnih sila smanjuje se na 4, odnosno zanemarujući u izrazima za $N_{\alpha\beta}$ i $N_{\beta\alpha}$ članove z/R_α i z/R_β, u stvari svodi na svega tri nepoznate presečne sile: N_α, N_β i $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$. Iz uslova ravnoteže sila koje napadaju elemenat isečen iz ljuske moguće je sada s obzirom da se broj uslova ravnoteže svodi na 3, odrediti sve presečne sile. Na taj način zadatak postaje statički odredjen.

U daljem izlaganju membranske teorije ograničićemo se na odredjene i sa praktičnog gledišta najvažnije forme ljuski.

2. Bezmomentna teorija rotacionih ljuski

a) Geometrija ljuske i sile u preseku

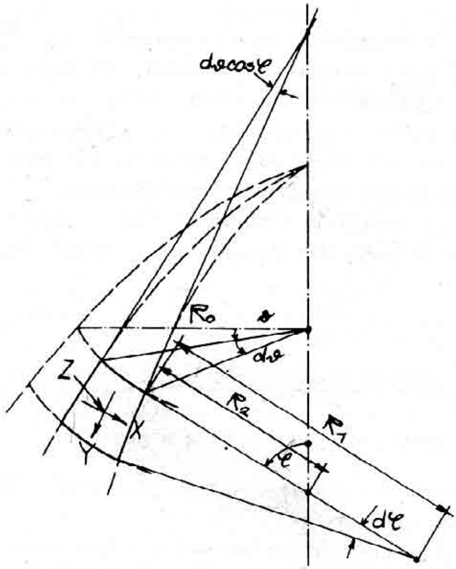
Rotaciona ljuska je ona čija je srednja površ proizvoljna rotaciona površ.

Ova površina nastaje obrtanjem ravne krive linije oko jedne prave. Linije glavnih krivina za rotacionu ljusku su njeni meridijani i paralelni krugovi. Meridijalne linije dobijamo presekom srednje površine i ravni koja sadrži osovinu ljuske, a paralelni krugovi stoje na ove upravno.

Za krivolinijske koordinate rotacione ljuske izabraćemo, shodno prethodnom ugao φ koji zaklapa normala na površi sa osovinom ljuske (Sl. 7) i ugao ϑ koji odredjuje položaj tačke na odgovarajućem paralelnom krugu.

Sa R_1 obeležen je radijus krivine meridijana, sa R_2 drugi radijus krivine koji je jednak duži na normali izmedju srednje površi i osovine ljuske. Poluprečnik paralelnog kruga obeležen je sa R_0.

Posmatraćemo elemenat ljuske čija je srednja površ omedjena meridijanima ϑ i $\vartheta + d\vartheta$ i paralelnim krugovima φ i $\varphi + d\varphi$. Strane ovog elementa su upravne na srednju površ. Na dati elemenat deluju odgovarajuće presečne sile N_φ, $N_{\varphi\vartheta}$, N_ϑ i spoljno opterećenje čiju ćemo komponentu u pravcu tangente na paralelni krug, obeležiti sa X, u pravcu tangente na meridijan sa Y, a u pravcu unutrašnje normale sa Z.



(Sl. 7)

Sile koje deluju na naspramnim stranama elementa (Sl. 8) razlikovaće se za diferencijalne veličine.

Tako na primer na strani ϑ =const. imamo sile

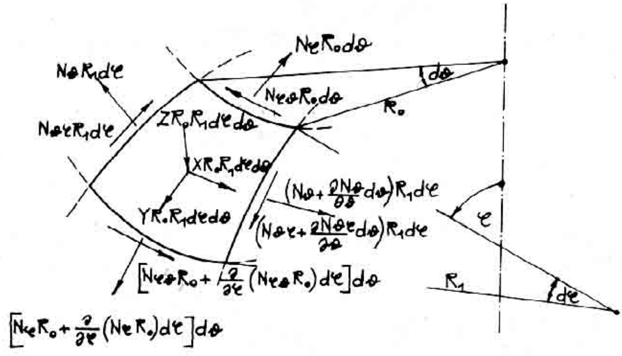
$$N_{\vartheta} R_1 d\varphi \quad i \quad N_{\varphi\vartheta} R_1 d\varphi$$

a na strani $\vartheta + d\vartheta$ =const:

$$\left(N_{\vartheta} + \frac{\partial N_{\vartheta}}{\partial \vartheta} d\vartheta\right) R_1 d\varphi \quad i \quad \left(N_{\varphi\vartheta} + \frac{\partial N_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} d\vartheta\right) R_1 d\varphi$$

a zatim na strani φ =const.:

$$N_{\varphi} R_0 d\vartheta \quad i \quad N_{\varphi\vartheta} R_0 d\vartheta$$



(Sl. 8)

Pri prelasku od strane φ =const na stranu elementa $\varphi+d\varphi$ =const menjaće se ne samo presečne sile već i dužina linijskog elementa $R_0 d\vartheta$, pa dobijamo:

$$\left[N_\varphi R_0 + \frac{\partial}{\partial\varphi}(N_\varphi R_0)\,d\varphi\right]d\vartheta$$

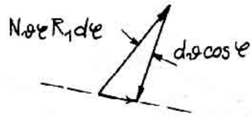
$$\left[N_{\varphi\vartheta} R_0 + \frac{\partial}{\partial\varphi}(N_{\varphi\vartheta} R_0)\,d\varphi\right]d\vartheta$$

b) Uslovi ravnoteže

U uslov ravnoteže svih sila u pravcu tangente na paralelni krug ulaze sledeće sile:

$$\frac{\partial N_\vartheta}{\partial\vartheta} R_1\,d\varphi\,d\vartheta\ ;\quad \frac{\partial}{\partial\varphi}(N_{\varphi\vartheta} R_0)\,d\varphi\,d\vartheta\ ;\quad X R_0 R_1\,d\varphi\,d\vartheta$$

Sem ovog smičuće sile na stranama ϑ=const i $\vartheta+d\vartheta$=const nisu paralelne i njihovi pravci zatvaraju ugao čija je veličina (Sl. 7) $d\vartheta\cos\varphi$. Projektovanjem ovih sila na pravac tangente (Sl. 9) na paralelni krug, zanemarujući male veličine višeg reda, dobijamo $N_{\varphi\vartheta} R_1 \cos\varphi\, d\varphi\, d\vartheta$.



(Sl. 9)

Ispisujući sada ovaj uslov ravnoteže, posle skraćenja sa $d\varphi\, d\vartheta$ dobijamo:

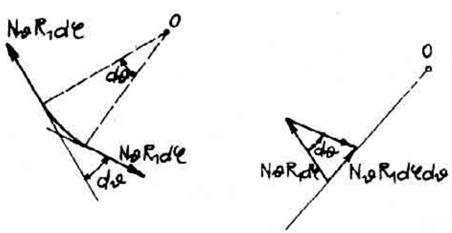
$$\frac{\partial N_{\vartheta}}{\partial \vartheta} R_1 + \frac{\partial}{\partial \varphi}(N_{\varphi\vartheta} R_0) + N_{\vartheta\varphi} R_1 \cos\varphi + X R_0 R_1 = 0 \quad \text{(III}$$

U uslov ravnoteže sila u pravcu tangente na meridijan javiće se sledeće sile:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(N_{\varphi} R_0)\, d\varphi\, d\vartheta \; ; \; \frac{\partial N_{\varphi\vartheta}}{\partial \vartheta} R_1\, d\varphi\, d\vartheta \; ; \; Y R_0 R_1\, d\varphi\, d\vartheta$$

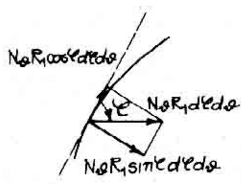
Osim toga će normalne sile na stranama ϑ =const i $\vartheta+d\vartheta$ =const, zanemarujući male veličine višeg reda, dati jednu projekciju u pravcu upravnom na osovinu ljuske (Sl.10a,b) čija je veličina jednaka:

$$N_{\vartheta} R_1\, d\varphi\, d\vartheta$$



a) b)

(Sl. 10)



(Sl. 11)

Projekcija ove rezultante na pravac tangente na meridijalnu(Sl. 11) krivu ravna je:

$$N_{\vartheta} R_1 \cos\varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

Sabiranjem ovih sila i izjednačenjem tog zbira sa nulom, posle kraćenja sa $d\varphi d\vartheta$ dobijamo:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(N_{\varphi} R_0) + \frac{\partial N_{\varphi\vartheta}}{\partial\vartheta} R_1 - N_{\vartheta} R_1 \cos\varphi + Y R_0 R_1 = 0 \qquad \text{(III.9)}$$

Projektovanjem normalnih sila na stranama φ i $\varphi + d\varphi$ (sa zanemarenjem malih veličina višeg reda) na pravac normale dobijamo:

$$N_{\varphi} R_0 \, d\varphi \, d\vartheta .$$

Projektovanjem preostale sile $N_{\vartheta} R_1 d\varphi d\vartheta$ (Sl. 11) na pravac normale nalazimo

$$N_{\vartheta} R_1 \sin\varphi \, d\vartheta \, d\varphi .$$

Opterećenje ljuske daje silu

$$Z R_0 R_1 \, d\varphi \, d\vartheta .$$

Sabiranjem ovih sila i izjednačavanjem tog zbira sa nulom, deleći pri tome celu jednačinu sa $R_0 R_1 d\varphi d\vartheta$ dobijamo:

$$\frac{N_{\varphi}}{R_1} + \frac{N_{\vartheta}}{R_2} + Z = 0 , \qquad \text{(III.10)}$$

gde je

$$R_0 = R_2 \sin\varphi .$$

3. Rotaciono simetrično opterećenje

Ako je opterećenje ljuske rotaciono simetrično, onda presečne sile neće biti zavisne od ϑ. Tada je

$$X=0 \qquad N_{\varphi\vartheta}=N_{\vartheta\varphi}=0$$

i izvedene jednačine svode se na dve obične diferencijalne jednačine:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi R_0\right)-N_\vartheta R_1\cos\varphi+YR_0R_1=0$$

$$\frac{N_\varphi}{R_1}+\frac{N_\vartheta}{R_2}+Z=0\,. \qquad \text{(III.11a,b)}$$

Iz druge jednačine (III.11b) dobijamo:

$$N_\vartheta=-R_2\left(Z+\frac{N_\varphi}{R_1}\right). \qquad \text{(III.12)}$$

Unošenjem ove vrednosti u prvu jednačinu (III.11a) nalazimo:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi R_2\sin\varphi\right)+N_\varphi R_2\cos\varphi+YR_0R_1+ZR_2R_1\cos\varphi=0\,.$$

Množeći ovu jednačinu sa $\sin\varphi$ imamo:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(N_\varphi R_2\sin\varphi\right)\sin\varphi+N_\varphi R_2\sin\varphi\cos\varphi=-R_1R_2\left(Y\sin\varphi+Z\cos\varphi\right)\sin\varphi$$

Možemo primetiti da leva strane jednačine pretstavlja u stvari izvod izraza $(N_\varphi R_2\sin\varphi)\sin\varphi$, pa je

$$\frac{d}{d\varphi}\left[N_\varphi R_2\sin^2\varphi\right]=-R_1R_2\left(Y\sin\varphi+Z\cos\varphi\right)\sin\varphi\,.$$

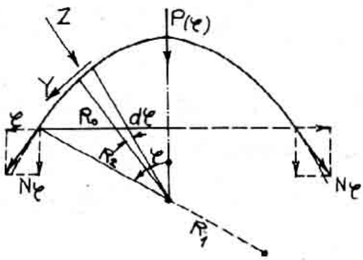
Integracijom nalazimo:

$$N_\varphi=-\frac{1}{R_2\sin^2\varphi}\left[\int R_1R_2\left(Y\sin\varphi+Z\cos\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi+C\right] \qquad \text{(III.13a}$$

ili ako uzmemo u obzir da je $\quad R_2\sin\varphi=R_0\,,$

$$N_\varphi = -\frac{1}{R_0 \sin\varphi}\left[\int R_1 R_0 \left(Y\sin\varphi + Z\cos\varphi\right)d\varphi + C\right]. \qquad \text{(III.13b)}$$

Umesto da podjemo od uslova ravnoteže(IIIlla,b) možemo za ovako jednostavan slučaj naprezanja doći do izraza za sile N_φ iz uslova ravnoteže sila koje napadaju deo ljuske iznad proizvoljno uočenog paralelnog kruga φ =const.



(Sl. 12)

Rezultantu svih spoljnih sila iznad preseka φ =const obeležićemo sa $P_{(\varphi)}$.

Zbir svih sila u pravcu osovine rotacije daje

$$2\pi R_0 N_\varphi \sin\varphi + P_{(\varphi)} = 0$$

odnosno

$$N_\varphi = -\frac{P_{(\varphi)}}{2\pi R_0 \sin\varphi} \qquad \text{(III.14)}$$

Komponenta opterećenja u pravcu osovine rotacije jednaka je

$$Y\sin\varphi + Z\cos\varphi$$

Integraljenjem na odsečenom delu ljuske dobijamo

$$P_{(\varphi)} = 2\pi \int_0^{\varphi} R_0 R_1 \left(Y \sin\varphi + Z \cos\varphi \right) d\varphi \qquad \text{(III.15)}$$

i konačno na osnovu (III14) isti izraz za N_φ kao i ranije:

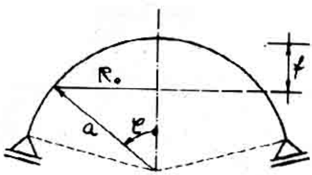
$$N_\varphi = -\frac{1}{R_0 \sin\varphi} \left[\int_0^{\varphi} R_1 R_0 (Y \sin\varphi + Z \cos\varphi) \, d\varphi \qquad \text{(III.16)}$$

pri čemu $-\dfrac{C}{R_0 \sin\varphi}$ predstavlja vrednost sile N_φ za $\varphi = 0$.

4. <u>Sferna kupola</u>

Za sfernu kupolu je:

$$R_2 = R_1 = a$$
$$R_0 = a \sin\varphi \; ,$$



(Sl. 13)

pa je

$$P_{(\varphi)} = +2\pi \int_0^{\varphi} a^2 (Y \sin\varphi + Z \cos\varphi) \sin\varphi \, d\varphi \; .$$

Za opterećenje sopstvenom težinom g imamo

$$Y = g \sin\varphi \; , \quad Z = g \cos\varphi$$

i dalje

$$P(\varphi) = +2\pi g a^2 \int_0^{\varphi} \sin\varphi \, d\varphi = +2\pi g a^2 (1-\cos\varphi) .$$

Za presečne sile dobijamo

$$N_\varphi = -ga \frac{1-\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{ga}{1+\cos\varphi} \qquad \text{(III.17a)}$$

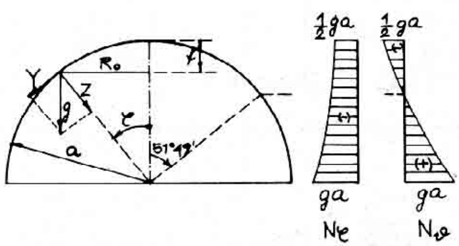
$$N_\vartheta = -ga \left(\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right) \qquad \text{(III.17b)}$$

Za $\varphi = 0$ (teme) dobijamo :

$$N_\varphi = N_\vartheta = -\frac{1}{2} ga ,$$

a za $\varphi = \pi/2$:

$$N_\varphi = -N_\vartheta = -ga$$



(sl. 14)

Izraz u zagradi za silu N_ϑ menja znak za $\varphi = 51°49'$. Iznad toga kruga sile N_ϑ (sile u horizontalnom prstenu) su sile pritiska a ispod toga sile zatezanja (Sl. 14). Drugim rečima za kupole kod kojih se traži da usled sopstvene težine nema napona zatezanja (na primer iz nearmiranog betona) ugao φ ne bi trebao da bude veći od $51^o 49'$.

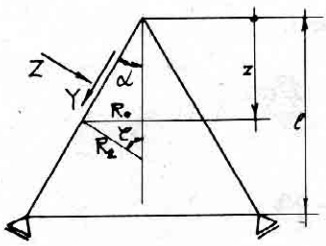
5. Konusna ljuska

Za konusnu ljusku ugao φ je konstantan (Sl. 15)

$$\varphi = \pi/2 - \alpha .$$

Osim toga je

$$R_1 = \infty \; ; \; R_2 = \frac{R_0}{\cos\alpha} \; ; \; R_0 = Z\,tg\alpha \; ; \; R_1\, d\varphi = \frac{dz}{\cos\alpha}$$



(sl. 15)

Na ostojanju **Z** od vrha imaćemo za rezultantu $P_{(z)}$ sledeći izraz

$$P_{(z)} = 2\pi \frac{tg\alpha}{\cos\alpha} \int_0^z Z\,(Y\cos\alpha + Z\sin\alpha)\,dz \qquad \text{(III.18)}$$

Za sopstvenu težinu konusne ljuske konstantne debljine (sa vertikalnom osovinom) dobijamo

$$Y\cos\alpha + Z\sin\alpha = g\,(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = g \quad ,$$

pa je

$$P(z) = 2\pi g \frac{tg\alpha}{\cos\alpha} \int_0^z Z\,dz = \pi g \frac{tg\alpha}{\cos\alpha} Z^2$$

ili

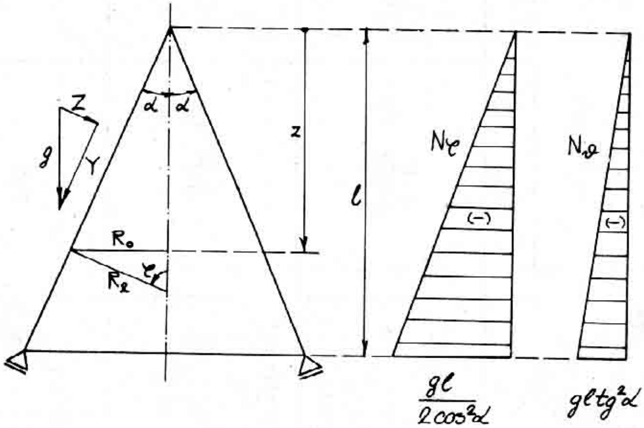
$$P(z) = \pi g \frac{R_0 Z}{\cos\alpha} \quad .$$

Za N_φ i N_ϑ nalazimo

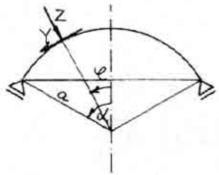
$$N_\varphi = -\frac{P(z)}{2\pi R_0 \cos\alpha} = -\frac{gZ}{2\cos^2\alpha} \tag{III.19a}$$

i

$$N_\vartheta = -R_2 Z = -\frac{Z\,tg\alpha}{\cos\alpha} g \sin\alpha = -gZ\,tg^2\alpha \tag{III.19b}$$

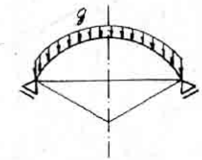
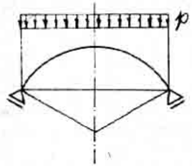
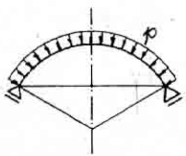


(sl. 16)

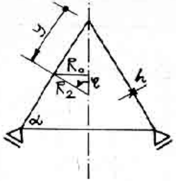


SFERNA LJUSKA

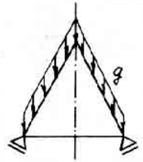
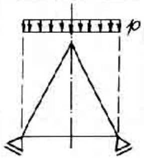
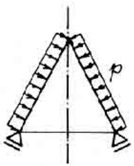
Tablica vrednosti N_φ, N_ϑ, ΔR, χ

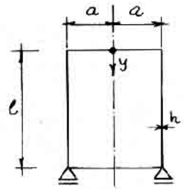
	N_φ	N_ϑ	ΔR	χ
	$-\frac{g \cdot a}{1+\cos\varphi}$	$-g \cdot a\left(\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right)$	$\frac{a^2 g \sin\varphi}{Eh}\left(\cos\varphi - \frac{1+\nu}{1+\cos\varphi}\right)$	$-\frac{g \cdot a}{E \cdot h}\sin\varphi(2+\nu)$
	$-\frac{a \cdot p}{2}$	$-\frac{a \cdot p}{2}\cos 2\varphi$	$\frac{a^2 p}{E \cdot h}\sin\varphi\left[\cos^2\varphi - \frac{1+\nu}{2}\right]$	$-\frac{a \cdot p}{E \cdot h}(3+\nu)\sin\varphi\cos\varphi$
	$-\frac{a \cdot p}{2}$	$-\frac{a \cdot p}{2}$	$\frac{a^2 p \cdot \sin\varphi}{2Eh}(1-\nu)$	0

KONUSNA LJUSKA



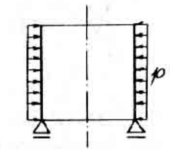
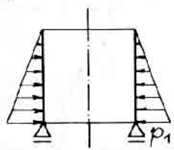
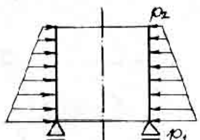
Tablica vrednosti N_y, N_ϑ, ΔR, χ

	N_y	N_ϑ	ΔR	χ
	$-\frac{g \cdot y}{2 \sin\alpha}$	$-\frac{y \cdot g \cdot \cos^2\alpha}{\sin\alpha}$	$-\frac{y^2 g \cos\alpha}{E \cdot h} \cdot \frac{\nu - 2\cos^2\alpha}{2 \sin\alpha}$	$-\frac{g y}{E h} \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\left[\frac{1}{2} + \nu - \cos^2\alpha(2+\nu)\right]$
	$-\frac{p \cdot y}{2} \mathrm{ctg}\alpha$	$-y \cdot p \frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$	$-\frac{p \cdot y^2}{E h} \frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{\nu}{2\cos^2\alpha} - 1\right)$	$-\frac{p \cdot y}{E \cdot h} \mathrm{ctg}^2\alpha\left[\frac{1}{2} + \nu - \cos^2\alpha(2+\nu)\right]$
	$-\frac{p \cdot y}{2} \mathrm{ctg}\alpha$	$-y \cdot p \cdot \mathrm{ctg}\alpha$	$\frac{p \cdot y^2}{E h} \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$	$\frac{3}{4} \frac{p \cdot y}{E h} \mathrm{ctg}^2\alpha$



CILINDRIČNA LJUSKA

Tablica vrednosti N_y, N_ϑ, ΔR, χ

	N_y	N_ϑ	ΔR	χ
	0	$-a\,p$	$\frac{a^2 p}{E h}$	0
	0	$-\frac{p_1 a y}{l}$	$\frac{a^2 p_1 y}{E \cdot h \cdot l}$	$\frac{a^2 p_1}{E \cdot h \cdot l}$
	0	$-a\left(p_2+\frac{p_1-p_2}{l}\cdot y\right)$	$\frac{a^2}{Eh}\left(p_2+\frac{p_1-p_2}{l}\cdot y\right)$	$\frac{a^2}{Eh}\,\frac{p_1-p_2}{l}$

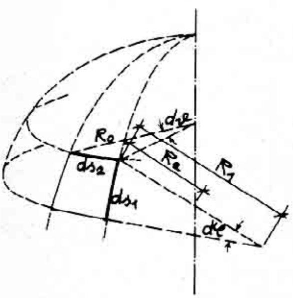
6. Rotaciono simetrična deformacija srednje površi rotacione ljuske

Dilatacije u pravcima φ i ϑ (sl. 17) date su izrazima

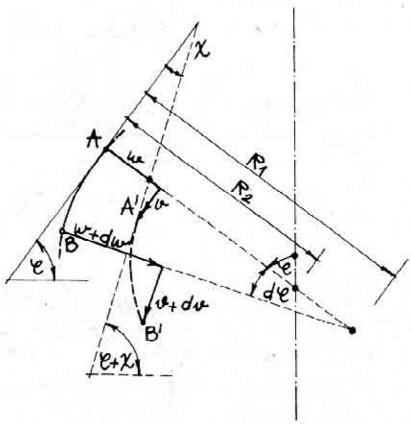
$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta ds_1}{ds_1} \qquad \varepsilon_\vartheta = \frac{\Delta ds_2}{ds_2} ,$$

gde su

$$ds_1 = R_1 d\varphi \qquad ds_2 = R_0 d\vartheta .$$



(Sl. 17)



(Sl. 18)

Posmatrajmo prvo linijski elemenat u meridijalnoj ravni. Tačka A pretrpeće pomeranje v u pravcu tangente na meridijalnu krivu i pomeranje w u pravcu normale. Pomeranja bliske tačke B razlikovaće se za male veličine prvog reda (sl. 18) i biće

$$v+dv \quad ; \quad w+dw$$

Usled pomeranja v odnosno $v+dv$ doći će do promene dužine elementa pa je taj deo dilatacije:

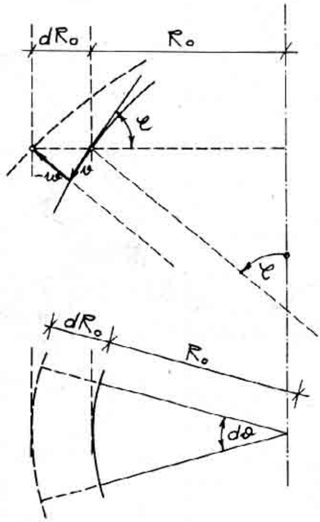
$$\varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{ds_1 + v + dv - ds_1 - v}{ds_1} = \frac{dv}{ds_1} = \frac{dv}{R_1 d\varphi} .$$

Pretpostavimo sada da tačke A i B imaju samo pomeranje w odnosno $w+dw$. Usled tog pomeranja zanemarenjem male veličine višeg reda dobijamo

$$\varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{\frac{ds_1}{R_1}(R_1 - w) - ds_1}{ds_1} = -\frac{w}{R_1},$$

pa je

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_1}\left(\frac{dv}{d\varphi} - w\right) . \tag{III.20}$$



(Sl. 19a,b)

Elemenat prstena $ds_2 = R_0 d\vartheta$ dobija usled povećanja poluprečnika dR_0 (sl. 19b) novu dužinu $(R_0 + dR_0) d\vartheta$, pa je

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{(R_0 + dR_0) - R_0}{R_0} = \frac{dR_0}{R_0}$$

Povećanje poluprečnika R_0 preko pomeranja (sl. 19a) iznosi

$$dR_0 = v\cos\varphi - w\sin\varphi$$

pa je konačno

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{1}{R_0}\left(v\cos\varphi - w\sin\varphi\right)$$

ili

$$\varepsilon_{\vartheta} = \frac{1}{R_2}\left(v\,\mathrm{ctg}\,\varphi - w\right). \qquad \text{(III.21)}$$

Pored deformacije srednje površine posmatraćemo i promenu ugla nagiba φ tangente na meridijalnu krivu koju ćemo obeležiti sa χ.

Usled pomeranja v ugao nagiba tangente će se razlikovati od prethodnog za mali ugao

$$\chi^{(1)} = \frac{v}{R_1}$$

Usled razlike u pomeranju w izmedju dve susedne tačke za veličinu dw (na rastojanju ds_1) dobiće još jednu promenu tog ugla veličine

$$\chi^{(2)} = \frac{dw}{ds_1} = \frac{dw}{R_1 d\varphi},$$

pa je veličina ugla χ jednaka

$$\chi = \frac{1}{R_1}\left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right) \qquad \text{(III.22)}$$

Za sračunate presečne sile N_φ i N_ϑ možemo na osnovu jednačina (III.20), (III.21), sračunati pomeranja tačaka srednje površine.

Iz (III.20) i (III.21) nalazimo

$$\frac{dv}{d\varphi} - v\,\mathrm{ctg}\,\varphi - \left(R_1\varepsilon_\varphi - R_2\varepsilon_\vartheta\right) = 0,$$

i dalje integracijom

$$v = \left[C + \int\left(R_1\varepsilon_\varphi - R_2\varepsilon_\vartheta\right)e^{-\int \mathrm{ctg}\,\varphi\, d\varphi} d\varphi\right]e^{\int \mathrm{ctg}\,\varphi\, d\varphi},$$

odnosno

$$v = \left[\int \frac{R_1\varepsilon_\varphi - R_2\varepsilon_\vartheta}{\sin\varphi}\, d\varphi + C\right]\sin\varphi .$$

Unošenjem vrednosti za ε_φ i ε_ϑ putem presečnih sila:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh}\left(N_\varphi - \nu N_\vartheta\right),$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{Eh}\left(N_\vartheta - \nu N_\varphi\right),$$

dobijamo konačno:

$$v = \left\{\int \frac{1}{Eh}\left[N_\varphi R_1 + \nu R_2 - N_\vartheta R_2 + \nu R_1\right]\frac{d\varphi}{\sin\varphi} + C\right\}\sin\varphi. \quad \text{(III.23)}$$

Konstanta C označava pomeranje ljuske kao krutog tela u pravcu njene osovine.

PROIZVOLJNO OPTEREĆENJE ROTACIONE LJUSKE

1. Antisimetrično opterećenje

Pretpostavićemo da je opterećenje ljuske dato izrazima

$$X = X_n \sin n\vartheta$$

$$Y = Y_n \cos n\vartheta \qquad \text{(III.24a,b,c)}$$

$$Z = Z_n \cos n\vartheta \; ,$$

pri čemu su X_n , Y_n i Z_n samo funkcije promenljive φ. Diferencijalne jednačine za proizvoljno opterećenje biće zadovoljene (jednačine ravnoteže) ako za presečne sile usvojimo sledeće izraze:

$$N_\varphi = N_{\varphi n} \cos n\vartheta$$

$$N_\vartheta = N_{\vartheta n} \cos n\vartheta \qquad \text{(III.25a,b,c)}$$

$$N_{\vartheta\varphi} = N_{\vartheta\varphi_n} \sin n\vartheta \; ,$$

gde su $N_{\varphi n}$, $N_{\vartheta n}$, $N_{\vartheta\varphi_n}$ takodje samo funkcije od φ. Stavljajući pretpostavljene izraze u uslove ravnoteže i deleći ove sa $\cos n\vartheta$ odnosno $\sin n\vartheta$ dobijamo:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(R_0 N_{\varphi\vartheta_n}\right) - n R_1 N_{\vartheta n} + R_1 N_{\varphi\vartheta_n} \cos\varphi + X_n R_0 R_1 = 0$$

$$\text{(III.26a,b,c)}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(R_0 N_{\varphi n}\right) + n R_1 N_{\varphi\vartheta_n} - R_1 N_{\vartheta n} \cos\varphi + Y_n R_0 R_1 = 0$$

$$\frac{N_{\varphi n}}{R_1} + \frac{N_{\vartheta n}}{R_2} + Z_n = 0 \; .$$

Ove tri jednačine moguće je eliminacijom $N_{\vartheta n}$ svesti na dve diferencijalne jednačine. Iz treće jednačine (III.26c) nalazimo:

$$N_{\vartheta n} = -R_2\left(\frac{N_{\varphi n}}{R_1} + Z_n\right).$$

Zamenjujući $N_{\vartheta n}$ u prvim dvema jednačinama putem ovog izraza dobijamo:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(R_0 N_{\varphi\vartheta n}\right) + nR_2 N_{\varphi n} + R_1 N_{\varphi\vartheta n}\cos\varphi + X_n R_0 R_1 + nR_1 R_2 Z_n = 0$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(R_0 N_{\varphi n}\right) + nR_1 N_{\varphi\vartheta n} + R_2 N_{\varphi n}\cos\varphi + Y_n R_0 R_1 + R_1 R_2 Z_n \cos\varphi = 0$$

Diferencirajući izraze u zagradi i deleći jednačine sa R_0 nalazimo:

$$\frac{dN_{\varphi\vartheta n}}{d\varphi} + \left(\frac{dR_0}{R_0 d\varphi} + \frac{R_1}{R_2}\operatorname{ctg}\varphi\right)N_{\varphi\vartheta n} + \frac{n}{\sin\varphi}N_{\varphi n} +$$

$$+ R_1 X_n + \frac{n}{\sin\varphi}R_1 Z_n = 0 \qquad \text{(III.27a,b)}$$

$$\frac{dN_{\varphi n}}{d\varphi} + \left(\frac{dR_0}{R_0 d\varphi} + \operatorname{ctg}\varphi\right)N_{\varphi n} + \frac{nR_1}{R_2}\frac{N_{\varphi\vartheta n}}{\sin\varphi} +$$

$$+ Y_n R_1 + R_1 \operatorname{ctg}\varphi Z_n = 0 .$$

2. Rešenje za sfernu kupolu

Polazeći od gornjih jednačina pokazaćemo rešenje zadatka za sfernu kupolu.

Kako je u tom slučaju $R_1 = R_2 = a$ =const., leve strane navedenih jednačina biće jednostavnije:

$$\frac{dN_{\varphi\vartheta_n}}{d\varphi} + 2ctg\varphi N_{\varphi\vartheta_n} + \frac{n}{\sin\varphi} N_{\varphi_n} + a\left(X_n + \frac{n}{\sin\varphi} Z_n\right) = 0$$

$$\frac{dN_{\varphi_n}}{d\varphi} + 2ctg\varphi N_{\varphi_n} + \frac{n}{\sin\varphi} N_{\varphi\vartheta_n} + a\left(Y_n + ctg\varphi Z_n\right) = 0 . \qquad \text{(III.28a,b)}$$

Učinimo zbir i razliku ovih jednačina i pritom uvedimo nove nepoznate:

$$U_1 = N_{\varphi_n} + N_{\varphi\vartheta_n}$$

$$U_2 = N_{\varphi_n} - N_{\varphi\vartheta_n} . \qquad \text{(III.29a,b)}$$

Tada dobijamo:

$$\frac{dU_1}{d\varphi} + \left(2ctg\varphi + \frac{n}{\sin\varphi}\right) U_1 + a\left(X_n + Y_n + \frac{n + \cos\varphi}{\sin\varphi} Z_n\right) = 0$$

$$\frac{dU_2}{d\varphi} + \left(2ctg\varphi - \frac{n}{\sin\varphi}\right) U_2 + a\left(Y_n - X_n - \frac{n - \cos\varphi}{\sin\varphi} Z_n\right) = 0 . \qquad \text{(III.30a,b)}$$

Ovom smenom dobili smo dve medjusobno nezavisne diferencijalne jednačine prvog reda sa promenljivim koeficijentima tipa:

$$\frac{dU_k}{d\varphi} + p_k(\varphi) U_k + q_k(\varphi) = 0 \quad ; \quad k = 1, 2 . \qquad \text{(III.31)}$$

Rešenje ove jednačine, kao što je poznato može se napisati u boliku:

$$U_k = \left[C_k - \int q_k e^{\int p_k d\varphi} d\varphi\right] e^{-\int p_k d\varphi} \qquad \text{(III.32)}$$

Imajući u vidu izraze za p_k :

$$p_k = 2ctg\varphi \pm \frac{n}{\sin\varphi} ,$$

dobijamo:

$$U_1=\frac{ctg^n\varphi/2}{\sin^2\varphi}\left[C_1-a\int\left(X_n+Y_n+\frac{n+\cos\varphi}{\sin\varphi}Z_n\right)\sin^2\varphi\, tg^n\varphi/2\, d\varphi\right],$$

(III.33a,b)

$$U_2=\frac{tg^n\varphi/2}{\sin^2\varphi}\left[C_2-a\int\left(-X_n+Y_n-\frac{n-\cos\varphi}{\sin\varphi}Z_n\right)\sin^2\varphi\, ctg^n\varphi/2\, d\varphi\right].$$

Kao primer uzećemo opterećenje sferne kupole vetrom. Eksperimentalna istraživanja pokazala su da se opterećenje vetrom može uzeti u obliku:

$$X=Y=0\ ,\quad Z=\sum_0^n p_w \sin\varphi K_n \cos n\vartheta,$$

gde je p_w - osnovno opterećenje vetrom dato propisima, a K_n - koeficijenat opterećenja.

Za $n=1$, tj. za prvi antisimetrični član dobijamo:

$$Z=p\sin\varphi\cos n\vartheta$$

gde je:

$$p=p_w K_1$$

Stavljajući $Z=p\sin\varphi$ u dato rešnje posle integraljenja dobijamo:

$$U_1=\frac{1+\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\left[C_1+pa\left(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\right],$$

(III.34a,b)

$$U_2=\frac{1-\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\left[C_2-pa\left(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\right].$$

Izrazi za presečne sile date su tada izrazima:

$$N_\varphi=\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\varphi}\left[\frac{C_1+C_2}{2}+\frac{C_1-C_2}{2}\cos\varphi+pa\left(\cos^2\varphi-\frac{1}{3}\cos^4\varphi\right)\right],$$

(III.35a,b)

$$N_{\varphi\vartheta}=\frac{\sin\vartheta}{\sin^3\varphi}\left[\frac{C_1-C_2}{2}+\frac{C_1+C_2}{2}\cos\varphi+pa\left(\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\right].$$

Obe integracione konstante možemo odrediti iz uslova da u temenu presečne sile N_φ i $N_{\varphi\vartheta}$ imaju konačnu vrednost.

Kako imenitelj $\sin^3\varphi$ ima za $\varphi=0$ nulu trećeg reda, jer je i

$$(\sin^3\varphi)''=0$$

moraju i izrazi u zagradama biti za $\varphi=0$ nule istog reda. Za $\varphi=0$ izraz u zagradi za obe jednačine daje:

$$C_1=-\frac{2}{3}pa$$

Prvi izvod izraza u zagradi identički je ravan nuli za bilo koji izbor konstanti C_1 i C_2 a drugi izvod za obe zagrade daje:

$$C_2=\frac{2}{3}pa$$

Izrazi za sile su sledeći:

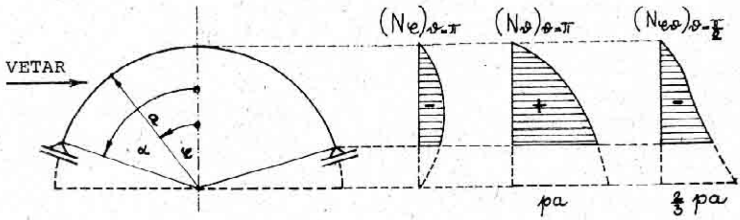
$$N_\varphi=-\frac{pa}{3}\,\frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{\sin^3\varphi}\left(2-3\cos\varphi+\cos^3\varphi\right),$$

$$N_{\varphi\vartheta}=-\frac{pa}{3}\,\frac{\sin\vartheta}{\sin^3\varphi}\left(2-3\cos\varphi+\cos^3\varphi\right), \qquad \text{(III.36a,b,c)}$$

$$N_\vartheta=\frac{pa}{3}\,\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\varphi}\left(2\cos\varphi-3\sin^2\varphi-2\cos^4\varphi\right).$$

U slučaju polusfere nestaju sile N_φ za $\varphi=\pi/2$, jer je momenat spoljašnjih sila u odnosu na ravan ivičnog kruga jednak nuli zbog toga što pravci delovanja svih sila vetra idu kroz centar sfere, a on leži u ravni ivičnog kruga.

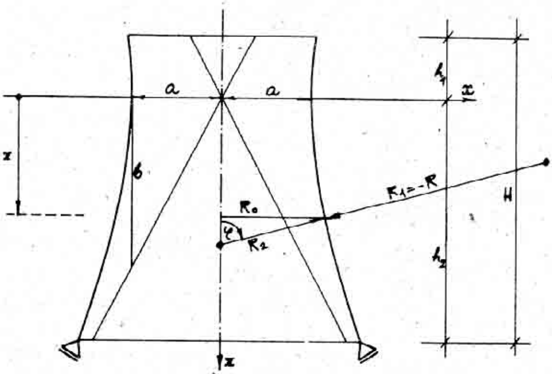
Na (Sl. 20) prikazan je tok unutrašnjih sila N_φ, N_ϑ, $N_{\varphi\vartheta}$ duž nekoliko karakterističnih preseka.


VETAR
$(N_\varphi)_{\vartheta=\pi}$
$(N_\vartheta)_{\vartheta=\pi}$
$(N_{\varphi\vartheta})_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}$
pa
$\frac{2}{3}pa$

(Sl. 20)

3. Proračun ljuske oblika rotacionog hiperboloida metodom konačnih razlika

Za numeričko rešenje ovog tipa rotacione ljuske prikladnije je umesto ugaone koordinate φ uvesti koordinatu z merenu duž ose rotacije hiperboloida (Sl. 21).



(Sl. 21)

Jednačine (III.27a,b) možemo, stavljajući

$$R_0 = R_2 \sin\varphi \; ; \quad R_1 = -R \; ; \quad \frac{1}{d\varphi} = -\frac{R\sin\varphi}{dz}$$

i

$$\frac{dR_0}{dz} = \mathrm{ctg}\,\varphi$$

prevesti na sledeći sistem jednačina:

$$\frac{dN_{\varphi\vartheta_n}}{dz} R_0 \sin^2\varphi + 2R_0^2 \cos\varphi \, N_{\varphi\vartheta_n} - \frac{nR_0^2}{R\sin\varphi} N_{\varphi_n} + R_0^2 \left(X_n + \frac{n}{\sin\varphi} Z_n \right) = 0 \quad , \qquad \text{(III.37a,b)}$$

$$\frac{dN_{\varphi n}}{dz} R_0 \sin\varphi + \left(\frac{dR_0}{dz} \sin\varphi - \frac{R_0}{R} \mathrm{ctg}\,\varphi \right) N_{\varphi n} + nN_{\varphi\vartheta_n} + R_0 \left(Y_n + Z_n \mathrm{ctg}\,\varphi \right) = 0 \; .$$

Treba primetiti da poluprečnik krivine R_1 ima negativnu vrednost $R_1=-R$. Ovo proizilazi iz činjenice da smo prilikom izvodjenja jednačina (III.27a,b) smer unutrašnje normale usvojili kao pozitivan.

Daljnim sažimanjem jednačina (III.37a,b) nalazimo

$$\frac{d}{dz}\left(N_{\varphi\vartheta_n}R_0^2\right)-\frac{nR_0^2}{R\sin^2\varphi}N_{\varphi n}+\frac{R_0^2}{\sin\varphi}\left(X_n+\frac{n}{\sin\varphi}Z_n\right)=0,$$

$$\frac{d}{dz}\left(N_{\varphi n}R_0\sin\varphi\right)+nN_{\varphi\vartheta_n}+R_0\left(Y_n+Z_n\operatorname{ctg}\varphi\right)=0. \qquad \text{(III.38a,b)}$$

Uvodjenjem novih nepoznatih

$$U_n(z)=N_{\varphi n}R_0\sin\varphi,$$

$$V_n(z)=N_{\vartheta\varphi n}R_0^2, \qquad \text{(III.39a,b)}$$

i stavljajući

$$C_n(z)=-R_0\left(Y_n+Z_n\operatorname{ctg}\varphi\right),$$

$$D_n(z)=\frac{R_0^2}{\sin\varphi}\left(X_n+\frac{n}{\sin\varphi}Z_n\right), \qquad \text{(III.40a,b)}$$

prethodne jednačine možemo napisati u obliku

$$dV_n(z)-\frac{nR_0}{R\sin^3\varphi}U_n(z)=D_n(z),$$

$$\frac{dU_n(z)}{dz}+\frac{n}{R_0^2}V_n(z)=C_n(z). \qquad \text{(III.41a,b)}$$

Jednačina meridijalne linije rotacionog hiperboloida glasi (Sl. 21)

$$\frac{R_0^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1,$$

gde b predstavlja imaginarnu poluosu hiperbole.

Dalje dobijamo sledeće relacije

$$R_0=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+z^2}, \quad \operatorname{ctg}\varphi=\frac{dR_0}{dz}=\frac{\alpha z}{R_0}, \quad \alpha=\frac{a^2}{b^2}$$

i

$$\sin\varphi = \frac{R_0}{R_2} \;, \quad \cos\varphi = \frac{1}{R_2}\sqrt{R_2^2 - R_0^2} = \frac{\alpha z}{R_2} \;,$$

$$R_2 = a\sqrt{1+(\alpha+\alpha^2)\frac{z^2}{R^2}} \;, \quad R = a^2 b^2 \left(\frac{R_0^2}{a^4} + \frac{z^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Eliminacijom nepoznate $V_n(z)$ sistem diferencijalnih jednačina (III.41a,b) prvog reda možemo svesti na jednu jednačinu drugog reda u kojoj figuriše samo nepoznata $U_n(z)$.

Diferenciranjem druge jednačine (III.41b) nalazimo

$$\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + \frac{d}{dz}\left(\frac{n}{R_0^2}\right)V_n(z) + \frac{n}{R_0^2}\frac{dV_n(z)}{dz} = \frac{dC_n(z)}{dz} \;.$$

Unošenjem vrednosti za $V_n(z)$ i $\frac{dV_n(z)}{dz}$ iz sistema (III.41a), imajući na umu da je

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{n}{R_0^2}\right) = -2nR_0^{-3}\frac{dR_0}{dz} = -2n\frac{\alpha z}{R_0^4} \;,$$

dobijamo konačno:

$$\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2} + 2\alpha^2\frac{z}{R_0^2}\frac{dU_n(z)}{dz} + \frac{n^2}{R_0 R_1 \sin^3\varphi}U_n(z) = \qquad \text{(III.42)}$$

$$= \frac{dC_n}{dz} + 2\alpha^2\frac{z}{R_0^2}C_n - \frac{n}{R_0^2}D_n \;.$$

Primenom metode konačnih razlika, deleći interval $-h_1 \leq z \leq h_2$ na M jednakih delova, prethodnu diferencijalnu jednačinu možemo u svakoj podeonoj tački $m\,(m=0,1,2\ldots M)$ intervala prevesti u linearnu jednačinu.

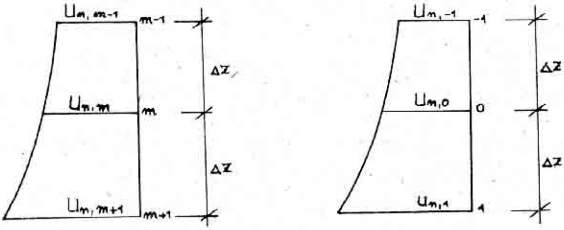
Stavljajući, naime

$$\left(\frac{dU_n(z)}{dz}\right)_m = \frac{U_{n,m+1} \quad U_{n,m-1}}{2\Delta z}$$

i

$$\left(\frac{d^2 U_n(z)}{dz^2}\right)_m = \frac{U_{n,m+1} - 2U_{n,m} \quad U_{n,m-1}}{\Delta z^2}$$

gde je Δz (Sl. 22a) razmak izmedju podeonih tačaka dobijamo



a) b)

(Sl. 22)

za tačku $m\,(m=0,1,2\ldots M)$ sledeću linearnu jednačinu:

$$U_{n,m-1}\,\delta^{(n)}_{m,m-1}+U_{n,m}\,\delta^{(n)}_{m,m}+U_{n,m+1}\,\delta^{(n)}_{m,m+1}=\delta^{(n)}_{m,m0}\ , \qquad \text{(III.43)}$$

gde je

$$\delta^{(n)}_{m,m-1}=\frac{1}{\Delta z^2}\quad\frac{\alpha^2 z_m}{\Delta z\,R^2_{om}}$$

$$\delta^{(n)}_{m,m}=\frac{n^2}{R_{om}\,R_{1m}\,\sin^3\varphi_m}-\frac{2}{\Delta z^2}$$

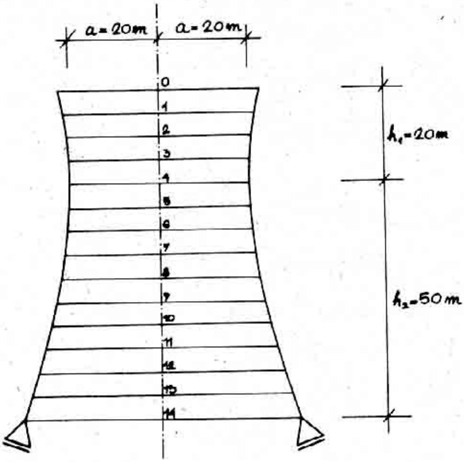
$$\delta^{(n)}_{m,m+1}=\frac{1}{\Delta z^2}+\frac{\alpha^2 z_m}{\Delta z\,R^2_{om}}$$

Rešenjem sistema jednačina (III.43) zajedno sa 2 uslova na konturi ljuske, koje treba takodje izraziti putem konačnih razlika, dobija se rešenje zadatka za opterećenje dato izrazima (III.24a,b,c). Superpozicijom ovih rešenja za $n=1,2\ldots N$ dobija se rešenje ovog problema.

Brojni primer

Na (Sl. 23) data je ljuska oblika rotacionog hiperboloida sa njenim osnovnim karakteristikama. Geometrijski podaci potrebni za proračun dati su u narednoj tabeli.

m	z_m	R_{om}	R_{1m}	R_{2m}
0	-20.000	24.037	94.681	25.628
1	-15.000	22.361	71.458	23.333
2	-10.000	21.082	56.257	21.545
3	- 5.000	20.276	47.735	20.397
4	0.000	20.000	45.000	20.000
5	5.000	20.276	47.735	20.397
6	10.000	21.082	56.257	21.545
7	15.000	22.361	71.458	23.333
8	20.000	24.037	94.681	25.628
9	25.000	26.034	127.574	28.306
10	30.000	28.284	171.982	31.269
11	35.000	30.732	229.869	34.444
12	40.000	33.333	303.272	37.778
13	45.000	36.056	394.272	41.231
14	50.000	38.873	504.980	44.777



(Sl. 23)

Ljuska je opterećena vetrom tako da je

$$X = Y = 0 \quad , \quad Z = \sum_{n=0}^{N} Z_n(z) \cos n\vartheta$$

gde je

$$Z_n = p(z) \sin\varphi \, K_n$$

Vrednosti $p(z)$ i K_n imaju sledeće značenje:

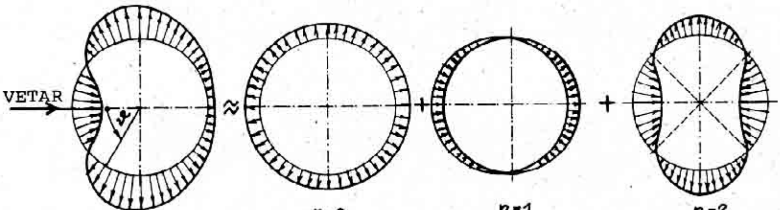
$p(z)$ - osnovno opterećenje vetrom dato propisima

K_n - koeficijent opterećenja, koji se takodje daje propisima ili dobija na osnovu ispitivanja.

U ovom primeru usvajamo $p(z)$=const = 1 kN/m^2,

$$K_0 = -0{,}7 \qquad K_1 = 0{,}5 \qquad K_2 = K_N = 1{,}2$$

Raspored opterećenja po obimu paralelnog kruga dat je na (Sl. 24)



(Sl. 24)

Gornja kontura ljuske je slobodna tako da su granični uslovi na tom kraju

$$z = h_1 \quad , \quad N_\varphi = N_{\vartheta\varphi} = 0$$

odnosno

$$U_{n,0} = 0 \quad , \quad V_{n,0} = 0$$

Na osnovu jednačine (III.41 b) drugi uslov možemo izraziti preko promenljive U_n (Sl. 22b).

$$\frac{U_{n,1} - U_{n,-1}}{2\,\Delta z} = C_{n,0}$$

odnosno

$$U_{n,-1} = U_{n,1} - 2\, C_{n,0}\, \Delta z \quad , \qquad \text{(III.44)}$$

m	$U_{0,m}$	$N_{0,\varphi}$	$N_{0,\vartheta}$	$N_{0,\varphi\vartheta}$
0	0.000	0.000	-24.037	0.000
1	49.671	2.318	-23.118	0.000
2	91.193	4.421	-22.775	0.000
3	123.796	6.142	-22.900	0.000
4	146.423	7.321	-23.254	0.000
5	158.005	7.839	-23.626	0.000
6	157.810	7.650	-24.012	0.000
7	145.612	6.795	-24.580	0.000
8	121.597	5.394	-25.497	0.000
9	86.166	3.599	-26.833	0.000
10	39.758	1.554	-28.567	0.000
11	-17.233	-0.628	-30.638	0.000
12	-84.486	-2.873	-32.976	0.000
13	-161.753	-5.130	-35.519	0.000
14	-248.846	-7.374	-38.219	0.000

m	$U_{1,m}$	$N_{1,\varphi}$	$N_{1,\vartheta}$	$N_{1,\varphi\vartheta}$
0	0.000	0.000	-24.037	0.000
1	62.999	2.940	-23.321	-8.261
2	146.502	7.102	-23.802	-14.244
3	248.931	12.351	-25.553	-19.579
4	364.384	18.219	-28.097	-23.474
5	483.669	23.997	-30.530	-25.532
6	597.613	28.970	-32.177	-26.003
7	700.210	32.676	-33.031	-25.570
8	789.428	35.016	-33.515	-24.921
9	866.044	36.169	-34.059	-24.485
10	932.086	36.432	-34.908	-24.434
11	989.782	36.098	-36.141	-24.780
12	1041.095	35.397	-37.743	-25.467
13	1087.593	34.494	-39.663	-26.428
14	1130.476	33.498	-41.843	-27.597

m	$U_{2,m}$	$N_{2,\varphi}$	$N_{2,\vartheta}$	$N_{2,\varphi\vartheta}$
0	0.000	0.000	-24.037	0.000
1	102.981	4.806	-23.930	-12.275
2	309.384	14.998	-26.826	-22.801
3	602.493	29.893	-33.049	-30.344
4	938.356	46.918	-40.852	-32.821
5	1258.913	62.461	-46.965	-30.209
6	1520.447	73.706	-49.310	-24.832
7	1712.057	79.896	-48.449	-19.675
8	1850.067	82.062	-46.249	-16.617
9	1961.030	81.899	-44.206	-16.065
10	2069.184	80.878	-42.989	-17.577
11	2191.970	79.942	-42.711	-20.497
12	2340.326	79.571	-43.245	-24.268
13	2520.495	79.939	-44.415	-28.507
14	2735.562	81.059	-46.061	-32.975

gde je $U_{n,-1}$ ekstrapolirana vrednost za tačku m =-1 izvan oblasti.

Jednačinu (III.43) napisaćemo u obliku:

$$U_{n,m+1} = \frac{1}{\delta_{m,m+1}^{(n)}} \left(\delta_{m,mo}^{(n)} - U_{n,m} \delta_{m,m}^{(n)} - U_{n,m-1} \delta_{m,m-1}^{(n)} \right) \tag{III.45}$$

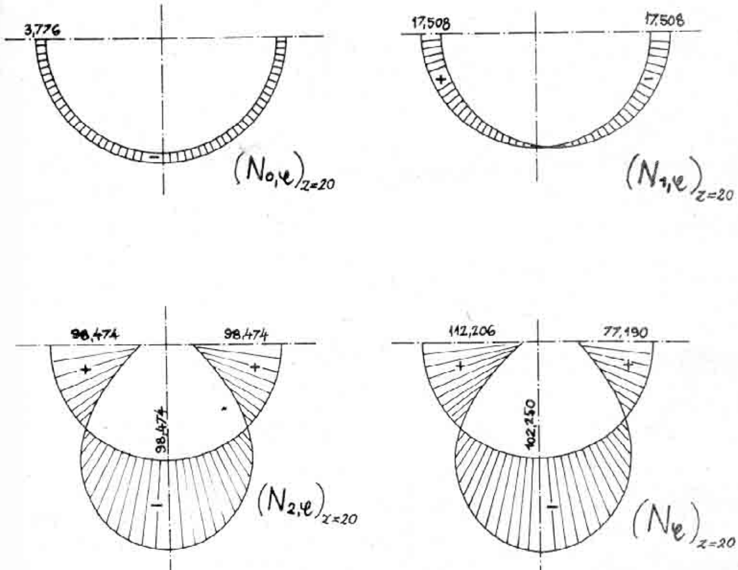
za tačku m =0, imajući na umu uslove (III.44) na konturi, dobijamo:

$$U_{n,1} = \frac{1}{\delta_{0,1}^{(n)} + \delta_{0,-1}^{(n)}} \left(\delta_{n,0}^{(n)} + 2 C_{n,0} \delta_{0,-1}^{(n)} \Delta Z \right) \tag{III.46}$$

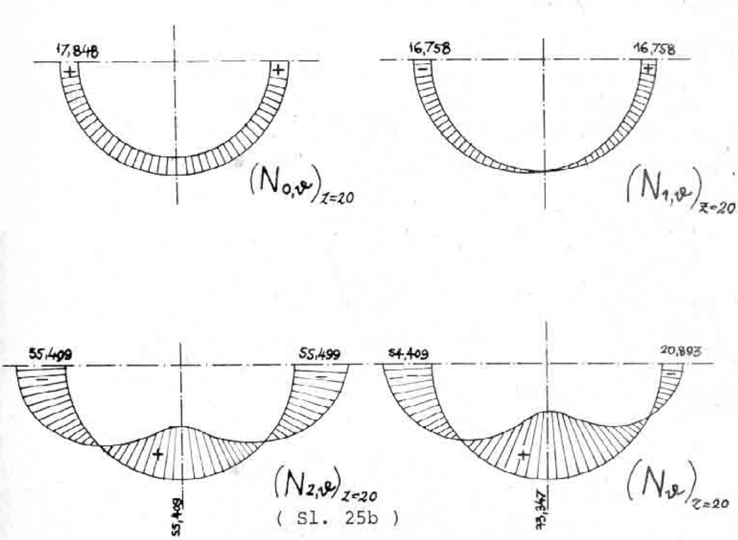
Počev od tačke m =1 vrednosti $U_{n,2}$, $U_{n,3}$ .....$U_{n,M}$ sračunavamo direktno iz izraza (III.45), koji u stvari predstavlja rekurentni obrazac za sračunavanje pomenutih vrednosti.

Proračun veličina $U_{n,m}$, $N_{\varphi m}$, $N_{\vartheta m}$, $N_{\varphi\vartheta m}$ dat je u sledećim tabelama.

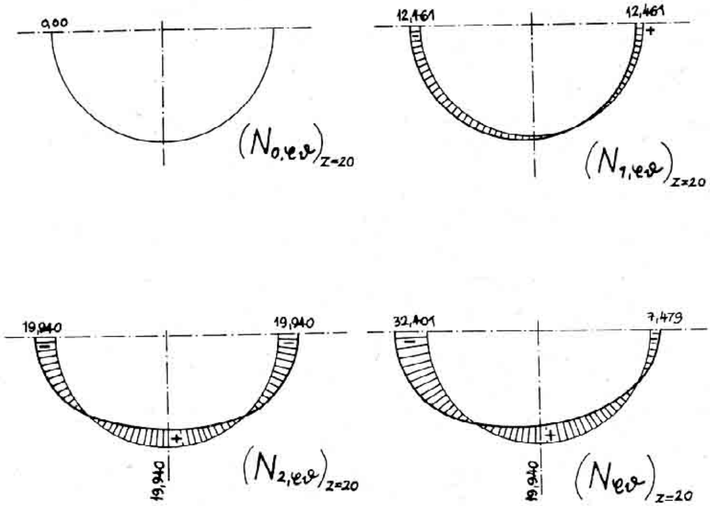
Dijagrami presečnih sila u pojedinim presecima za n =0, 1, 2 kao i zbirni dijagrami dati su na (Sl. 25a,b,c,d).


3,776
$(N_{0,\varphi})_{z=20}$
17,508
17,508
$(N_{1,\varphi})_{z=20}$
98,474
98,474
98,474
$(N_{2,\varphi})_{z=20}$
112,206
77,190
102,250
$(N_{\varphi})_{z=20}$

(Sl. 25a)

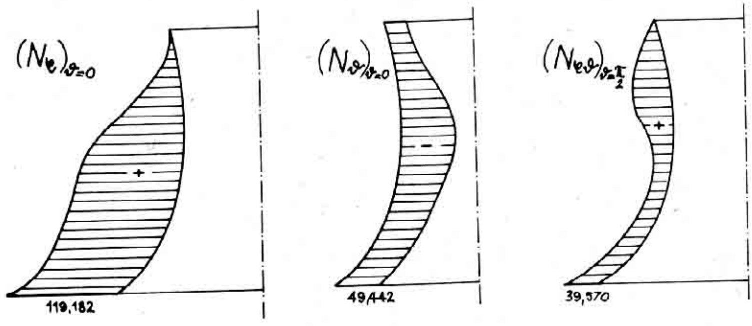

17,848
$(N_{0,\vartheta})_{z=20}$
16,758
16,758
$(N_{1,\vartheta})_{z=20}$
55,409
55,499
55,409
$(N_{2,\vartheta})_{z=20}$
54,409
20,893
73,347
$(N_{\vartheta})_{z=20}$

(Sl. 25b)



0,00
$(N_{0,\varphi\vartheta})_{z=20}$
12,461
12,461
$(N_{1,\varphi\vartheta})_{z=20}$
19,940
19,940
19,940
$(N_{2,\varphi\vartheta})_{z=20}$
32,401
7,479
19,940
$(N_{\varphi\vartheta})_{z=20}$

(Sl. 25c)



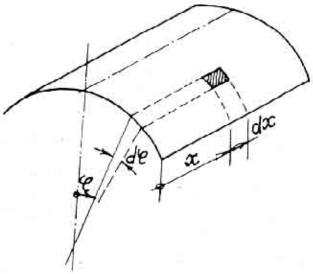
$(N_{\varphi})_{\vartheta=0}$
119,182
$(N_{\vartheta})_{\vartheta=0}$
49,442
$(N_{\varphi\vartheta})_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}$
39,570

(Sl. 25d)

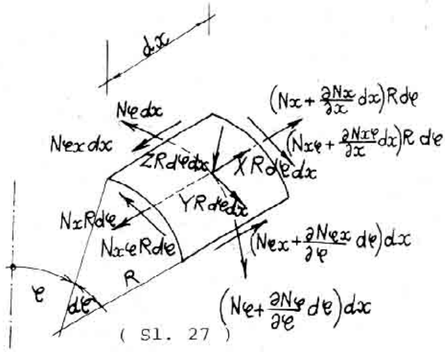
BEZMOMENTNA TEORIJA CILINDRIČNIH LJUSKI

1. Osnovne jednačine ravnoteže za proizvoljan oblik presečne krive

Za sistem glavnih koordinata izabraćemo odstojanje x od nekog unapred odredjenog poprečnog preseka i ugao φ koji zaklapa normala u posmatranoj tački sa pravcem neke unapred odredjene normale (Sl. 26).



(Sl. 26)



(Sl. 27)

Koordinatama x i φ odredjen je položaj svake tačke na srednjoj površi cilindrične ljuske. Ordinata Z , kao odstojanje od srednje površi biće pozitivno merena u pravcu unutrašnje normale. Kao presečne sile javaljaju se N_x , N_φ i $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$

Uslovi ravnoteže sila koje napadaju elemenat isečen iz ljuske sa dva para preseka x i $x+dx$ odnosno φ i $\varphi + d\varphi$ (Sl. 27) daju:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{R \partial \varphi} + X = 0 , \qquad \text{(III.47a,b,c)}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} + Y = 0 ,$$

$$\frac{N_\varphi}{R} + Z = 0 .$$

Kao što se vidi iz ovih izraza presečna sila N_φ zavisi samo od veličine opterećenja Z na tom mestu.

Integracijom ovih jednačina dobijamo:

$$N_\varphi = -ZR,$$

$$N_{\varphi x} = -\int\left(Y + \frac{1}{R}\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi}\right)dx + C_1(\varphi), \qquad \text{(III.48a,b,c)}$$

$$N_x = -\int\left(X + \frac{\partial N_{\varphi x}}{R\partial \varphi}\right)dx + C_2(\varphi).$$

Specijalan slučaj predstavlja opterećenje $X=0$, a Y i Z su nezavisne od koordinate x. Tada imamo:

$$N_\varphi = -ZR,$$

$$N_{\varphi x} = -\left(Y + \frac{1}{R}\frac{dN_\varphi}{d\varphi}\right)x + C_1(\varphi), \qquad \text{(III.49a,b,c)}$$

$$N_x = \frac{1}{R}\frac{d}{d\varphi}\left(Y + \frac{1}{R}\frac{dN_\varphi}{d\varphi}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{R}\frac{dC_1(\varphi)}{d\varphi}x + C_2(\varphi).$$

2. Kružna cilindrična ljuska

a) Presečne sile za proizvoljno opterećenje

Površinsko opterećenje možemo uvek predstaviti u obliku:

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos n\varphi,$$

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin n\varphi, \qquad \text{(III.50a,b,c)}$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \cos n\varphi,$$

gde su X_n, Y_n, Z_n poznate funkcije koordinate x a n dobija vrednosti 0,1,2,3... Vrednost $n=0$ odgovara rotaciono simetričnom opterećenju, pa je razumljivo $Y_0=0$.

Posmatraćemo samo jedan član takvog opterećenja i za njega potražiti rešenje. Ukupno rešenje dobija se superpozicijom rešenja za svaki član opterećenja. Tako imamo:

$$X = X_n \cos n\varphi \,, \quad Y = Y_n \sin n\varphi \,, \quad Z = Z_n \cos n\varphi \,, \tag{III51,a,b,c}$$

Presečne sile dobićemo integracijom jednačina (III48a,b,c)

$$N_\varphi = -Z_n a \cos n\varphi \,,$$
$$N_{\varphi x} = -\sin n\varphi \int (Y_n + n Z_n) dx + C_1(\varphi) \,, \tag{III52.a,b,c}$$

Imajući u vidu da je

$$\frac{1}{a}\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} = -\frac{n}{a}\cos n\varphi \int (Y_n + Z_n n) dx + \frac{1}{a}\frac{dC_1(\varphi)}{d\varphi}$$

dobijamo:

$$N_x = -\frac{1}{a}\cos n\varphi \int \left[X_n a - n \int Y_n + n Z_n \, dx \right] dx - \frac{1}{a}\frac{dC_1(\varphi)}{d\varphi} + C_2(\varphi) \tag{III52c}$$

U specijalnom slučaju kada je $X_n = 0$ a Y_n i Z_n nezavisno od x jednačine (III52a,b,c) možemo integrisati u zatvorenom obliku. Predpostavimo li funkcije $C_1(\varphi)$ i $C_2(\varphi)$ kao periodične funkcije od x :

$$C_1(\varphi) = A_1 \sin n\varphi \,,$$
$$C_2(\varphi) = A_2 \cos n\varphi \,,$$

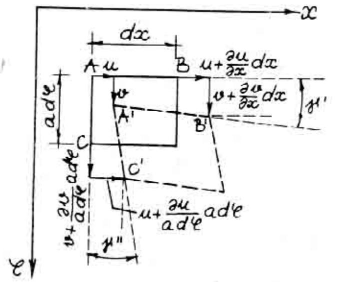
pri čemu su A_1 i A_2 konstante, tada iz jednačina (III52a,b,c) sledi:

$$N_\varphi = -Z_n a \cos n\varphi \,,$$
$$N_{\varphi x} = -\left[(Y_n + nZ_n)x - A_1 \right] \sin n\varphi \,, \tag{III53a,b,c}$$
$$N_x = \left\{ \frac{n}{a}\left[(Y_n + nZ_n)\frac{x^2}{2} - A_1 x \right] + A_2 \right\} \cos n\varphi \,.$$

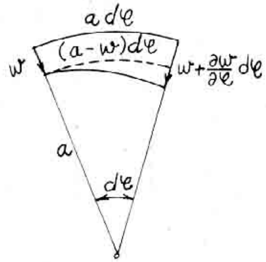
b) Deformacija

Pomeranje tačaka srednje površine ljuske opisaćemo sa tri komponente pomeranja u , v , w u pravcu x , φ i z .

Posmatraćemo elemenat isečen iz ljuske dužine dx i $a\,d\varphi$ (Sl. 28).



(Sl. 28)



(Sl. 29)

Saopštimo tački A (Sl. 28) pomeranja u i v. Njen novi položaj biće tačka A' . Tačka B na beskonačno malom odstojanju dx pretrpeće pomeranja

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}dx \quad , \qquad v+\frac{\partial v}{\partial x}dx \;,$$

Slično tome se i tačka C na odstojanju $a\,d\varphi$ pomeriti za

$$u+\frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi \quad , \qquad v+\frac{\partial v}{\partial \varphi}d\varphi \;,$$

Razlika pomeranja tačaka A i B u pravcu x ose podeljena sa odstojanjem dx daje dilataciju ε_x

$$\varepsilon_x=\frac{u+\frac{\partial u}{\partial x}dx-u}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}\;. \tag{III.54}$$

Razlika u pomeranju v tačaka A i C doprinosi promeni dužine $a\,d\varphi$. Deo dilatacije $\varepsilon_\varphi^{(1)}$ izazvan ovom razlikom u pomeranju jednak je

$$\varepsilon_\varphi^{(1)}=\frac{v+\frac{\partial v}{\partial \varphi}d\varphi-v}{a\,d\varphi}=\frac{\partial v}{a\,\partial \varphi}\;,$$

Osim toga će luk $a d\varphi$ izmeniti svoju dužinu i usled pomeranja w u pravcu normale na srednju površinu.

Nova dužina (Sl. 29) je zanemarujući male veličine višeg reda jednaka $(a-w)d\varphi$. To daje drugi deo dilatacije ε_φ:

$$\varepsilon_\varphi^{(w)} = \frac{(a-w)d\varphi - a d\varphi}{a d\varphi} = -\frac{w}{a} ,$$

pa je ukupno:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{dv}{a d\varphi} - \frac{w}{a} . \qquad \text{(III.55)}$$

Na kraju menja se i prav ugao izmedju linijskih elemenata dx i $a d\varphi$, što daje deformaciju klizanja:

$$\gamma_{x\varphi} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)\frac{1}{dx} + \left(\frac{\partial u}{a d\varphi} a d\varphi\right)\frac{1}{a d\varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{d\varphi} \qquad \text{(III.56)}$$

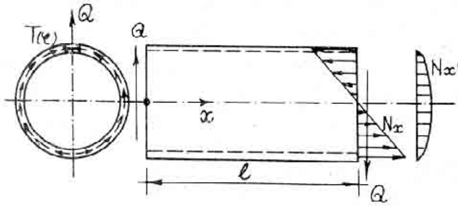
Imajući na umu veze izmedju komponentalnih deformacija i presečnih sila dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Eh}\left(N_x - \nu N_\varphi\right) \\ \frac{\partial v}{a\partial\varphi} - \frac{w}{a} &= \frac{1}{Eh}\left(N_\varphi - \nu N_x\right) \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial\varphi} &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{x\varphi} \end{aligned} \qquad \text{(III.57a,b,c)}$$

Iz ovih izraza mogu se sračunati pomeranja kad su zadate presečne sile.

c) Primer

Kružna cev opterećena na konturi (Sl. 30).



(Sl. 30)

Opterećenje silom Q na kraju neka je takvo da je raspored smičućih sila za $x=0$:

$$N_{x\varphi} = \frac{Q}{\pi a} \sin\varphi$$

Granični uslovi su sledeći:

$$x=0 \qquad N_x = 0 \qquad N_{x\varphi} = T(\varphi)$$

Na osnovu izraza (III.48 a,b,c) imajući na umu ove granične uslove dobijamo:

$$N_\varphi = 0$$

$$N_{x\varphi} = C_1(\varphi) = \frac{Q}{\pi a} \sin\varphi \qquad \text{(III.58a,b,c)}$$

$$N_x = -\frac{Q}{\pi a^2} x \cos\varphi$$

Pomeranje u možemo odrediti iz jednačine:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh}\left(N_x - \nu N_\varphi\right) = -\frac{Q}{Eh\pi a^2} x\cos\varphi$$

$$u = -\frac{Q}{2E\pi a^2 h} x^2 \cos\varphi + C_3(\varphi)$$

Funkciju $C_3(\varphi)$ odredićemo tako što ćemo staviti da je za $x=\ell$ pomeranje $u=0$:

$$C_3(\varphi)=\frac{Q\ell^2\cos\varphi}{2\pi a^2 hE}$$

pa je

$$u=\frac{Q}{2E\pi n^2 h}\left(\ell^2-x^2\right)\cos\varphi$$

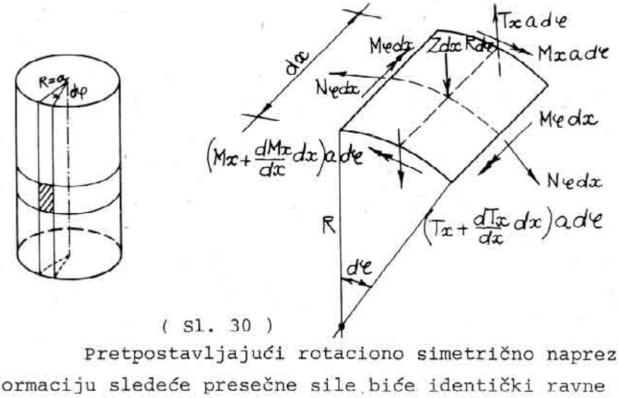
Ako je cev uklještena za $x=\ell$ moraju biti zadovoljeni uslovi $u=v=w=0$. Prvi smo uslov već iskoristili. I uslov za v možemo integracijom jednačine (III.57c) iskoristiti jer ćemo imati novu integracionu funkciju $C_4(\varphi)$ na raspolaganju. Pomeranje w sledi tada iz konačne jednačine (III.57b). Medjutim, sada više nemamo slobodnih integracionih funkcija po φ da bi uslov $w=0$ ispunili..

Iz ovog sledi da nepomerljivost tačaka oslanjanja u pravcu z pri membranskom naprezanju nisu ostvarljiva. Realni uslovi oslanjanja izazvali bi savijanje ljuske i odgovarajuće presečne sile na krajevima.

SAVIJANJE KRUŽNE CILINDRIČNE LJUSKE PRI ROTACIONO SIMETRIČNOM OPTEREĆENJU

Jedan od svakako najjednostavnijih problema iz teorije savijanja ljuski je cilindrična ljuska pri rotaciono simetričnom opterećenju. U tehničkim primenama ovaj zadatak se javlja takodje često. To su pre svega cilindrični rezervoari opterećeni vodom ili različitim tečnostima odnosno gasovima, kao i druge konstrukcije cilindričnog oblika kod kojih se javlja rotaciono simetrično opterećenje.

Isecimo iz ljuske elemenat (Sl. 30) sa dva para preseka x i $x+dx$ odnosno φ i $\varphi+d\varphi$.



(Sl. 30)

Pretpostavljajući rotaciono simetrično naprezanje i deformaciju sledeće presečne sile biće identički ravne nuli:

$$N_{\varphi x} = T_{\varphi} = M_{\varphi x} = 0 ,$$

dok su ostale samo funkcija koordinate x .

Isto tako je i opterećenje Y u pravcu tangente na krug jednako nuli.

Opterećenje u pravcu x ose $X(x)$ izaziva samo presečne sile N_x . Njihova veličina za zadato opterećenje X može se sračunati prema jednačini:

$$N_x = \frac{N}{2\pi a} ,$$

gde je sa N obeležena ukupna normalna sila za ceo poprečni presek silindra kao štapa.

Opterećenje X i presečnu silu N_x ćemo zbog toga isključiti iz daljeg posmatranja pa je ukupan broj nepoznatih presečnih sila jednak 4 i to su M_x, T_x, N_φ, M_φ.

Uslovi ravnoteže sila koje deluju na prikazani elemenat isečen iz ljuske daju dve jednačine za odredjivanje presečnih sila.

Zbir momenata svih sila oko tangente na krug daje:

$$\frac{dM_x}{dx} - T_x = 0 \, , \tag{III.59a}$$

a zbir svih sila u pravcu normale na srednju površinu:

$$\frac{N_\varphi}{a} + \frac{dT_x}{dx} + Z = 0 \, . \tag{III.59b}$$

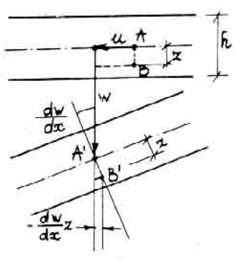
Ukupan broj nepoznatih u ove dve jednačine jednak je 3 pa je zadatak statički neodredjen. Da bi ga rešili moramo posmatrati deformaciju ljuske. Izrazi za komponentne deformacije ε_x i ε_φ odnosno $\varkappa_x$ tačke srednje površi putem pomeranja izvedene su ranije prilikom izučavanja membranske teorije cilindričnih ljuski. Tako imamo (imajući u vidu rotaciono simetričnu deformaciju):

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \, , \qquad \varepsilon_\varphi = -\frac{w}{a} \, ,$$

Osnovna hipoteza za savijanje tankih ljuski je, kao što smo napočetku istakli, tzv. Kirchoff-Love-ova hipoteza o upravnosti normale na srednju površi ljuske i posle deformacije.

Iz ove hipoteze sledi neposredno da je pomeranje proizvoljne tačke ljuske u pravcu x ose ravno (Sl. 31):

$$u_z = u - \frac{dw}{dx} z \, ,$$



pa je dilatacija $\varepsilon_{x_z} = \frac{du_z}{dx}$ vlakna na ostojanju z od srednje površi:

$$\varepsilon_{x_z} = -\frac{d^2w}{dx^2}z + \frac{du}{dx} \tag{III.60}$$

S obzirom daje $w_z = w$ imamo:

$$\varepsilon_{\varphi_z} = -\frac{w}{a} \tag{III.61}$$

Na osnovu Hook-ovog zakona nalazimo:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\varepsilon_{x_z} + \nu\varepsilon_{\varphi_z}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-z\frac{d^2w}{dx^2} - \nu\frac{w}{a} + \frac{du}{dx}\right),$$

(III.62a,b)

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\varepsilon_{\varphi_z} + \nu\varepsilon_{x_z}\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(-\frac{w}{a} - \nu z\frac{d^2w}{dx^2} + \nu\frac{du}{dx}\right).$$

pa su presečne sile odredjene sledećim izrazima:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_x z\,dz = -\frac{E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{h/2} z\left(z\frac{d^2w}{dx^2} + \nu\frac{w}{a} - \frac{du}{dx}\right)dz =$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\frac{d^2w}{dx^2},$$

(III.63a,b,

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x\,dz = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dx} - \nu\frac{w}{a}\right) = 0$$

$$N_\varphi = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\varphi\,dz = -\frac{E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{w}{a} - \nu\frac{du}{dx} + \nu z\frac{d^2w}{dx^2}\right)dz = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(-\frac{w}{a} + \nu\frac{du}{dx}\right)$$

Obeležavajući

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

imamo:

$$M_x = -K\frac{d^2w}{dx^2} \tag{III.64}$$

Iz izraza za N_x proizilazi da je $\frac{du}{dx} = \nu\frac{w}{a}$,

tako da se izraz za N_φ može konačno napisati u obliku:

$$N_\varphi = -Eh\frac{w}{a} \tag{III.65}$$

Iz uslova ravnoteže možemo eliminisati transverzalnu silu T_x, pa dobijamo jednu jednačinu u kojoj figurišu nepoznate M_x i N_φ

$$T_x = \frac{dM_x}{dx} \quad ,$$

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{N_\varphi}{a} = -Z \ .$$

Unoseći u ovu jednačinu izraze za M_x i N_φ putem pomeranja w dobijamo konačno diferencijalnu jednačinu cilindrične ljuske pri rotaciono simetričnom opterećenju:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(K\frac{d^2w}{dx^2}\right) + \frac{Eh}{a^2}w = Z \qquad \text{(III.66)}$$

Za ljusku konstantne debljine tj. za h =const. imamo:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2h^2}w = \frac{Z}{K} \ . \qquad \text{(III.67)}$$

Obeležavajući sa $\beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2h^2}$ prethodnu jednačinu možemo napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{K} \qquad \text{(III.68)}$$

Rešenje gornje jednačine prikazaćemo kao zbir opšteg rešenja homogene diferencijalne jednačine i partikularnog integrala nehomogene jednačine:

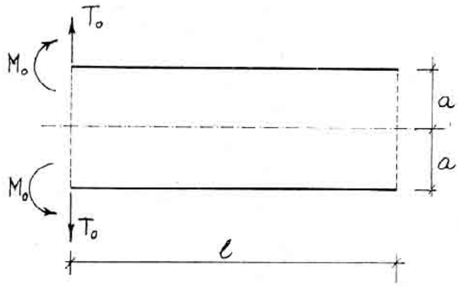
$$w = w_0 + e^{\beta x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) + e^{-\beta x}\left(C_3\cos\beta x + C_4\sin\beta x\right) \qquad \text{(III.69)}$$

1. Duga cilindrična ljuska

Uzmimo kao primer ljusku beskonačne dužine (Sl. 32) opterećenu na jednom kraju ravnomerno rasporedjenim momentom M_0 i transverzalnom silom T_0.

U tom slučaju je:

$$w_0 = 0$$



(Sl. 32)

Ravnotežni sistem sila T_o i momenata M_o izaziva uticaje koji opadaju udaljavajući se od opterećenog kraja ljuske, pa je za $x \to \infty$:

$$w = 0$$

iz čega proizilazi:

$$C_1 = C_2 = 0 \ .$$

Izraz za ugib je tada sledeći:

$$w = e^{-\beta x}\left(C_3 \cos\beta x + C_4 \sin\beta x \right). \qquad \text{(III.70)}$$

Konstante C_3 i C_4 odredjujemo iz graničnih uslova za $x = 0$:

$$\begin{aligned} M_x &= -K\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right) = M_o \\ T_x &= -K\left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right) = T_o \end{aligned} \qquad \text{(III.71a,b)}$$

Diferencirajući izraz za w dobijamo:

$$\frac{dw}{dx} = \beta e^{-\beta x}\left[\left(-C_3 + C_4\right)\cos\beta x + \left(-C_3 - C_4\right)\sin\beta x \right]$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2\beta^2 e^{-\beta x}\left[-C_4 \cos\beta x + C_3 \sin\beta x \right]$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = 2\beta^3 e^{-\beta x}\left[\left(C_4 + C_3\right)\cos\beta x + \left(C_4 - C_3\right)\sin\beta x \right]$$

Na osnovu izraza (III.71a,b) nalazimo:

$$2\beta^2 K C_4 = M_0$$

$$-2\beta^3 K (C_4 + C_3) = T_0 \ ,$$

odnosno: $$C_3 = -\frac{1}{2\beta^3 K}(T_0 + \beta M_0) \ , \quad C_4 = \frac{\beta M_0}{2\beta^3 K} \ .$$

Konačno dobijamo:

$$w = -\frac{1}{2\beta^3 K} e^{-\beta x}\left[(T_0 + M_0\beta)\cos\beta x - M_0\beta \sin\beta x\right]. \qquad \text{(III.72)}$$

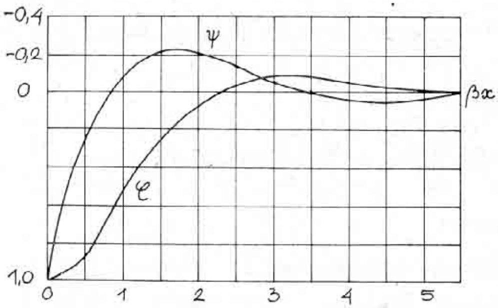
Uvodjenjem funkcija:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha) &= e^{-\alpha}(\cos\alpha + \sin\alpha) & \varphi'(\alpha) &= -2\zeta(\alpha) \\
\psi(\alpha) &= e^{-\alpha}(\cos\alpha - \sin\alpha) & \psi'(\alpha) &= -2\theta(\alpha) \\
\theta(\alpha) &= e^{-\alpha}\cos\alpha & \theta'(\alpha) &= -\varphi(\alpha) \\
\zeta(\alpha) &= e^{-\alpha}\sin\alpha & \zeta' &= \psi(\alpha) \ ,
\end{aligned} \qquad \text{(III.73)}$$

gde je $\alpha = \beta x$, izraz za w i njegove izvode možemo napisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
w &= -\frac{1}{2\beta^3 K}\left[\beta M_0 \psi(\beta x) + T_0 \theta(\beta x)\right] \\
\frac{dw}{dx} &= \frac{1}{2\beta^2 K}\left[2\beta M_0 \theta(\beta x) + T_0 \varphi(\beta x)\right] \\
\frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{1}{\beta K}\left[\beta M_0 \varphi(\beta x) + T_0 \zeta(\beta x)\right] \\
\frac{d^3 w}{dx^3} &= \frac{1}{K}\left[2\beta M_0 \zeta(\beta x) - T_0 \psi(\beta x)\right]
\end{aligned} \qquad \text{(III.74a,b,c)}$$

Funkcije φ, ψ, ϑ i ζ prikazuju tok promene veličina koje definišu ugib i naprezanje ljuske. Sa sledećeg dijagrama vidi se da vrednosti φ i ψ (a isto to važi i za ϑ i ζ) veoma brzo opadaju sa porastom βx. Tako se već za $\beta x \geqslant 5$ može smatrati da su svi uticaji tako mali da se mogu zanemariti.



Ljuska takvih geometrijskih karakteristika da je $\beta \ell \geqslant 5$, gde je ℓ dužina ljuske, opterećena sa T_0 odnosno M_0 ponašaće se kao ljuska beskonačne dužine.

Ljuske za koje važi rešenje (III.70) spadaju u klasu tzv. dugih cilindričnih ljuski.

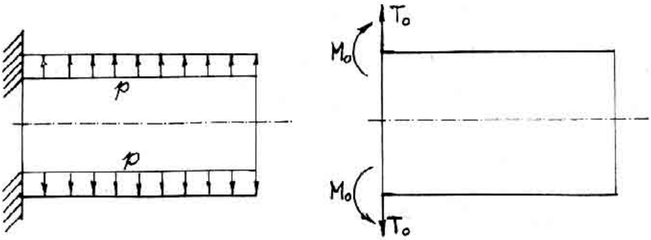
Pojam dužine treba shvatiti uslovno jer njega odredjuje izraz $\beta \ell$:

$$\beta \ell = \frac{1}{\sqrt{ah}} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\ \ell$$

Iz ovog izraza je vidljivo da vrednost $\beta \ell$ raste proporcionalno sa ℓ ali obrnuto proporcionalno sa $\sqrt{ah}$. Smanjenje ili povećanje poluprečnika a i debljine ljuske h takodje utiče na to da li će jedna ljuska biti duga ili kratka.

Kao prvi primer uzmimo cilindričnu ljusku prikazanu na(Sl. 33), opterećenu unutrašnjim pritiskom $Z = -p$.

Partikularni integral predstavlja rešenje za cilindričnu ljusku prema bezmomentnoj teoriji. Naime, za opterećenje Z i za ljusku sa slobodnim krajevima važi rešenje prema bezmomentnoj teoriji, pa imamo: $w_0 = -\dfrac{pa^2}{Eh}$



(Sl. 33)

Izrazi za ugib i nagib su sledeći:

$$w = -\frac{1}{2\beta^3 K}\left(M_0\beta\psi + T_0\vartheta\right) - \frac{pa^2}{Eh} ,$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2\beta^2 K}\left(2\beta M_0\vartheta - T_0\varphi\right) . \qquad \text{(III.75a,b)}$$

Granični uslovi za ljusku totalno ukliještenu na levom kraju su:

$$x = 0 \quad , \quad w = \frac{dw}{dx} = 0 \quad ,$$

pa nalazimo:

$$-\frac{1}{2\beta^3 K}\left(M_0\beta + T_0\right) = \frac{pa^2}{Eh}$$

$$\frac{1}{2\beta^2 K}\left(2M_0\beta + T_0\right) = 0 ,$$

i zatim:

$$M_0 = \frac{p}{\beta^2} ,$$

$$T_0 = -\frac{2p}{\beta} , \qquad \text{(III.76a,b)}$$

i konačno:

$$w = -p\left[\frac{1}{2\beta^4 K}\left(\psi - 2\vartheta\right) + \frac{a^2}{Eh}\right] . \qquad \text{(III.77)}$$

Sledeći primer je rezervoar uklješten u temelje i ispunjen tečnošću (Sl. 34).

Opterećenje rezervoara je:

$$Z = -\gamma(\ell - x) \tag{III.78}$$

pa je:

$$w_0 = -\frac{\gamma(\ell - x)a^2}{Eh} \tag{III.79}$$

a izraz za ugib :

$$w = -\frac{1}{2\beta^3 K}\left[M_0\beta\Psi + T_0\vartheta\right] - \frac{\gamma(\ell - x)}{Eh}a^2 \tag{III.80}$$

Iz graničnih uslova

$$x = 0 \,, \quad w = 0 \,; \quad \frac{dw}{dx} = 0 \,,$$

odnosno iz jednačina

$$\frac{1}{2\beta^3 K}\left(M_0\beta + T_0\right) = -\frac{\gamma a^2}{Eh}\ell$$

$$\frac{1}{2\beta^2 K}\left(2M_0\beta + T_0\right) = -\frac{\gamma a^2}{Eh} \,,$$

nalazimo vrednosti M_0 i T_0 :

$$M_0 = 2\,\frac{\gamma a^2\ell}{Eh}\beta^2 K\left(1 - \frac{1}{\beta\ell}\right) ,$$

$$T_0 = 2\,\frac{\gamma a^2\ell}{Eh}\beta^3 K\left(\frac{1}{\beta\ell} - 2\right) , \tag{III.81a,b}$$

i konačno rešenje za ugib:

$$w = \frac{-\gamma a^2\ell}{Eh}\left[1 - \frac{x}{\ell} - \varphi(\beta x) + \frac{1}{\beta\ell}\cdot\zeta(\beta x)\right] . \tag{III.82}$$

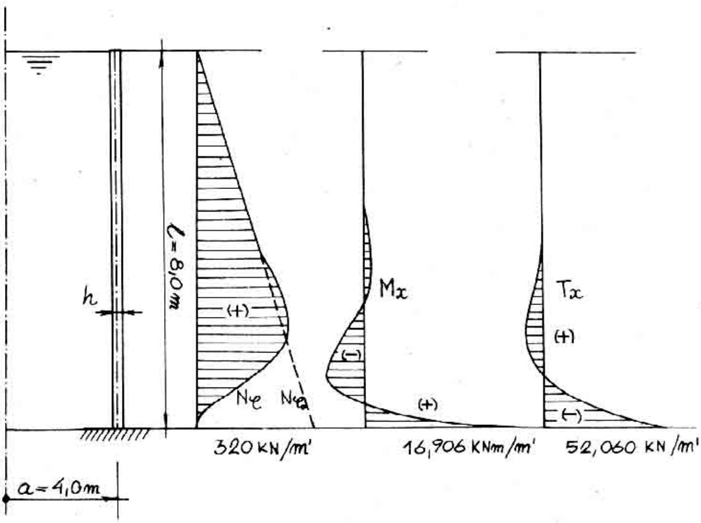
Za N_φ i M_x prema (III.64) i (III.65) nalazimo:

$$N_\varphi = \gamma \ell a\left[1-\frac{x}{\ell}-\varphi(\beta x)+\frac{1}{\beta \ell}\zeta(\beta x)\right]$$

(III.83a,b)

$$M_x = -K\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2\beta^2 \gamma a^2 K \ell}{Eh}\left[-\zeta(\beta x)+\left(1-\frac{1}{\beta \ell}\theta(\beta x)\right)\right]$$

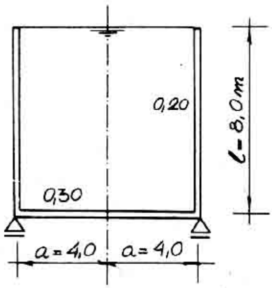
Za $\ell = 8{,}0m$, $a = 4{,}0$, $h = 0{,}20$, $\gamma = 10\ KN/m^3$, $E = 2{,}1\times 10^7 KN/m^2$ prikazani su na (Sl. 34) dijagrami N_φ, M_x i T_x.



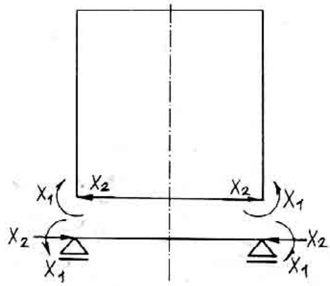
(Sl. 34)

2. Primer proračuna cilindričnog rezervoara sa kružnom pločom slobodno oslonjenom po konturi

Armirano betonski rezervoar prikazan na(sl. 35)napunjen vodom, predstavlja sistem sastavljen od cilindrične ljuske i kružne ploče. Izvršićemo dekompoziciju sistema na cilindričnu ljusku i kružnu ploču. Na taj način dobijamo tzv. osnovni sistem, pri čemu na svaki deo deluju, pored zadatog opterećenja i nepoznati momenat savijanja X_1 i horizontalne radijalne sile X_2, kako je prikazano na(sl. 36.)



(Sl. 35)



(Sl. 36)

Za cilindričnu ljusku nalazimo:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{a^2\delta^2}} = 1,46191$$

i

$$\beta l = 11,696 \, ,$$

pa se ljuska može smatrati dugom cilindričnom ljuskom.

Krutost ljuske i ploče su sledeće:

$$\frac{K_{CL}}{E} = \frac{\delta_{CL}^3}{12(1-\nu^2)} = 0,68 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{K_{PL}}{E} = \frac{\delta_{PL}^3}{12(1-\nu^2)} = 2,31 \cdot 10^{-3}$$

Uslovi kompatibilnosti deformacija duž kontakta ploče i ljuske mogu se izraziti slično kao i u metodi sila linijskih nosača.

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0 \qquad \text{(III.84a,b)}$$

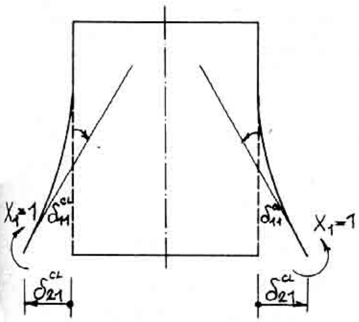
pri čemu koeficijenti δ_{ik} (i,k =1,2) predstavljaju odgovarajuća relativna obrtanja odnosno pomeranja sučeljnih delova za jedinične vrednosti sila X_k =1, a vrednosti δ_{i0} iste uticaje izazvane zadatim opterećenjem.

Za cilindričnu ljusku ove vrednosti su date u tački 1 Tako je obrtanje izvodnice za $x=0$, izazvano momentom $X_1=1$ jednako (sl. 37)

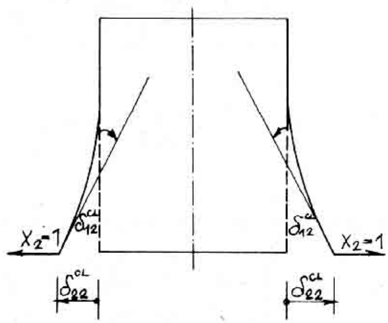
$$E\delta_{11}^{cl} = \frac{1}{K_{cl}\beta} = 999{,}788,$$

a horizontalno pomeranje izazvano istim momentom ;

$$E\delta_{21}^{cl} = \frac{1}{2K_{cl}\beta^2} = 341{,}947 .$$



(Sl. 37)

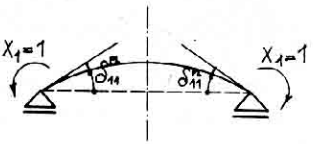


(Sl. 38)

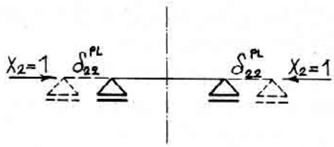
i dalje na sličan način za $X_2 = 1$

$$E\delta_{22}^{CL} = \frac{1}{2K_{CL}\beta^3} = 233,903$$

$$E\delta_{12}^{CL} = \frac{1}{2K_{CL}\beta^2} = 341,947$$



(Sl. 39)



(Sl. 40)

Za kružnu ploču vrednosti δ_{ik} nalazimo na osnovu poglavlja o savijanju kružne ploče (ploče napregnute na savijanje, tačka 6.2). Za opterećenje momentom $X_1 = 1$ na konturi (sl. 39) dobijamo:

$$E\delta_{11}^{PL} = \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{a}{K_{PL}(1+\nu)} \quad ,$$

što daje

$$E\delta_{11}^{PL} = 1493,333 .$$

Treba napomenuti da se znak za δ_{ik} , kao i u teoriji linijskih nosača, odredjuje prema pozitivno usvojenom znaku za $X_i = 1$.

Koeficijent δ_{22}^{PL} (sl. 40) odredjuje se kao pomeranje u ploče napregnute u svojoj ravni za $r = a$, a usled opterećenja $X_2 = 1$.

Za taj slučaj opterećenja je

$$F = Br^2 \;, \quad N_r = \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} = 2B \;, \quad N_\varphi = \frac{d^2F}{dr^2} = 2B \;,$$

Iz graničnog uslova:

$$r = a \qquad N_r = -1$$

nalazimo

$$B = -\frac{1}{2} \;,$$

pa je:

$$N_r = N_\varphi = -1$$

i dalje

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{1}{Eh}(1-\nu) \,.$$

Radijalno pomeranje u dato je sa: $u = -r\varepsilon_\varphi$,
pa je:

$$E\delta_{22}^{P\ell} = E(u)_{r=a} = \frac{a}{h}(1-\nu) = 11{,}200 \,.$$

Koeficijent $\delta_{12}^{P\ell} = \delta_{21}^{P\ell}$ jednak je nuli.

Ukupne vrednosti koeficijenata δ_{ik} :

$$\delta_{ik} = \delta_{ik}^{C\ell} + \delta_{ik}^{P\ell}$$

date su u sistemu uslovnih jednačina:

X_1	X_2	δ_{i0}	
2,493	0,341	-238,133	$10^3/E$
0,341	0,245	6,400	$10^3/E$

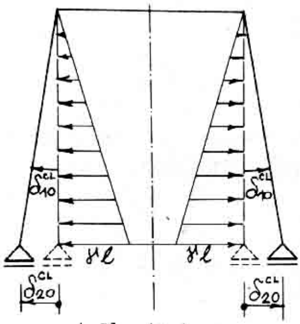
Slobodni članovi δ_{10}^{CL} i δ_{20}^{CL} za cilindričnu ljusku (sl. 41) dobijaju se iz rešenja prema membranskoj teoriji:

$$E\delta_{10}^{CL} = \frac{a^2\gamma}{h} = 0{,}800 \times 10^3$$

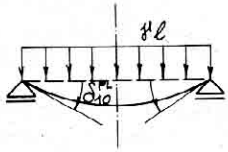
$$E\delta_{20}^{CL} = \frac{a^2\gamma\ell}{h} = 6{,}400 \times 10^3$$

Vrednosti δ_{10}^{PL} i δ_{20}^{PL} nalazimo iz rešenja za slobodno oslonjenu ploču opterećenu ravnomernim opterećenjem $Z = \gamma \cdot \ell$ (sl. 42)

$$E\delta_{10}^{PL} = -\frac{\gamma\ell a^3}{8K_{PL}(1+\nu)} = -238{,}93\dot{3} \times 10^3, \quad E\delta_{20}^{PL} = 0$$



(Sl. 41)



(Sl. 42)

Ukupne vrednosti δ_{10} i δ_{20} date su u sistemu jedačina. Rešenjem sistema nalazimo:

$$X_1 = 122{,}546 \ kNm/m'$$

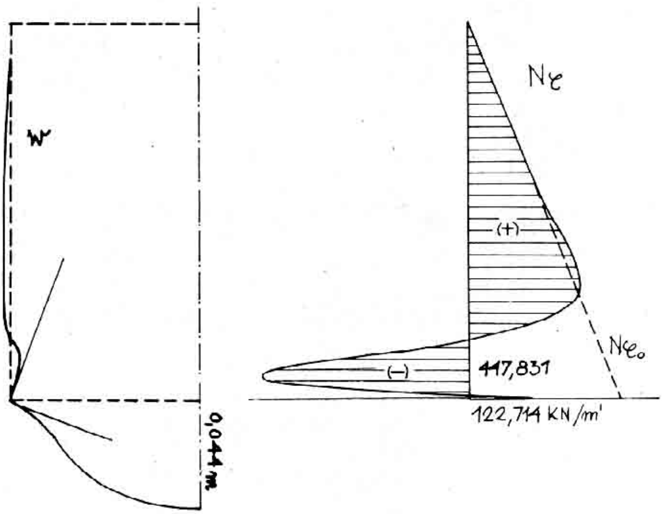
$$X_2 = -197{,}076 \ kN/m'$$

Pojedine uticaje (sile u presecima i pomeranja) nalazimo superpozicijom za svaki deo sistema:

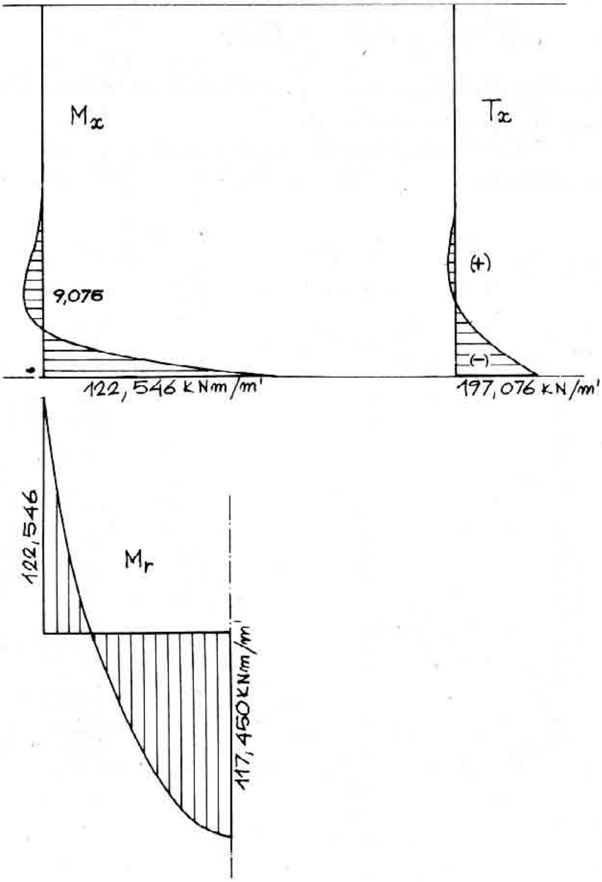
$$Z = Z_0 + X_1 Z_1 + X_2 Z_2$$

gde su Z_0, Z_1, Z_2 uticaji izazvani opterećenjem, momentom savijanja X_1 =1 i silama X_2 =1.

Dijagrami presečnih sila i pomeranja dati su na sledećim slikama.



(Sl. 43)



(Sl. 44)

3. Kratka cilindrična ljuska

Rešenje diferencijalne jednačine

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0 \tag{III.85}$$

prikazaćemo primenom hiperboličkih funkcija u obliku:

$$w = \bar{C}_1 ch\beta x \cos\beta x + \bar{C}_2 ch\beta x \sin\beta x + \\ + \bar{C}_3 sh\beta x \cos\beta x + \bar{C}_4 sh\beta x \sin\beta x \; . \tag{III.86}$$

Uvodjenjem funkcija:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= ch\alpha \cos\alpha \\ \varphi_2(\alpha) &= \frac{1}{2}\left(ch\alpha \sin\alpha + sh\alpha \cos\alpha\right) \\ \varphi_3(\alpha) &= \frac{1}{2} sh\alpha \sin\alpha \\ \varphi_4(\alpha) &= \frac{1}{4}\left(ch\alpha \sin\alpha - sh\alpha \cos\alpha\right) \end{aligned} \tag{III.87}$$

izraz za w može se napisati i na sledeći način:

$$w = C_1\varphi_1(\beta x) + C_2\varphi_2(\beta x) + C_3\varphi_3(\beta x) + C_4\varphi_4(\beta x) , \tag{III.88}$$

gde je $\alpha = \beta x$.

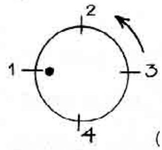
Tabela diferenciranja funkcija $\varphi_i(\alpha)$

m	φ'_m	φ''_m	φ'''_m	φ^{IV}_m
1	$-4\varphi_4$	$-4\varphi_3$	$-4\varphi_2$	$-4\varphi_1$
2	φ_1	$-4\varphi_4$	$-4\varphi_3$	$-4\varphi_2$
3	φ_2	φ_1	$-4\varphi_4$	$-4\varphi_3$
4	φ_3	φ_2	φ_1	$-4\varphi_4$

Za $\alpha = 0$ imamo:

$$\varphi_1(0) = 1 , \quad \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0 .$$

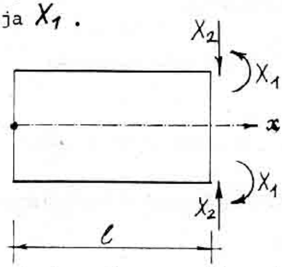
Funkcije $\varphi_m(\alpha)$, m =1,2,3,4 imaju tu osobinu da prilikom diferenciranja prelaze jedna u drugu kako je to prikazano u prethodnoj tabeli.



(Sl. 45)

Treba primetiti da se taj prelaz odvija u odnosu na m onako kako je to prikazano na krugu (Sl. 45) idući smerom suprotnim od kazaljke na satu. Pri prelasku sa m=1 na m=4 treba izvršiti množenje sa faktorom -4.

Posmatrajmo sada cilindričnu ljusku konačne dužine ℓ (Sl. 46) opterećenu spoljnom transverzalnom silom X_2 i podeljenim momentom savijanja X_1 .



(Sl. 46)

Za x =0, s obzirom da se radi o slobodnom kraju, moraju biti zadovoljeni sledeći granični uslovi.

$x=0$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=0 \ , \quad \frac{d^3w}{dx^3}=0 \ ;$$

Za $x=\ell$ dati su uslovi:

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{X_1}{K} \ , \quad \frac{d^3w}{dx^3}=-\frac{X_2}{K} \ ;$$

Iz prva dva uslova sledi: $C_3=C_4=0$,

pa imamo:

$$w=C_1\varphi_1(\beta x)+C_2\varphi_2(\beta x) \ .$$

Druga dva uslova daju jednačine:

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=\ell} = 4C_1\mathscr{C}_3(\beta\ell) - 4C_2\mathscr{C}_4(\beta\ell) = -\frac{X_1\beta}{K\beta^3},$$

$$\frac{1}{\beta^3}\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)_{x=\ell} = 4C_1\mathscr{C}_2(\beta\ell) - 4C_2\mathscr{C}_3(\beta\ell) = -\frac{X_2}{K\beta^3}.$$

Rešenjem nalazimo:

$$C_1 = \frac{1}{4K\beta^3}\frac{1}{\Delta}\left[\beta X_1\mathscr{C}_3(\beta\ell) - X_2\mathscr{C}_4(\beta\ell)\right],$$

$$C_2 = \frac{1}{4K\beta^3}\frac{1}{\Delta}\left[X_2\mathscr{C}_3(\beta\ell) - \beta X_1\mathscr{C}_2(\beta\ell)\right], \qquad \text{(III.89a,b,c)}$$

$$\Delta = \mathscr{C}_3^2(\beta\ell) - \mathscr{C}_2(\beta\ell)\mathscr{C}_4(\beta\ell) = \frac{1}{4}sh^2\alpha\sin^2\alpha - \frac{1}{8}ch^2\alpha\sin^2\alpha + \frac{1}{8}sh^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{8}\left(sh^2\alpha - \sin^2\alpha\right),$$

i konačno

$$w = \frac{1}{K\beta^2}\frac{2}{sh^2\alpha - \sin^2\alpha}\left\{X_1\beta\left[\mathscr{C}_3(\beta\ell)\mathscr{C}_1(\beta x) - \mathscr{C}_2(\beta\ell)\mathscr{C}_2(\beta x)\right] + X_2\left[\mathscr{C}_3(\beta\ell)\mathscr{C}_2(\beta x) - \mathscr{C}_4(\beta\ell)\mathscr{C}_1(\beta x)\right]\right\}. \qquad \text{(III.90)}$$

Uzmimo sad kao primer rezervoar dužine ℓ ispunjen tečnošću za koji pretpostavljamo da je $\beta\ell \leq 5$, tako da se mora analizirati kao kratka ljuska.

Iz graničnih uslova $x = 0$, $T_x = M_x = 0$ imamo kao i ranije $C_3 = C_4 = 0$.

Integracione konstante u rešenju

$$w = C_1 \mathscr{C}_1(\beta x) + C_2 \mathscr{C}_2(\beta x) - \frac{\gamma a^2}{Eh} x \;, \qquad \text{(III.91)}$$

nalazimo iz uslova

$$x = \ell \; : \qquad w = \frac{dw}{dx} = 0 \;,$$

odnosno iz jednačina:

$$C_1 \mathscr{C}_1(\beta \ell) + C_2 \mathscr{C}_2(\beta \ell) = \frac{\gamma a^2}{Eh} \ell \;,$$

$$-4 C_1 \mathscr{C}_4(\beta \ell) + C_2 \mathscr{C}_1(\beta \ell) = \frac{\gamma a^2}{Eh} \frac{1}{\beta} \;. \qquad \text{(III.92a,b)}$$

Rešenjem nalazimo:

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \frac{\gamma a^2}{Eh} \ell \left[\mathscr{C}_1(\beta \ell) - \frac{1}{\beta \ell} \mathscr{C}_2(\beta \ell) \right] ,$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \frac{\gamma a^2}{Eh} \ell \left[\frac{1}{\beta \ell} \mathscr{C}_1(\beta \ell) \right] , \qquad \text{(III93a,b)}$$

gde je:

$$\Delta = \mathscr{C}_1^2(\beta \ell) + 4 \mathscr{C}_4(\beta \ell) \mathscr{C}_2(\beta \ell) \,.$$

Izraz za ugib napisaćemo u obliku

$$w = -\frac{\gamma a^2}{Eh} \ell \left[\frac{x}{\ell} - \bar{C}_1 \mathscr{C}_1(\beta x) - \bar{C}_2 \mathscr{C}_2(\beta x) \right] , \qquad \text{(III.94)}$$

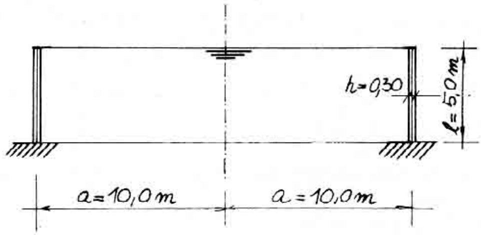
gde je:

$$\bar{C}_1 = \frac{Eh}{\gamma a^2 \ell} C_1 \qquad \bar{C}_2 = \frac{Eh}{\gamma a^2} C_2 \;.$$

Za M_x dobijamo izraz:

$$M_x = -\frac{1}{3}\frac{\gamma a^2 h^2 \beta^2 \ell}{(1-\nu^2)}\left[\bar{C}_1 \mathcal{C}_3(\beta x) + \bar{C}_2 \mathcal{C}_4(\beta x)\right] \quad \text{(III.95)}$$

Za ljusku prikazanu na sledećoj slici nalazimo, uzimajući $\nu = 0$ i $\gamma = 10$ kN/m^3 i $E = 2,1 \times 10^7$ kN/m^2:



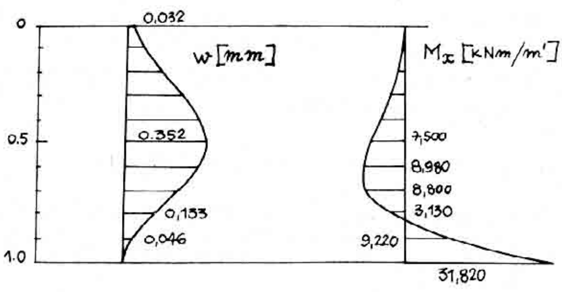
(Sl. 47)

$$\beta = 0,7598 \times 10^{-2} \qquad \beta\ell = 3,779 < 5$$

$$C_1 = -0,05417\frac{\gamma a^2}{Eh}\ell \qquad C_2 = -0,00267\frac{\gamma a^2}{Eh}\ell$$

$$M_x = \frac{\gamma a^2 h^2}{3}\beta^2 \ell\left[0,05417\,\mathcal{C}_3(\beta x) + 0,00267\,\mathcal{C}_4(\beta x)\right]$$

Dijagrami w i M_x prikazani su na (Sl. 48).



(Sl. 48)

4. Cilindrična ljuska promenljive debljine

Numeričko rešenje primenom metode integralnih jednačina

Ovde će biti data primena autorovog metoda integralnih jednačina* na problem kružne cilindrične ljuske čija je debljina promenljiva duž izvodnice.

Posmatrajmo cilindrični rezervoar uklješten u temelje i sa gornjim slobodnim krajem.

Ako uvedemo oznaku

$$p(x) = Z(x) - \frac{Eh}{a^2} w \,, \tag{III.96}$$

jednačinu (III . 66) možemo prepisati u obliku

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(K \frac{d^2 w}{dx^2}\right) = p(x) \,. \tag{III.97}$$

Ovu jednačinu možemo shvatiti kao diferencijalnu jednačinu za ugib grednog nosača krutosti $EJ = K$, a funkciju $p(x)$ kao opterećenje toga nosača. Vrednosti funkcije w se tada mogu izraziti integralnom jednačinom

$$w(x) = \int_0^\ell b(x,\xi)\, p(\xi)\, d\xi \,, \tag{III.98}$$

gde je $b(x,\xi)$ Green-ova funkcija jednačine (III .97) za granične uslove

$$x = 0 \qquad M_x = 0 \;, \quad T_x = 0 \;,$$

$$x = \ell \qquad w = 0 \;, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \;,$$

Za neke druge granične uslove treba u svakom pojedinačnom slučaju izabrati odgovarajuću Green-ovu funkciju.

U ovom slučaju dijagram ove funkcije nije ništa drugo do uticajna linija za ugib konzole promenljive krutosti $EJ = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ u preseku x .

Unoseći izraz (III. 98) u jednačinu (III. 96) do-

---

*) N.Hajdin: Postupak za numeričko rešavanje graničnih zadataka i njegova primena na neke probleme teorije elastičnosti. Zbornik Gradjevinskog fakulteta u Beogradu, 4.,1958.

bijamo integralnu jednačinu

$$p(x)+\frac{Eh}{a^2}\int_0^\ell b(x,\xi)p(\xi)d\xi = Z(x)\ . \qquad \text{(III.99)}$$

Vrednost odredjenog integrala u jednačini (III . 99) može se primenom nekog od načina numeričke integracije izraziti putem vrednosti podintegralne veličine u odredjenom nizu tačaka $\xi_\mu (\mu=1,2\ldots\bar{M})$ u obliku:

$$\sum_{\mu=1}^{\bar{M}} b(x,\xi_\mu)p(\xi_\mu)\alpha_\mu\ ,$$

gde su α_μ konstante koje zavise od postupaka numeričke integracije, a čitava jednačina napisati

$$p(x)+\frac{Eh}{a^2}\sum_{\mu=1}^{\bar{M}} b(x_0,\xi_\mu)p(\xi_\mu)\alpha_\mu = Z(x)\ . \qquad \text{(III.100)}$$

Integralnu jednačinu (III . 99) odn. jednačinu (III .100) možemo zameniti sistemom linearnih algebarskih jednačina. Ako u intervalu $(0,\ell)$ izaberemo niz tačaka $\{x_m\}$ $m=1,2\ldots M$ koje mogu ali ne moraju da se poklapaju sa tačkama $\{\xi_\mu\}$, i stavimo $x=x_m$ $m=1,2\ldots M$ dobićemo:

$$p(x_m)+\frac{Eh(x_m)}{a^2}\sum_{\mu=1}^{\bar{M}} b(x_m,\xi_\mu)p(\xi_\mu)\alpha_\mu = Z(x_m),$$

$$m=1,2\ldots M. \qquad \text{(III.101)}$$

Ako, jednostavnosti radi, stavimo

$$p(x_m)=p_m\ ,\quad p(\xi_\mu)=\bar{p}_\mu\ ,\quad Z(x_m)=Z_m\ ,$$

$$b(x_m,\xi_\mu)=b_{m\mu}\ ,\quad h(x_m)=h_m\ ,$$

sistem jednačina (III .101) možemo napisati:

$$p_m+\frac{Eh_m}{a^2}\sum_{\mu=1}^{\bar{M}} b_{m\mu}p_\mu\alpha_\mu = Z_m\ ,\quad m=1,2\ldots M \qquad \text{(III.102)}$$

Putem pravougaone matrice $\boldsymbol{b}=[b_{ij}]$ i dijagonalnih matrica $\alpha=[\nu_i]$ i $\boldsymbol{F}=\left[\frac{Eh_i}{a^2}\right]$ $i=1,2\ldots M$ sistem jednačina (III.102) može se izraziti:

$$p+\boldsymbol{F}\boldsymbol{b}\alpha\bar{p}=\boldsymbol{Z}\ , \qquad \text{(III.103)}$$

gde su p i Z vektori sa koordinatama p_i i Z_i (i =1,2,..M) a $\bar{p}$ vektor sa koordinatama $\bar{p}_i$

U sistemu jednačina (III .101) nepoznate su vrednosti p_m i $\bar{p}_\mu$ čiji je broj jednak broju jednačina samo u slučaju kada je $M=\bar{M}$ a tačke x_m se poklapaju sa tačkama ξ_μ . U svakom drugom slučaju broj nepoznatih veći je od broja jednačina sistema.

Vrednosti

$$\bar{p}_1, \bar{p}_2 \dots \bar{p}_\mu \dots p_{\bar{M}}$$

u datim jednačinama, medjutim, možemo linearno izraziti pomoću vrednosti

$$p_1, p_2 \cdots p_m \cdots p_M$$

U opštem slučaju možemo napisati

$$\bar{p}_\mu = \sum_{k=1}^{M} L_{\mu k} p_k \,, \qquad \mu = 1, 2 \dots \bar{M}$$

gde su $L_{\mu k}$ koeficijenti koji zavise od načina interpolacije, pa će broj napoznatih u jednačinama (III .101) biti jednak broju jednačina.

Ako uvedemo matricu

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \dots & L_{1M} \\ L_{21} & L_{22} \dots & L_{2M} \\ & & \\ L_{\bar{M}1} & L_{\bar{M}2} \dots & L_{\bar{M}M} \end{bmatrix},$$

biće

$$\bar{p} = Lp \,,$$

pa umesto jednačina (III.103) dobijamo

$$(I+FB)p = Z \qquad \text{(III.104)}$$

gde je I jednačina matrica, a $B = b\alpha L$. Iz jednačine (III .104) odredjuje se vektor p .

Iz nadjenih vrednosti p_i na osnovu jednačine (III.104) dobićemo:

$$w = F^{-1}(z - p) \,. \qquad \text{(III.105)}$$

Momente savijanja M_x prema izrazu (III . 64) dobićemo diferenciranjem jednačine (III. 98) po parametru x

$$M_x = -K\frac{d^2w}{dx^2} = -\int_0^l Kb''(x,\xi)p(\xi)d\xi ,$$

gde je $-Kb''(x,\xi)$ uticajna funkcija za momenat savijanja odgovarajućeg grednog nosača. Primenom numeričke integracije, slično kao i u slučaju jednačine (III. 99), vrednosti momenata savijanja izrazićemo u matričnom obliku

$$M_x = -(KB'')p , \qquad \text{(III.106)}$$

gde je

$$(KB'') = (Kb'')\alpha L \ , \quad (Kb'') = \left[(Kb'')_{ij}\right]$$

$$i = 1,2 \ldots M \ , \qquad j = 1,2 \ldots \bar{M}$$

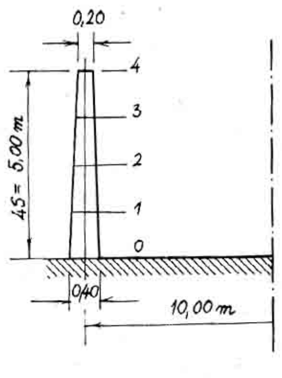
Isto tako shodno jednačini (III.71b) dobijamo i izraze za transverzalne sile

$$T_x = -(Kw'')' = -\int (Kb'')'(x,\xi)\, p(\xi)d\xi ,$$

odnosno primenom numeričke integracije

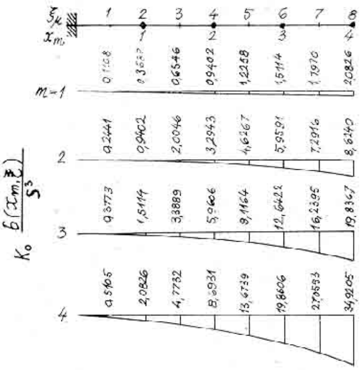
$$T_x = -(KB'')'p . \qquad \text{(III.107)}$$

Uzmimo kao primer cilindrični rezervoar visine l =5,0 m, prečnika a =10,0 m, sa jednim uklještenjem a drugim slobodnim krajem. Debljina rezervoara neka je linearno promenljiva (Sl. 49)



$$h = 0{,}40\left(1 - \frac{x}{2l}\right)$$

Visinu rezervoara podelićemo na četiri jednaka dela dužine $S = 1,25$ m i odrediti uticajne linije za ugib konzole (s obzirom da je $w(0) = w'(0) = 0$ i $Kw''(l) = (Kw'')'(l) = 0$) u tačkama x_m , m=1,2,3 i 4. Ordinate uticajnih linija sračunaćemo na način koji je u Statici konstrukcija uobičajen tj. pomoću tzv. "elastičnih težina". Na (sl. 50) date su ordinate uticajnih linija, odnosno elementi matrice b . Tačke ξ_μ u kojima su sračunate ordinate uticajnih linija usvojene su na razmacima $S' = \frac{S}{2}$.



(Sl. 50)

$$b = \frac{S^3}{K_0} \begin{bmatrix} 0,1108 & 0,3689 & 0.6546 & 0,9402 & 1,2258 & 1,5114 & 1,7970 & 2,0826 \\ 0,2441 & 0,9402 & 2,0046 & 3,2943 & 4,6267 & 5,9591 & 7,2916 & 8,6240 \\ 0,3773 & 1,5114 & 3,3889 & 5,9606 & 9,1164 & 12,6422 & 16,2395 & 19,8367 \\ 0,5105 & 2,0826 & 4,7732 & 8,6331 & 13,6739 & 19,8606 & 27,0553 & 34,9205 \end{bmatrix}$$

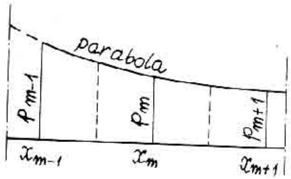
Numeričku integraciju izvršićemo primenom Simpson-ovog pravila. U tom slučaju matrica α ima ovaj oblik:

$$\alpha = \frac{S}{6} \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 4 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ordinate nepoznate funkcije $p(x)$ u tačkama ξ_μ, $\mu=1,2,3\ldots 8$ sračunaćemo iz ordinata funkcije $p(x)$ u tačkama x_m $0,1,2,\ldots 4$ putem interpolacije.

Za izračunavanje ordinata $\bar{p}_{2\mu-1}$ smatraćemo da je funkcija p u intervalu $x_{m-1}<x<x_{m+1}$ data kvadratnom parabolom odredjenom iz ordinata p_{m-1}, p_m i p_{m+1}. U tom slučaju dobijamo:

$$\bar{p}_{2\mu-1}=\frac{1}{8}\left(3p_{m-1}+6p_m-p_{m+1}\right).$$



Vrednost $\bar{p}_1$ neka je data kao ordinata parabole odredjene iz ordinata p_1, p_2 i p_3:

$$\bar{p}_1=\frac{1}{8}\left(15p_1-10p_2+3p_3\right),$$

a $\bar{p}_7$ izrazom:

$$\bar{p}_7=\frac{1}{8}\left(-p_2+6p_3+3p_4\right).$$

Prema tome matrica L je sledeća:

$$L=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 15 & -10 & 3 & \\ 8 & & & \\ 3 & 6 & -1 & \\ & 8 & & \\ & 3 & 6 & -1 \\ & & 8 & \\ & -1 & 6 & 3 \\ & & & 8 \end{bmatrix},$$

Izvršimo li potrebna množenja αL dobijamo:

$$\alpha L = \frac{S}{12}\begin{bmatrix} 15 & -10 & 3 & \\ 4 & & & \\ 3 & 6 & -1 & \\ & 4 & & \\ & 3 & 6 & -1 \\ & & 4 & \\ & -1 & 6 & 3 \\ & & & 2 \end{bmatrix},$$

zatim množenjem i matricu $B = b\alpha L$:

$$B = \frac{S^4}{12K_0}\begin{bmatrix} 5,1014 & 8,4608 & 23,8602 & 8,3304 \\ 13,4361 & 29,3523 & 94,0739 & 34,4961 \\ 21,8718 & 51,5125 & 200,4472 & 79,2755 \\ 30,3075 & 72,0330 & 320,5759 & 137,3320 \end{bmatrix}$$

Dijagonalna matrica F sa elementima $f_i = \frac{Eh_i}{a^2}$ je sledeća:

$$F = \frac{Eh_0}{a^2}\begin{bmatrix} 0,875 & & & \\ & 0,750 & & \\ & & 0,625 & \\ & & & 0,500 \end{bmatrix}, \quad h_0 = 0,40 \text{ m}$$

Izvršenjem operacija naznačenih u jednačini (III.104) dobijamo konačno sistem jednačina iz koga odredjujemo koordinate vektora p.

$$\begin{bmatrix} 1,6811 & 1,1296 & 3,1856 & 1,1122 \\ 1,5376 & 4,3591 & 10,7659 & 3,9478 \\ 2,0859 & 4,9126 & 20,1162 & 7,5603 \\ 2,3123 & 5,4957 & 24,4580 & 11,4776 \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} 37,5 \\ 25,0 \\ 12,5 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Rešenjem nalazimo:

$$p = \begin{bmatrix} 24,96 \\ 4.32 \\ -1,78 \\ -3,30 \end{bmatrix},$$

a iz jednačina (III.105) i (III.65) neposredno i vrednosti ugiba w i normalne sile N_φ

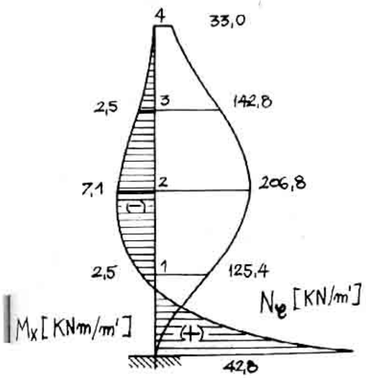
$$w=\frac{a^2}{Eh_0}\begin{bmatrix}14,33\\27,57\\22,85\\6,60\end{bmatrix}\quad , \qquad N_\varphi=\frac{a h_i}{h_0}\begin{bmatrix}14,33\\27,57\\22,85\\6,60\end{bmatrix}$$

Ako sada, na isti način kao što smo formirali matricu formiramo i matricu (KB'') na osnovu uticajnih linija za momenat savijanja u presecima x_m , m=0, 1, 2, 3 i 4.

$$(KB'')=\frac{S^2}{12}\begin{bmatrix}16,0 & 16,0 & 48,0 & 16,0\\ 1,5 & 9,0 & 31,5 & 12,0\\ 0 & 0 & 16,0 & 8,0\\ 0 & -0,5 & 3,0 & 3,5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

i izmnožimo sa vektorom p , dobićemo, na osnovu jednačine (III. .106) vektor M_x , odnosno vrednosti momenata savijanja M_x u tačkama $(x_0, x_1, x_2, x_3$ i $x_4)$

Na Sl. 51 dat je dijagram momenata savijanja M_x i normalnih sila N_φ. U tački x_0 i x_2 uporedjeni su dobijeni rezultati sa rezultatima dobijenih putem metode konačnih razlika, kao i sa tačnim rešenjem koje je u ovom specijalnom slučaju linearne promene debljine moguće dobiti analitičkim putem.



Presek	0	2
Tačno rešenje KNm/m	41.6	7.2
Prema ovom postupku KNm/m	42.9	7.1
Greška %	3.1	1.4
Dif.metodom pri istoj podeli KNm/m	31.0	6.1
Greška %	25.4	15.3

TEORIJA SAVIJANJA ROTACIONE LJUSKE PRI ROTACIONO SIMETRIČNOM OPTEREĆENJU

Posmatraćemo najjednostavniji način opterećenja ljuske

$$X = 0 \quad , \quad Y = Y(\varphi) \quad , \quad Z = Z(\varphi) \; ,$$

Pod pretpostavkom da i reaktivne sile imaju rotaciono simetričan karakter, presečne sile $N_{\varphi\vartheta}$, $M_{\varphi\vartheta}$ i T_{ϑ} biće jednake nuli, a ostale presečne sile samo zavisne od koordinate φ.

Za ovu vrstu naprezanja, kao što je to bio slučaj i kod bezmomentne teorije svi meridijani imaju ista pomeranja v i w , i posle deformacije ostaju u svojoj ravni jer je komponenta pomeranja u jednaka nuli.

1. Uslovi ravnoteže

Na elemenat ljuske, prikazan na (sl. 52a) deluju presečne sile N_φ, N_ϑ, M_φ, M_ϑ i T_φ kao i komponente opterećenja Y i Z .

Od ukupno šest uslova ravnoteže sila prikazanih na (sl. 52a) samo tri uslova nisu identički jednaka nuli.

To su uslovi ravnoteže projekcija svih sila na pravac tangente meridijalne krive i na pravac normale na srednju površ, kao i suma projekcija svih momenata na pravac tangente na paralelan krug.

U uslov ravnoteže projekcija svih sila na pravac tangente na meridijalnu krivu kroz težište elementa ulazi priraštaj sile $N_\varphi R_0 d\vartheta$:

$$\frac{d(N_\varphi R_0)}{d\varphi} d\varphi R_0 d\vartheta$$

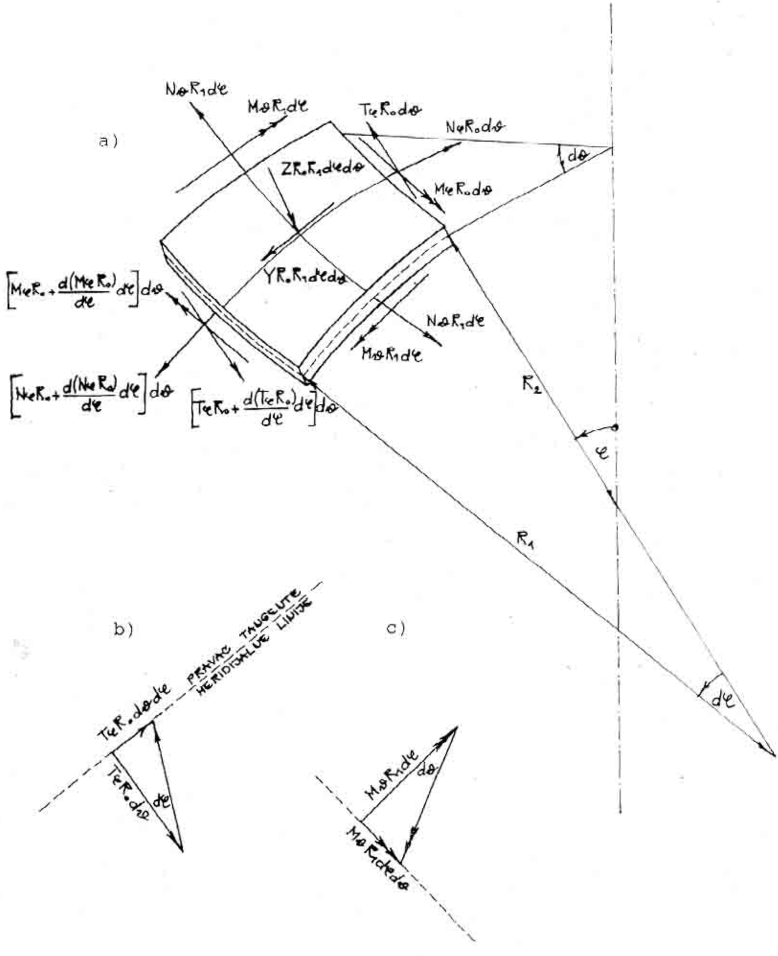
Isto tako će, kao i u slučaju bezmomentne teorije postojati projekcija normalne sile $N_\vartheta a\, d\varphi$:

$$N_\vartheta \cos\varphi R_1 d\varphi d\vartheta$$

I na kraju, transverzalne sile na stranama φ i $\varphi + d\varphi$ nisu medjusobno paralelne i imaju projekciju na pravac tangente na meridijalnu krivu (sl. 52b).

Sabirajući ove projekcije i komponentu opterećenja u pravcu tangente na meridijalnu krivu dobijamo posle deljenja sa $d\varphi d\vartheta$

$$\frac{d(N_\varphi R_0)}{d\varphi} - N_\vartheta R_1 \cos\varphi - T_\varphi R_0 + Y R_0 R_1 = 0 \qquad \text{(III.108)}$$



(Sl. 52)

Projekcije membranskih sila $N_\varphi R_0 d\vartheta$ i $N_\vartheta R_1 d\varphi$ na pravac normale iste su kao i u slučaju membranske teorije tj.

$$N_\varphi R_0 d\varphi d\vartheta \;, \quad N_\vartheta R_1 \sin\varphi \, d\varphi d\vartheta$$

Dodajući ovim članovima priraštaj transverzalne sile i opterećenje dobijamo posle deljenja sa $d\varphi d\vartheta$

$$N_\varphi R_0 + N_\vartheta R_1 \sin\varphi + \frac{d(T_\varphi R_0)}{d\varphi} + Z R_0 R_1 = 0 \qquad \text{(III.109)}$$

Treći uslov ravnoteže daje jednačinu (sl. 52c)

$$\frac{d}{d\varphi}(M_\varphi R_0) - M_\vartheta R_1 \cos\varphi - T_\varphi R_0 R_1 = 0 \qquad \text{(III.110)}$$

2. Deformacija ljuske

Deformacija srednje površi opisuje se na isti način kao i u slučaju membranske (bezmomentne) teorije.

Veze izmedju pomeranja i komponenata deformacija ε_φ i ε_ϑ date su izrazima:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_1}\left(\frac{dv}{d\varphi} - w\right)$$
$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{R_2}\left(v \, ctg\varphi - w\right) \qquad \text{(III.111a,b)}$$

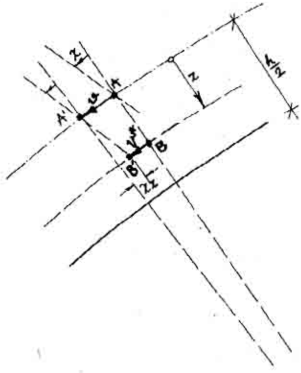
Promena ugla nagiba tangente na meridijalnu krivu χ data je izrazom

$$\chi = \frac{1}{R_1}\left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right) \qquad \text{(III.112)}$$

Komponente deformacija ε_φ^* i ε_ϑ^* u tačkama izvan srednje površi odredjuju se primenom Kirchhoff-Love-ove pretpostavke o upravnosti normale, koju smo definisali na početku izlaganja o ljuskama.

Shodno gornjoj pretpostavci komponenta pomeranja tačke B koja se nalazi na normali povučenoj u tački A srednje površi biće posle deformacije (sl. 53), zanemarujući veličine $\frac{Z}{R}$ prema jedinici:

$$v = v - \chi Z \qquad \text{(III.113)}$$



(Sl. 53)

Komponenta pomeranja w^* tačke izvan srednje površi je prema pomenutim pretpostavkama jednaka pomeranju w odgovarajuće tačke srednje površi.

Na osnovu jednačine (III.111a,b) i unoseći odgovarajući izraz (III.113) za v^*, dobijamo izraze za komponente deformacija ε_φ^* i ε_ϑ^*.

$$\varepsilon_\varphi^* = \frac{1}{R_1}\left(\frac{dv^*}{d\varphi} - w^*\right), \qquad \text{(III.114a,b)}$$

$$\varepsilon_\vartheta^* = \frac{1}{R_2}\left(v^* ctg\,\varphi - w^*\right),$$

odnosno, izraženo preko komponenti pomeranja tačaka srednje površi

$$\varepsilon_\varphi^* = \frac{1}{R_1}\left(\frac{dv}{d\varphi} - w - \frac{d\chi}{d\varphi} z\right),$$

$$\text{(III.115a,b)}$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{R_2}\left(v ctg\,\varphi - w - \chi z ctg\,\varphi\right).$$

Komponente deformacija ε_φ^* i ε_ϑ^* možemo očigledno izraziti i preko komponenti deformacija srednje površi i promene nagiba tangente na meridijalnu liniju:

$$\varepsilon_\varphi^* = \left(\varepsilon_\varphi - \frac{d\chi}{R_1 d\varphi} z\right)$$

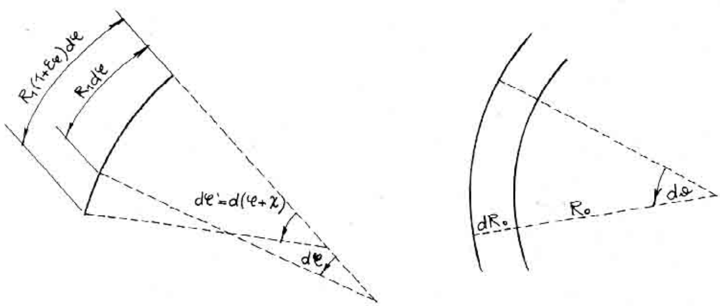
$$\varepsilon_\vartheta = \left(\varepsilon_\vartheta - \frac{\chi z}{R_2} ctg\,\varphi\right) \qquad \text{(III.116a,b)}$$

Slično kao i kod ploča u izvesnim razmatranjima teorije ljuski uvode se deformacijske veličine kao što su promene polupręčnika krivine R_1 i $R_2 = R_0/\sin\varphi$ ili promene krivine koje se definišu kao razlika recipročnih vrednosti odgovarajućih polupręčnika posle i pre deformacije.

Ako sa R_1' i R_2' obeležimo polupręčnike krivine posle deformacije onda se ove vrednosti s obzirom na karakter deformacije mogu izraziti na sledeći način (sl. 54)

$$R_1' = \frac{R_1(1+\varepsilon_\varphi)d\varphi}{d(\varphi+\chi)}$$

$$R_2' = \frac{R_0 + dR_0}{\sin(\varphi+\chi)}$$



(Sl. 54)

Promene krivine date su izrazima

$$\varkappa_\varphi = \frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_1} = \frac{d(\varphi+\chi)}{R_1 d\varphi(1+\varepsilon_\varphi)} - \frac{1}{R_1}$$

$$\varkappa_\vartheta = \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2} = \frac{\sin(\varphi+\chi)}{R_0 + dR_0} - \frac{1}{R_2} \qquad \text{(III.117a,b)}$$

Zanemarujući veličine ε_φ i $\frac{dR_0}{R_0}$ prema jedinisi i imajući na umu da je za male uglove χ:

$$\sin\chi \simeq \chi \qquad \cos\varphi \simeq 1$$

dobijamo:

$$\varkappa_\varphi = \frac{d(\varphi+\chi)}{R_1 d\varphi} - \frac{1}{R_1} = \frac{d\chi}{R_1 d\varphi} \qquad \text{(III.118a,b)}$$

$$\varkappa_\vartheta = \frac{\sin\varphi + \chi\cos\varphi}{R_2 \sin\varphi} - \frac{1}{R_2} = \frac{\chi}{R_2}\operatorname{ctg}\varphi \; .$$

Izraze (III.114ab) možemo sada napisati i u obliku

$$\varepsilon_\varphi^* = \varepsilon_\varphi - \varkappa_\varphi z \qquad \text{(III.119a,b)}$$

$$\varepsilon_\vartheta^* = \varepsilon_\vartheta - \varkappa_\vartheta z$$

3. Veze izmedju presečnih sila i deformacije

Primenom Hooke-ovog zakona dobijamo:

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi^* + \nu\varepsilon_\vartheta^*\right)$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\vartheta + \nu\varepsilon_\varphi^*\right) \qquad \text{(III.120a,b)}$$

Na osnovu ovih izraza uz korišćenje jednačina (III.113a,b) i (III.119ab) dobijamo za presečne sile N_φ N_ϑ

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_\vartheta\right)$$

$$N_\vartheta = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\vartheta + \nu\varepsilon_\varphi\right) \qquad \text{(III.121a,b)}$$

Unošenjem izraza (III.111a,b i III.112) za ε_φ, ε_ϑ i χ putem pomeranja nalazimo

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{R_1}\left(\frac{dv}{d\varphi} - w\right) + \frac{\nu}{R_2}\left(v\operatorname{ctg}\varphi - w\right)\right] \qquad \text{(III.122a)}$$

$$N_{\vartheta}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{R_2}\left(v\,ctg\varphi-w\right)+\frac{\nu}{R_1}\left(\frac{dv}{d\varphi}-w\right)\right] \tag{III.122b}$$

Momente savijanja M_{φ} i M_{ϑ} možemo sada na osnovu (III119a,b)i(III120a,b) izraziti u obliku

$$\begin{aligned} M_{\varphi}&=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\varphi}z\,dz=-K\left(\varkappa_{\varphi}+\nu\varkappa_{\vartheta}\right)\\ M_{\vartheta}&=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\vartheta}z\,dz=-K\left(\varkappa_{\vartheta}+\nu\varkappa_{\varphi}\right), \end{aligned} \tag{III.123a,b}$$

gde je kao i ranije

$$K=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Preko promene nagiba tangente na meridijalnu liniju χ za momente savijanja nalazimo

$$\begin{aligned} M_{\varphi}&=-K\left(\frac{d\chi}{R_1 d\varphi}+\nu\frac{\chi}{R_2}ctg\varphi\right)\\ M_{\vartheta}&=-K\left(\frac{\chi}{R_2}ctg\varphi+\frac{\nu}{R_1}\frac{d\chi}{d\varphi}\right) \end{aligned} \tag{III.124a,b}$$

Sistem jednačina koji smo postavili sastoji se od tri jednačine ravnoteže, četiri veze izmedju presečnih sila i deformacija, tri veze izmedju pomeranja i deformacija, tj. ukupno deset jednačina, i iz njih se mogu odrediti sve nepoznate veličine N_{φ}, N_{ϑ}, M_{φ}, M_{ϑ}, T_{φ}, ε_{φ}, ε_{ϑ}, χ, v i w.

Za posebne oblike srednje površi rotacione ljuske traže se mahom približna rešenja ovog složenog zadatka analitičkim ili numeričkim postupcima.

Mi ćemo se u daljem ograničiti na svernu ljusku i posmatrati poseban slučaj opterećenja: ljusku opterećenu rotaciono simetričnim opterećenjem po konturi.

Ovaj zadatak ima svoj praktični smisao, jer se kombinacijom ovog rešenja i rešenja prema membranskoj teoriji za rotacioni simetrično opterećenje Y i Z dobija rešenje za sfernu kupolu po teoriji savijanja za zadate granične uslove.

4. Sferna kupola opterećena silama po konturi

Kao što smo napomenuli pretpostavimo da je

$$X = Y = Z = 0$$

i dalje, pošto se radi o sfernoj kupoli

$$R_1 = R_2 = a \qquad R_0 = a\sin\varphi$$

gde je a poluprečnik sfere.

Jednačine ravnoteže (III.108,109,110) u ovom specijalnom slučaju glase:

$$\frac{d(N_\varphi \sin\varphi)}{d\varphi} - T_\varphi \sin\varphi - N_\vartheta \cos\varphi = 0$$

$$(N_\varphi + N_\vartheta)\sin\varphi + \frac{d(T\sin\varphi)}{d\varphi} = 0 \qquad \text{(III.125a,b,c)}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(M_\varphi \sin\varphi\right) - M_\vartheta \cos\varphi - Ta\sin\varphi = 0$$

Cilj daljeg rada je da se pomenuti sistem jednačina eliminacijom nepoznatih svede na što manji broj diferencijalnih jednačina kojima se definiše problem.

Struktura ovih jednačina je takva da put eliminacije koji na kraju dovodi do svega dve diferencijalne jednačine sa dvema nepoznatim funkcijama χ i $T_\varphi = T$ je najprikladniji za analitičko rešenje problema.

Rešenje takvog zadatka u kome se javljaju i deformacije i sile kao nepoznate, obično se naziva mešovitom metodom za razliku od metode sile ili metode deformacije.

Prvu od dve diferencijalne jednačine dobićemo relativno jednostavno. Unesimo izraze (III.124a,b) za momente savijanja u treći uslov ravnoteže (III.125c).

Tada dobijamo:

$$-\frac{K}{a}\left[\frac{d^2\chi}{d\varphi^2} - \nu(1+\mathrm{ctg}^2\varphi)\chi + \nu\,\mathrm{ctg}\varphi\frac{d\chi}{d\varphi}\right]\sin\varphi$$

$$-\frac{K}{a}\left[\frac{d\chi}{d\varphi}+\nu\chi\,ctg\varphi-\chi\,ctg\varphi-\nu\frac{d\chi}{d\varphi}\right]\cos\varphi$$

$$-Ta\sin\varphi=0\ ,$$

ili posle sredjivanja

$$\frac{d^2\chi}{d\varphi^2}+\frac{d\chi}{d\varphi}ctg\varphi-\chi\left(\nu+ctg^2\varphi\right)+\frac{a^2}{K}T=0\ . \qquad \text{(III.126)}$$

Za postavljanje druge jednačine put eliminacije je nešto duži. Iskoristimo prva dva uslova ravnoteže na taj način što ćemo prvu jednačinu pomnožiti sa $\sin\varphi$ a drugu sa $\cos\varphi$ i sabrati. Tada posle skraćivanja dobijamo:

$$\frac{d(N_\varphi\sin\varphi)}{d\varphi}\sin\varphi+N_\varphi\cos\varphi\sin\varphi+\frac{d(T\sin\varphi)}{d\varphi}\cos\varphi$$

$$-T\sin^2\varphi=0$$

odnosno

$$\frac{d(N_\varphi\sin^2\varphi)}{d\varphi}+d(T\sin\varphi\cos\varphi)=0\ ,$$

iz čega integracijom dobijamo:

$$N_\varphi=-T\,ctg\varphi\ . \qquad \text{(III.127)}$$

Iz drugog uslova ravnoteže dobijamo sada:

$$N_\vartheta\sin\varphi-T\cos\varphi+\frac{dT}{d\varphi}\sin\varphi+T\cos\varphi=0$$

odnosno

$$N_\vartheta=-\frac{dT}{d\varphi}\ . \qquad \text{(III.128)}$$

Veličine ε_φ , ε_ϑ i χ nisu medjusobno nezavisne vrednosti, jer se izražavaju preko dve komponente pomeranja v i w.

Veza izmedju ovih veličina predstavlja u izvesnom smislu uslov o poklapanju deformacija, i do njega ćemo doći na sledeći način. Na osnovu jednačina (III.111ab) možemo napisati:

$$(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\vartheta)ctg\varphi = \frac{1}{a} ctg\varphi\left(\frac{dv}{d\varphi} - v\,ctg\varphi\right)$$

$$\frac{d\varepsilon_\vartheta}{d\varphi} = \frac{1}{a}\left(\frac{dv}{d\varphi}ctg\varphi - \frac{v}{\sin^2\varphi} - \frac{dw}{d\varphi}\right),$$

Oduzimanjem druge jednačine od prve nalazimo:

$$(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\vartheta)ctg\varphi - \frac{d\varepsilon_\vartheta}{d\varphi} = \frac{1}{a}\left(-v\,ctg^2\varphi + \frac{v}{\sin^2\varphi} - \frac{dw}{d\varphi}\right) = \frac{1}{a}\left(v + \frac{dw}{d\varphi}\right),$$

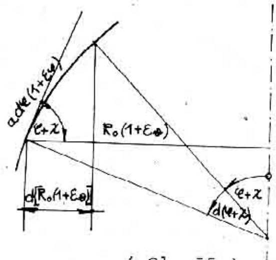
odnosno

$$(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\vartheta)ctg\varphi - \frac{d\varepsilon_\vartheta}{d\varphi} = \chi . \qquad \text{(III.129)}$$

Da prethodna jednačina predstavlja uslov kompatibilnosti može se pokazati iz posmatranja deformisanog oblika sferne kupole (sl. 55). Naime dužina elementa $a\,d\varphi$ meridijana koja je posle deformacije jednaka $a\,d\varphi(1+\varepsilon_\varphi)$ mora biti u skladu sa novom dužinom poluprečnika R_o paralelnog kruga.

Iz (sl. 55) proizilazi:

$$a\,d\varphi(1+\varepsilon_\varphi)\cos(\varphi+\chi) = d\left[R_o(1+\varepsilon_\vartheta)\right]$$



(Sl. 55)

i dalje imajući na umu da je

$$\cos\chi \simeq 1 \qquad \sin\chi \simeq \chi$$

dobijamo:

$$a(1+\varepsilon_\varphi)(\cos\varphi - \chi\sin\varphi) = \frac{dR_o}{d\varphi}(1+\varepsilon_\vartheta) + R_o\frac{d\varepsilon_\vartheta}{d\varphi} .$$

Kako je $R_0 = a\sin\varphi$ dobijamo konačno jednačinu (III.129)

Komponente deformacije ε_φ i ε_ϑ izrazimo preko Hooke-ovog zakona:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{Eh}\left(N_\varphi - \nu N_\vartheta\right)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{1}{Eh}\left(N_\vartheta - \nu N_\varphi\right) \qquad \text{(III.130a,b)}$$

pa iz (III.129) dobijamo:

$$Eh\chi = -\frac{dN_\vartheta}{d\varphi} + \nu\frac{dN_\varphi}{d\varphi} + (1+\nu)(N_\varphi - N_\vartheta)\operatorname{ctg}\varphi \qquad \text{(III.131)}$$

Unošenjem vrednosti (III.127) i (III.128) za N_φ i N_ϑ putem transverzalne sile T, dobijamo konačno:

$$\frac{d^2T}{d\varphi^2} + \frac{dT}{d\varphi}\operatorname{ctg}\varphi + T(\nu - \operatorname{ctg}^2\varphi) = Eh\chi \qquad \text{(III.132)}$$

Jednačine (III.126) i (III.132) predstavljaju diferencijalne jednačine problema.

Integracija ovih jednačina drugog reda sa promenljivim koeficijentima nije nažalost moguća u zatvorenom obliku. Rešenje ovog zadatka moguće je, posle zamene nepoznatih svesti na hipergeometrijske diferencijalne jednačine i rešiti putem redova. Medjutim, ovi redovi su slabo konvergentni, posebno za tanke ljuske.

Upotrebljiva rešenja mogu se dobiti uprošćavanjem ovih jednačina odnosno njihovim svodjenjem na dve jednostavne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

5. Aproksimativno rešenje

Kao što smo već kod cilindrične ljuske uočili ivično opterećenje (rotaciono simetričnog karaktera) svodi se na dva ravnotežna sistema, sistem momenata i radijalnih sila od kojih svaki za sebe predstavlja ravnotežni sistem sila. Uticaji izazvani ovim opterećenjm brzo se prigušuju udaljavajući se od opterećene ivice. U vezi sa tim doprinos člana χ prema $\frac{d\chi}{d\varphi}$ u jednačini (III.126) je mali, a $\frac{d\chi}{d\varphi}$ isto tako mali prema članu $\frac{d^2\chi}{d\varphi^2}$, pa se ovi članovi mogu zanemariti u odnosu na član

$\frac{d^2\chi}{d\varphi^2}$ pod predpostavkom da $ctg\varphi$ nije suviše veliki odnosno ugao φ suviše mali. Drugim rečima, ova zanemarenja nisu opravdana za plitke ljuske ili za ljuske sa otvorom u temenu u zoni otvora.

Ako izuzmemo ove slučajeve jednačinu (III.126) možemo zameniti jednačinom

$$\frac{d^2\chi}{d\varphi^2}+\frac{a^2}{K}T=0. \qquad \text{(III.133)}$$

Na sličan način i uz ista obrazloženja možemo jednačinu (III. 132) svesti na:

$$\frac{d^2T}{d\varphi^2}-Eh\chi=0. \qquad \text{(III.134)}$$

Eliminacijom T odnosno χ dobijamo jednačine:

$$\frac{d^4\chi}{d\varphi^4}+Eh\frac{a^2}{K}\chi=0, \qquad \text{(III.135a,b)}$$

$$\frac{d^4T}{d\varphi^4}+Eh\frac{a^2}{K}T=0.$$

Zadržimo se na rešavanju poslednje jednačine jer, rešenje prethodne je u svemu isto kao i rešenje ove jednačine.

Obeležimo sa $\varkappa$ vrednost

$$\varkappa=\sqrt{\frac{a}{h}\sqrt{3(1-\nu^2)}},$$

tada se jednačina (III.135b) može napisati u obliku

$$\frac{d^4T}{d\varphi^4}+4\varkappa^4T=0 \qquad \text{(III.136)}$$

Pretpostavljajući rešenje u obliku

$$T=e^{r\varphi}$$

i unoseći ga u jednačinu dobijamo karakterističnu jednačinu

$$r^4+4\varkappa^4=0$$

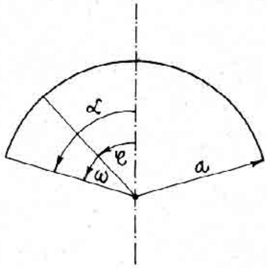
čiji su koreni

$$r_{1,2}=\pm(1+i)\varkappa, \quad r_{3,4}=\pm(1-i)\varkappa$$

pa je rešenje

$$T=e^{\varkappa\varphi}(C_1\cos\varkappa\varphi+C_2\sin\varkappa\varphi)+e^{-\varkappa\varphi}(C_3\cos\varkappa\varphi+C_4\sin\varkappa\varphi) \qquad \text{(III.137)}$$

Očigledno je da prvi deo rešenja prikazuje uticaje koji rastu kada φ raste tj. od temena ka konturi kupole, a drugi deo uticaja koji opadaju sa porastom ugla φ (sl. 56)



(Sl. 56)

Imajući na umu činjenicu da svi uticaji izazvani silama na konturi brzo opadaju udaljavajući se od konture, u izrazu (III.137) za T možemo zadržati samo prvi deo rešenja

$$T = e^{\varkappa\varphi}(C_1 \cos\varkappa\varphi + C_2 \sin\varkappa\varphi) \qquad \text{(III.138)}$$

Za praktičan proračun uticaja izazvanih silama na konturi pogodnije je ako umesto ugla φ , kao nezavisno promenljive uvedemo novu promenljivu $\omega = \alpha - \varphi$ (sl. 56) gde je α ugao koji zaklapa normala u tačkama konture sa osovinom rotacije.

Osim toga ćemo umesto konstanti C_1 i C_2 uvesti konstantu C i ugaonu konstantu ψ , pa dobijamo:

$$T = C e^{-\varkappa\omega} \cos(\varkappa\omega + \psi) \qquad \text{(III.139)}$$

Lako je videti da izmedju starih i novih konstanti postoji sledeća zavisnost:

$$C_1 = C e^{-\varkappa\alpha} \cos(\varkappa\alpha + \psi)$$
$$C_2 = C e^{-\varkappa\alpha} \sin(\varkappa\alpha + \psi) \qquad \text{(III.140a,b)}$$

Da bi dobili i izraze za presečne sile i χ sračunajmo prvo izvode $\frac{dT}{d\varphi}$ i $\frac{d^2T}{d\varphi^2}$

$$\frac{dT}{d\varphi} = \varkappa C e^{-\varkappa\omega}\left[\cos(\varkappa\omega + \psi) + \sin(\varkappa\omega + \psi)\right]$$

$$= \varkappa\sqrt{2}\, C e^{-\varkappa\omega} \sin\left(\varkappa\omega + \psi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(III.141a)}$$

$$\frac{d^2T}{d\varphi^2} = \varkappa^2\sqrt{2}\, C e^{-\varkappa\omega}\left[\sin\left(\varkappa\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\varkappa\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2\varkappa^2 e^{-\varkappa\omega} C \sin(\varkappa\omega + \psi) \qquad \text{(III.141b)}$$

Na osnovu jednačine (III.135a) dobijamo:

$$\chi = 2\frac{\varkappa^2}{Eh} C e^{-\varkappa\omega} \sin(\varkappa\omega + \psi) ,$$

i dalje

(III.142a,b)

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = 2\,\frac{\varkappa^3}{Eh}\, e^{-\varkappa\omega}\left[\sin(\varkappa\omega + \psi) - \cos(\varkappa\omega + \psi)\right] = -2\,\frac{\varkappa^3\sqrt{2}}{Eh} C e^{-\varkappa\omega} \cos\left(\varkappa\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right)$$

Za presečne sile N_φ, N_ϑ, M_φ i M_ϑ nalazimo na osnovu jednačina (III139, 141a,b, 142a,b)

$$N_\varphi = -C e^{-\varkappa\omega} \operatorname{ctg}\varphi \cos(\varkappa\omega + \psi)$$

$$N_\vartheta = -\varkappa\sqrt{2}\, C e^{-\varkappa\omega} \sin\left(\varkappa\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(III.143a,b,c,d)}$$

$$M_\varphi = -\frac{K}{a}\frac{d\chi}{d\varphi} = C\,\frac{K}{a}\,\frac{2\varkappa^3\sqrt{2}}{Eh}\left(\cos \varkappa\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$M_\vartheta = -K\frac{\chi}{a} + \nu M_\varphi$$

odnosno

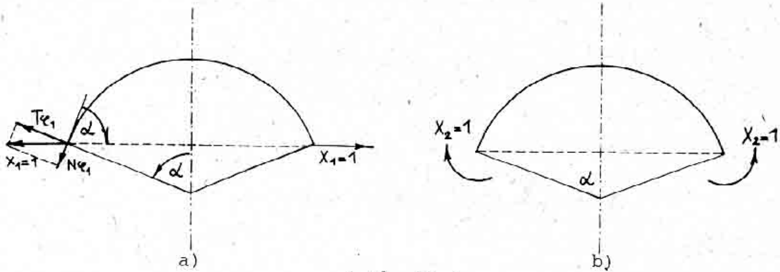
$$M_\varphi = \frac{Ca}{\varkappa\sqrt{2}}\, e^{-\varkappa\omega} \cos\left(\varkappa\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(III.144a,b)}$$

i

$$M_\vartheta = -\frac{Ca \operatorname{ctg}\varphi}{2\varkappa^2}\, e^{-\varkappa\omega} \sin(\varkappa\omega + \psi) + \nu M_\varphi$$

6. Sile na konturi sferne ljuske

Posmatraćemo sada, slično kao i u slučaju cilindrične ljuske, opterećenje ljuske radijalnim silama $X_1 = 1$ i momentima $X_2 = 1$ duž konture odredjene uglom α (sl. 57)



(Sl. 57)

Za prvi slučaj opterećenja granični uslovi su sledeći:

$$\varphi = \alpha : \quad (T_{\varphi_1}) = -\sin\alpha$$
$$(N_{\varphi_1}) = \cos\alpha \qquad \text{(III.145a,b,c)}$$
$$(M_{\varphi_1}) = 0$$

Treći uslov daje prema (III.144a)

$$\frac{Ca}{\varkappa\sqrt{2}}\cos\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

odnosno

$$\psi = \frac{\pi}{4} \quad ,$$

a iz drugog uslova nalazimo:

$$-C\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\frac{\pi}{4} = \cos\alpha$$

odnosno

$$C = -\sqrt{2}\sin\alpha \; ,$$

Sa nadjenim vrednostima konstanti izrazi za presečne sile za ovu vrstu opterećenja su sledeći:

$$T_1 = -\sqrt{2}\sin\alpha\, e^{-\varkappa\omega}\cos\left(\varkappa\omega + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_{\varphi_1} = \sqrt{2}\sin\alpha\, e^{-\varkappa\omega}\,\mathrm{ctg}\,\varphi\cos\left(\varkappa\omega + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_{\vartheta_1} = 2\varkappa e^{-\varkappa\omega}\sin\alpha\cos\varkappa\omega \qquad \text{(III.146a,b,c,d,e)}$$

$$M_{\varphi_1} = \frac{a}{\varkappa} e^{-\varkappa\omega}\sin\alpha\sin\varkappa\omega$$

$$M_{\vartheta_1} = \frac{a}{\varkappa^2\sqrt{2}} e^{-\varkappa\omega}\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\,\varphi\sin\left(\varkappa\omega + \frac{\pi}{4}\right) + \nu M_{\varphi}$$

za χ_1 nalazimo:

$$\chi_1 = -2\frac{\varkappa^2}{Eh}\sqrt{2}\, e^{-\varkappa\omega}\sin\alpha\sin\left(\varkappa\omega + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(III.147)}$$

Za $\varphi = \alpha$ promena ugla tangente na meridijalnu liniju iznosi:

$$\chi_1 = -2\frac{\varkappa^2\sin\alpha}{Eh}\,.$$

Osim ove vrednosti za rešavanje graničnih uslova, i odredjivanje vrednosti nepoznatih statičkih veličina X_1 i X_2 treba odrediti promenu dužine poluprečnika R_0 na konturi:

$$(\Delta R_0) = \varepsilon_{\vartheta_1} R_0 = 2\frac{\varkappa R_0}{Eh}\sin\alpha, \qquad \text{(III.148)}$$

pri čemu je i ovde zanemarena vrednost T u odnosu na $\frac{dT}{d\varphi}$.

Za drugi slučaj opterećenja imamo:

$$\varphi = \alpha: \quad (N_\varphi) = -C\,\mathrm{ctg}\,\alpha\cos\varphi = 0$$

$$(T) = C\cos\psi = 0 \qquad \text{(III.149a,b)}$$

iz čega proizilazi da je:

$$\psi = \frac{\pi}{2}\,,$$

i dalje:

$$\left(M_{\varphi}\right)=\frac{Ca}{\varkappa\sqrt{2}}\cos\frac{3}{4}\pi=1\ ,$$

odnosno

$$C=-\frac{2\varkappa}{a}\ .$$

Za presečne sile dobijamo:

$$T_2=\frac{2\varkappa}{a}e^{-\varkappa\omega}\sin\varkappa\omega$$
$$N_{\varphi_2}=-\frac{2\varkappa}{a}e^{-\varkappa\omega}\operatorname{ctg}\varphi\sin\varkappa\omega$$
$$N_{\vartheta_2}=\frac{2\varkappa^2}{a}e^{-\varkappa\omega}(\cos\varkappa\omega-\sin\varkappa\omega) \qquad \text{(III.150a,b,c,d,e)}$$
$$M_{\varphi_2}=e^{-\varkappa\omega}(\sin\varkappa\omega+\cos\varkappa\omega)$$
$$M_{\vartheta_2}=\frac{e^{-\varkappa\omega}}{\varkappa}\operatorname{ctg}\varphi\cos\varkappa\omega+\nu M_{\varphi_2}\ .$$

Promena nagiba tangente na meridijalnu liniju iznosi:

$$\chi_2=-\frac{a}{K\varkappa}e^{-\varkappa\omega}\cos\varkappa\omega\ . \qquad \text{(III.151)}$$

Za $\varphi=\alpha$ dobijamo

$$\chi_2=-\frac{a}{K\varkappa}\ .$$

Povećanje poluprečnika R_0 iznosi:

$$\left(\Delta R_{02}\right)=\varepsilon_{\vartheta_1}R_0=2\,\frac{\varkappa^2\sin\alpha}{Eh}\ . \qquad \text{(III.152)}$$

7. Primer proračuna sferne ljuske sa prstenom oslonjene po celoj konturi

Sferna ljuska sa sledećim podacima $R_0(\varphi=\alpha)=20$, $h=0,06$ m (Sl. 58) i $\alpha=45^{\circ}$ opterećena je stalnim i korisnim rotacionosimetričnim teretom

$$q = g + p = 2,5 \text{ kN/m}^2$$

Dimenzije prstena su:

$b=0,6$ m

$d=0,6$ m

Poluprečnik sfere je:

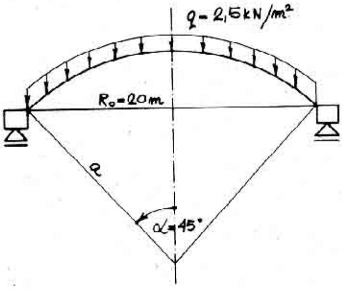
$$a = \frac{R_0}{\sin\alpha} = 28,28 \quad .$$

Usvaja se:

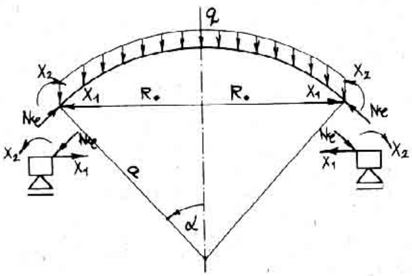
$E=3,0\cdot10^7$ kN/m^2 i $\nu=0$, pa je

$$\varkappa = \sqrt{\frac{a}{h}\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 28,572$$

Rešenje zadatka nalazimo dekompozicijom sistema na sfernu ljusku i prsten. U osnovnom sistemu na ljusku oslonjenu u pravcu tangente na meridijalnu krivu deluje zadato opterećenje q i nepoznate sile (u generalisanom smislu): X_1 i X_2 (Sl. 59)



(Sl. 58)



(Sl. 59)

Prsten napadaju aktivna sila N_{φ_0} i nepoznate sile X_1 i X_2 suprotnog smera (Sl. 59) u odnosu na odgovarajuće sile koje deluju na ljusku.

Rešenje zadatka nalazimo postavljanjem uslova kompatibilnosti odgovarajućih generalisanih pomeranja za ljusku i prsten:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0$$

gde, kao i u statici linijskih nosača δ_{ij} predstavlja pomeranje u pravcu sile X_i usled dejstva sile $X_j=1$, a δ_{i0} odgovarajuće pomeranje usled zadatog opterećenja. Pri tome u δ_{ij} ulazi pomeranje ljuske i prstena. Pomeranje je pozitivno ako se dešava u smeru usvojenom za silu $X_i=1$.

Tako nalazimo na osnovu prethodne tačke (Sl. 57a) usled $X_1=1$:

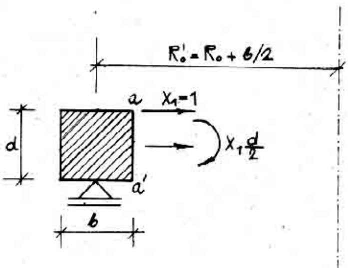
$$E\delta_{11}^{I} = 2\,\frac{\varkappa R_0}{h}\sin\alpha = 13469{,}031$$

$$E\delta_{21}^{I} = 2\,\frac{\varkappa^2 \sin\alpha}{h} = 19241{,}860$$

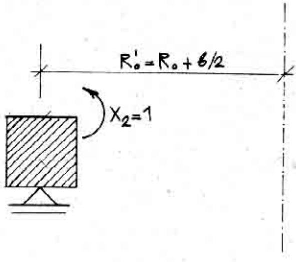
gde su sa indeksom I obeležene vrednosti koje se odnose na ljusku.

Redukcijom sile $X_1=1$ na težište (Sl. 60) preseka prstena dobijamo kao opterećenje prstena silu $X_1=1$ i jednako podeljeni spoljni momenat

$$M_* = -X_1\frac{d}{2} = -\frac{d}{2}$$



(Sl. 60)



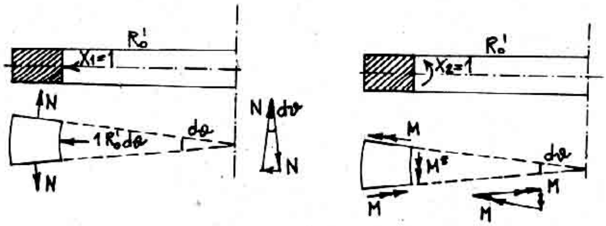
(Sl. 61)

Iz uslova ravnoteže elementa prstena (Sl. 62):

$$N d\vartheta + R_o' d\vartheta = 0 \quad , \quad M d\vartheta - M_* R_o' d\vartheta = 0 \; ,$$

nalazimo normalnu silu i momenat savijanja prstena

$$N = -R_o' \quad , \quad M = M_* R_o' = -R_o' \frac{d}{2} \; ,$$



(Sl. 62)

Dilatacije gornjeg ivičnog vlakna prstena data je izrazom

$$\varepsilon a = \frac{N}{EF} - \frac{M}{J} \frac{d}{2} \quad , \quad J = \frac{b d^3}{12}$$

odnosno

$$E\varepsilon a = -\frac{1}{bd} R_o' - \frac{3}{bd} R_o' = -\frac{4}{bd} R_o' \, .$$

Za pomeranje $E\delta_{11}^{II}$ tačke a prstena dobijamo konačno, imajući na umu usvojeni smer za silu $X_1 = 1$, promenu dužine poluprečnika R_o

$$E\delta_{11}^{II} = -R_o' \varepsilon a = \frac{4}{bd} R_o'^2$$

odnosno

$$E\delta_{11}^{II} = \frac{4 \times 20{,}30^2}{0{,}60^2} = 4578{,}780$$

Obrtanje poprečnog preseka dobijamo kao razliku izmedju pomeranja tačaka a i a´ podeljenu sa visinom preseka d:

$$E_{21}^{I} = -\frac{6}{bd^2} R_o'^2 = -\frac{6 \times 20{,}30^2}{0{,}6^3} = -11446{,}940$$

Treba primetiti da je ovo obrtanje suprotno smislu obrtanja momenta $X_2=1$ i zbog toga je negativno.

Usled dejstva momenta $X_2=1$ nalazimo na osnovu prethodne tačke (sl. 57b)

$$E\delta_{12}^{I}=2\,\frac{\varkappa^2\sin\alpha}{h}=19241{,}860$$

$$E\delta_{22}^{I}=\frac{a}{K\varkappa}=\frac{12a}{h^3\varkappa}=54987{,}790\ .$$

Za prsten dobijamo (sl. 61)

$$E\delta_{12}^{II}=-\frac{6R_0'^2}{bd^2}=-11446{,}940$$

$$E\delta_{22}^{II}=\frac{12R_0'^2}{bd^3}=38156{,}480$$

Vrednosti δ_{10}^{I} i δ_{20}^{I} nalazimo iz rešenja prema bezmomentnoj teoriji (vidi tabelu I).

$$E\delta_{10}^{I}=E\Delta R_0=-\frac{a^2q\sin\alpha}{h}\left(\cos\alpha-\frac{1}{1+\cos\alpha}\right)=-2858{,}800$$

$$E\delta_{20}^{I}=E\chi_0=-\frac{aq}{h}\,2\sin\alpha=-1666{,}42\ .$$

Za prsten nalazimo

$$N_{\varphi_0}=-\frac{qa}{1-\cos\alpha}=-41{,}420\ ,$$

i dalje

$$E\delta_{10}^{II}=E\Delta R_0=\frac{N_{\varphi}\cos\alpha}{bd}R_0'^2=-33526{,}380\ ,$$

dok je

$$E\delta_{20}^{II}=0\ .$$

Sabiranjem $\delta_{ij}^{I} + \delta_{ij}^{II} = \delta_{ij}$ dobijamo:

$$E\delta_{11} = 18,047 \times 10^3 \qquad E\delta_{12} = 7,794 \times 10^3 \qquad E\delta_{22} = 93,144 \times 10^3$$

$$E\delta_{10} = -36,385 \times 10^3 \qquad E\delta_{20} = 1,666 \times 10^3$$

i uslovne jednačine

X_1	X_2	δ_{io}	
18,047	7,794	-36,385	$10^3/E$
7,794	93,144	-1,666	$10^3/E$

Rešenjem nalazimo:

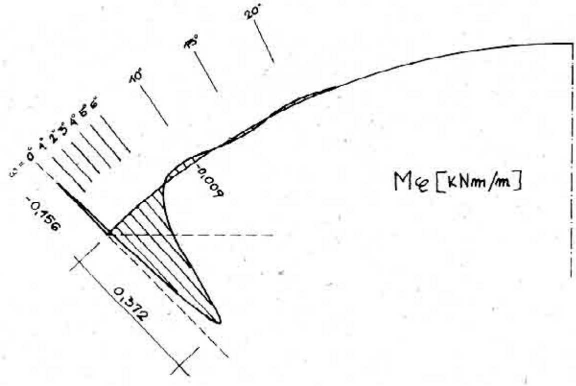
$$X_1 = 2,084 \; kN/m' \qquad X_2 = -0,1565 \; kNm/m'$$

Superpozicijom dobijamo bilo koji uticaj Z_m u ljuski

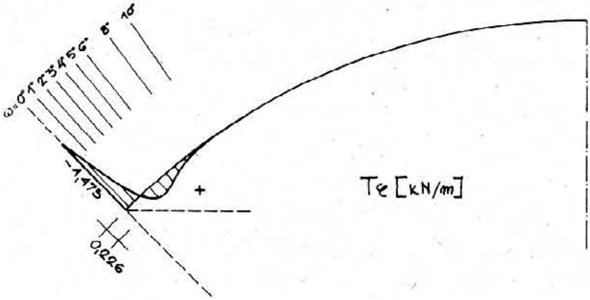
$$Z_m = Z_{m1} X_1 + Z_{m2} X_2 + Z_{mo} ,$$

gde je Z_{mj} odgovarajući uticaj za $X_j = 1$, a Z_{mo} uticaj u osnovnom sistemu.

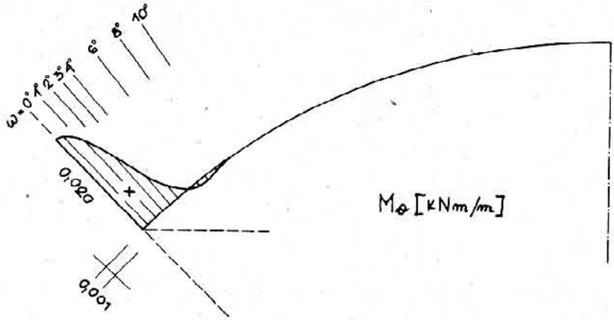
Na Sl. 63 uati su dijagrami N_φ, N_ϑ, T_φ, M_φ i M_ϑ za analiziranu ljusku:



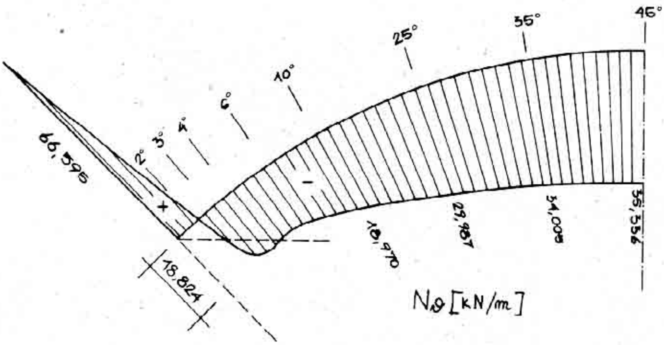
(Sl. 63a)



(Sl. 63b)

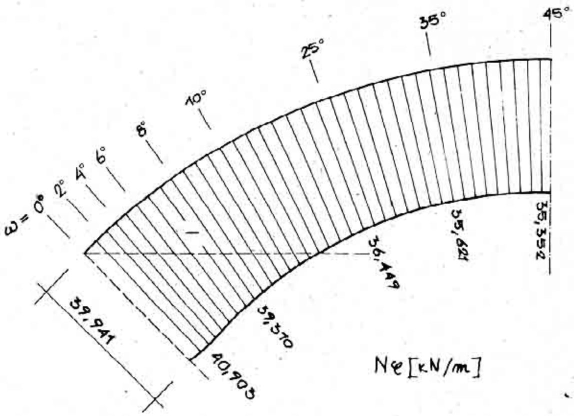


(Sl. 63c)



45°
35°
25°
10°
6°
4°
3°
2°
66,596
+
–
18,824
10,970
29,987
34,009
35,356
Nϑ [kN/m]

(Sl. 63d)



45°
35°
25°
10°
8°
6°
4°
2°
ω = 0°
–
39,941
40,903
39,370
36,449
35,621
35,352
Nφ [kN/m]

(Sl. 63e)